



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Matemática  
MA26B: Matemáticas Aplicadas  
Profesor: Felipe Álvarez D., Pauta por Cristóbal Guzmán P.

Pauta Control 2 año 2006

### Problema 2

(a) Sea  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario y que encierra una región  $D \subset \mathbb{C}$ . Pruebe que  $Area(D) = \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} \bar{z} dz$

**Sol:** Como se ocupará el Teorema de Green lo enunciaremos. Sea  $F = (f_1, f_2)$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido sobre un abierto acotado de frontera  $\Gamma$  suave a trozos. Luego:

$$\oint_{\Gamma} F \cdot dr = \int \int_D \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA$$

Ahora bien, podemos partir de la integral compleja y comenzar a separar términos para usar esta última fórmula.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} \bar{z} dz &= \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} (x - iy)(dx + idy) = \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} [xdx + ixdy - i ydx - i^2 ydy] \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} xdx + ydy + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx \end{aligned}$$

Analizamos las integrales por separado. Si llamamos (1) y (2) a las integrales.  
**Integral (1):** Acá ocupamos Green con  $f_1 = x$  y  $f_2 = y$ , luego ser igual a:

$$\int \int_D \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) dA = 0$$

**Integral (2):** Usando Green con  $f_1 = -y$  y  $f_2 = x$  se tiene que la integral vale:

$$\int \int_D \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) dA = 2 \int \int_D dA = 2Area(D)$$

Lo que concluye la demostración.

(b) Pruebe que  $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin(\theta) + \theta) d\theta = \int_0^2 \pi e^{\cos \theta} \sin(\sin(\theta) + \theta) d\theta = 0$ .  
Hint: integre  $f(z) = \exp(z)$  en  $\partial D(0, 1)$ .

**Sol:** Usemos el hint y expresemos la integral en su forma polar:

$$\int_{\partial D(0,1)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta + i \sin \theta} i e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} [\cos(\sin \theta) + i \sin(\sin \theta)] i (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta$$

Debemos desarrollar esta integral en su parte real e imaginaria:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} [i \cos(\sin \theta) \cos \theta - \cos(\sin \theta) \sin \theta - \sin(\sin \theta) \cos \theta - i \sin(\sin \theta) \sin \theta] d\theta$$

De trigonometría:

$$i[\cos(\sin \theta) \cos \theta - \sin(\sin \theta) \sin \theta] = i \cos(\sin \theta + \theta)$$

$$-[\sin(\sin \theta) \cos \theta + \cos(\sin \theta) \sin \theta] = -\sin(\sin \theta + \theta)$$

Por lo que la integral se reduce a:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} [-\sin(\sin \theta + \theta) + i \cos(\sin \theta + \theta)] d\theta = \int_{\partial D(0,1)} f(z) dz = 0$$

pues  $f$  es holomorfa en todo  $\mathbb{C}$ . Separando en parte real e imaginaria se tiene el resultado:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin(\theta) + \theta) d\theta = \int_0^2 \pi e^{\cos \theta} \sin(\sin(\theta) + \theta) d\theta = 0$$

(c) Pruebe que la función  $f(z) = 1 + az + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$  está bien definida y es holomorfa en  $D(0, 1)$  donde  $a \neq 0$ .

**Sol:** Notemos que si  $a \in \mathbb{N}$  entonces la serie se reduce a un polinomio, por lo que es holomorfa en todo  $\mathbb{C}$  (este caso no lleva puntaje).

Si  $a \notin \mathbb{N}$ , entonces para verificar lo pedido basta calcular el radio de convergencia de la serie de potencias (notar que por teorema visto en clases, la condición  $R = 1$  es suficiente para afirmar que la fórmula esta bien definida y representa una función holomorfa en el disco unitario).

$$\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \limsup \left| \frac{a(a+1)\dots(a-n+1)(a-(n+1)+1)}{(1)(2)\dots(n+1)} \frac{(1)(2)\dots(n)}{a(a+1)\dots(a-n+1)} \right|$$

$$\limsup \left| \frac{a-n}{n+1} \right| = \lim \left| \frac{a-n}{n+1} \right| = 1$$

Por lo que el radio de convergencia es  $R = \frac{1}{\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = 1$

**Puntaje Asignado:**

En la parte (a), se asignó 1 punto al desarrollo de la integral y 1 punto al uso del Teo. de Green. En la parte (b), se asignó 1 punto por el uso de la forma polar, 1 punto por los desarrollos, 0.5 por afirmar que la integral de la función  $f$  vale 0; y 0.5 por separar en parte real e imaginaria. En la parte 3 se asignaron 0.5 por explicar que basta con calcular el radio de convergencia y 0.5 por calcularlo.