

P3] (a) vamos que $|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z}|$ (*)

Em efecto. $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$

luego $e^z = e^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{i \operatorname{Im} z}$ com $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

$$\text{com isto } |e^z| = |e^{\operatorname{Re} z}| \cdot |e^{i \operatorname{Im} z}| \\ = e^{\operatorname{Re} z} \cdot |(\cos \operatorname{Im} z + i \operatorname{sen} \operatorname{Im} z)| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Ahora

$$0 \leq R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta = R \int_0^{\theta_0} |e^{-R^2 e^{i2\theta}}| d\theta = (**)$$

notemos que $\operatorname{Re}(-R^2 e^{i2\theta}) = -R^2 \cos 2\theta$.

$$(*) \Rightarrow (**) = R \int_0^{\theta_0} e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta$$

como $\cos 2\theta \geq 1 - \frac{2}{\pi} \cdot 2\theta$

$$\Rightarrow e^{-R^2 \cos 2\theta} \leq e^{-R^2(1 - \frac{4\theta}{\pi})}$$

luego.

$$(**) \leq R \int_0^{\theta_0} e^{-R^2(1 - \frac{4\theta}{\pi})} d\theta = R e^{-R^2} \int_0^{\theta_0} e^{R^2 \frac{4\theta}{\pi}} d\theta \\ = \frac{\pi e^{-R^2}}{4R} [e^{R^2 \frac{4\theta_0}{\pi}} - 1] = \frac{\pi}{4R} [e^{R^2(1 - \frac{4\theta_0}{\pi})} - e^{-R^2}]$$

Con esto se tiene que:

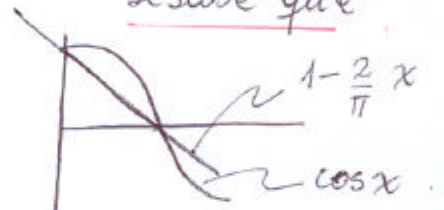
$$0 \leq R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{\pi}{4R} [e^{R^2(1 - \frac{4\theta_0}{\pi})} - e^{-R^2}]$$

Aplicando límite

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4R} [e^{R^2(1 - \frac{4\theta_0}{\pi})} - e^{-R^2}]$$

Como $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{4}]$, $(1 - \frac{4\theta_0}{\pi}) \leq 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4R} [e^{R^2(1 - \frac{4\theta_0}{\pi})} - e^{-R^2}] = 0$

Se sabe que



$$\cos x \geq 1 - \frac{2x}{\pi}; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

luego $0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 0$

ergo, por teo del Sandwich

Ahora, integremos la función por el siguiente camino Γ

$$\int_{\Gamma} \exp(-z^2) dz$$

Como la función $f(z) = \exp(-z^2)$ es holomorfa en \mathbb{C} y por el teo. de Cauchy-Goursat se tiene que:

$$\int_{\Gamma} \exp(-z^2) dz = 0. \quad (0.3)$$

Γ_1 se parametriza o parametriza por $z = x, x \in [0, R]$.

$$dz = 1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \exp(-z^2) dz = \int_0^R e^{-x^2} dx$$

Γ_3 se parametriza por $z = xe^{i\theta_0}, x \in [0, R] \Rightarrow dz = e^{i\theta_0} dx$.

$$\int_{\Gamma_3} \exp(-z^2) dz = e^{i\theta_0} \int_R^0 f(xe^{i\theta_0}) dx. \quad (0.6)$$

Con esto se tiene que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ lo que implica que:

$$\int_{\Gamma} \exp(-z^2) dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + iR \int_0^{\theta_0} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta + e^{i\theta_0} \int_R^0 f(xe^{i\theta_0}) dx.$$

Veamos que.

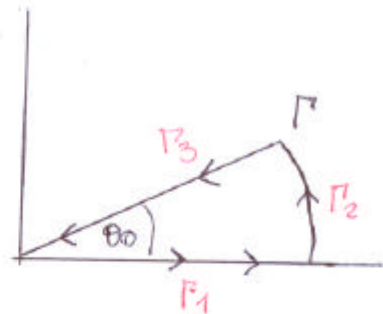
$$|iR \int_0^{\theta_0} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta| = |iR| \left| \int_0^{\theta_0} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} d\theta$$

que es 0 por lo probado anteriormente, esto hace que al tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$ la expresión

$$iR \int_0^{\theta_0} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0$$

(0.5)



(0.5)

Haciendo el $\lim_{R \rightarrow \infty}$ queda, por lo calculado anteriormente

$$\int_{\Gamma} \exp(-z^2) dz = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx + e^{i\theta_0} \int_{\infty}^0 f(xe^{i\theta_0}) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = -e^{i\theta_0} \int_{\infty}^0 f(xe^{i\theta_0}) dx = e^{i\theta_0} \int_0^{\infty} f(xe^{i\theta_0}) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = e^{i\theta_0} \int_0^{\infty} f(xe^{i\theta_0}) dx} \quad (\star)$$

(0,1)

(b) Como se menciona en una esquinilla, Tomaremos $\theta_0 = \frac{\pi}{8}$

Usando el mismo camino de integración de antes se llega a (\star) , reemplazando $\theta_0 = \frac{\pi}{8}$ queda:

$$e^{i\pi/8} \int_0^{\infty} \exp(-x^2 e^{i2\pi/8}) dx = \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx$$

Veamos que $\exp(-x^2)$ es par, por lo tanto es simétrica con respecto al eje Y.

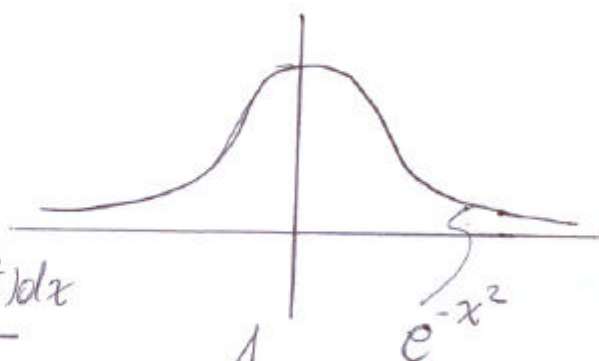
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (0,3)$$

Con esto se tiene

$$\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \int_0^{\infty} \exp(-x^2 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \int_0^{\infty} e^{-x^2 \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (0,3)$$



• Cuando vean probabilidades la conocerán mejor

Hacemos el cambio de variable $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} x = y \Rightarrow dx = \sqrt{\sqrt{2}} dy$.

$$\rightarrow \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \int_0^{\infty} e^{-y^2(1+i)} \sqrt{\sqrt{2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (0,3)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) \sqrt{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-y^2(1+i)} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$x=y \Rightarrow \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} (\cos(-x^2) + i \sin(-x^2)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} (\cos x^2 - i \sin x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}$$

Racionalizando a la derecha se llega a que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos x^2 - i \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin x^2 = \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{2\sqrt{2}+2} - i\sqrt{2\sqrt{2}-2})}{2\sqrt{2}+2 + 2\sqrt{2}-2} \quad (0,3)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos x^2 - i \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin x^2 = \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{2\sqrt{2}+2} - i\sqrt{2\sqrt{2}-2})}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1})}{4}$$

Iguando parte real y parte imaginaria se concluye que. (0,3)

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos x^2 = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{2}+1}}{4}} \quad \boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin x^2 = \frac{\sqrt{\pi} (\sqrt{2}-1)}{4}}$$