Pauta Pregunta 3

30 de octubre de 2007

1) Calcular $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta+\sin\theta}$.

Vamos a transformar la integral a una integral compleja y ocupar el teorema de los residuos para calcularla.

Primero transformamos la integral, mediante los cambios $z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$ y

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

Así,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta+\sin\theta} = 2\oint_\Gamma \frac{dz}{(2i+1)\,z^2+6iz+2i-1}$$

Con $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La raíces del polinomio $(2i+1)\,z^2+6iz+2i-1$ son $z_0 = \frac{-2-i}{5}$ y $z_1 = -2-i$. "Claramente" z_0 está dentro de área encerrada por Γ y z_1 fuera y ambos son polos de orden 1. Como la función en el integrando es analítica salvo en las raíces, podemos ocupar el teorema de los residuos, luego basta calcular el residuo en z_0.

Factorizando el polinomio,

$$(2i+1)\,z^2+6iz+2i-1 = (1+2i)(z+2+i)\left(z+\frac{2+i}{5}\right)$$

Noten que el primer factor es el factor que acompaña a z^2en el polinomio[1].

El residuo es $\frac{1}{4i}$, entonces por el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta+\sin\theta} = 2\oint_\Gamma \frac{dz}{(2i+1)\,z^2+6iz+2i-1} = 2\left(2\pi i\frac{1}{4i}\right) = \pi$$

2) Calcular $\oint_{\partial B(0,1)} \frac{1+z}{1-\cos z}dz$, recorrida en sentido antihorario.

Vamos a ocupar el teorema de los residuos. La función $\frac{1+z}{1-\cos z}$ es analítica en todo el plano, salvo en $z_k = 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. La única singularidad que nos interesa es $z_0$ya que es la única encerrada por el curva.

[1] por eso a muchos no les quedaba real la integral.

Recordemos que

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2\,(1+z)}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}\cdot\lim(1+z)=2$$

Por lo tanto, z_0 es un polo de orden 2.

Ahora calculamos el residuo:

$$Res\left(\frac{1+z}{1-\cos z},z_0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^2\,(1+z)}{1-\cos z}=2$$

El límite se calcula aplicando unas cuantas veces la regla de L'Hopital[2]. Luego por el teorema de los residuos se tiene que

$$\oint_{\partial B(0,1)}\frac{1+z}{1-\cos z}dz=2\pi i\cdot 2=4\pi i$$

Otra forma mucho más sencilla de resolver este problema era separando la integral en dos integrales $\oint_{\partial B(0,1)}\frac{1+z}{1-\cos z}dz=\oint_{\partial B(0,1)}\frac{1}{1-\cos z}dz+\oint_{\partial B(0,1)}\frac{z}{1-\cos z}dz$ y ahí aplicar el teorema (calcular los residuos en este caso es mucho más fácil)

Una forma rápida para calcular el residuo es notar que:

$$1-\cos z=\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}+\ldots\;\Rightarrow\;\frac{z^2\,(1+z)}{1-\cos z}=\frac{1+z}{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\ldots}$$

Entonces al derivar queda

$$\frac{d}{dz}\frac{z^2\,(1+z)}{1-\cos z}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)-(1+z)\left(-2\frac{z}{4!}+4\frac{z^3}{6!}-\ldots\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Res\left(\frac{1+z}{1-\cos z},z_0\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^2\,(1+z)}{1-\cos z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)-(1+z)\left(-2\frac{z}{4!}+4\frac{z^3}{6!}-\ldots\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)^2}\\
&= \frac{\frac{1}{2}-(1+0)\,(0)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\
&= 2
\end{aligned}$$

[2]Recuerden que esta regla es válida cuando se tienen indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, etc.