

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

$$\text{sea } f(z) = \frac{1}{z} \quad y \quad \text{diagrama de un círculo en el plano complejo con eje real y eje imaginario, etiquetado con 'a' y 'b'.$$

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \theta + i b \cos \theta}{a \cos \theta + i b \sin \theta} d\theta \quad 0,5$$

$$r(\theta) = a \cos \theta + i b \sin \theta$$

$$r'(\theta) = -a \sin \theta + i b \cos \theta$$

razonando = $\int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin \theta + i b \cos \theta)(a \cos \theta - i b \sin \theta)}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta + i ab}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta$

Por theo. de los Residuos. $\int f(z) = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 2\pi i$ 1,0

$$\Rightarrow 2\pi i = \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{i ab}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta}_{\in \mathbb{R}}$$

Igualando parte real e imaginaria se concluye. 0,5

$$b) f(z) = \frac{(z^2 - 4)(z - 1)^4}{(\sin \pi z)^4} = \frac{(z - 2)(z + 2)(z - 1)^4}{(\sin \pi z)^4}$$

Si tiene que $\lim_{z \rightarrow m} \frac{\sin \pi z}{(z - m)} = \lim_{z \rightarrow m} \frac{\pi \cos \pi z}{1} = \pi \cos \pi m = \pi (-1)^m$ ⊗ 0,5

Luego, las singularidades están en \mathbb{Z} . L'Hôp

$\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{2, -2, 1\} \Rightarrow$ polo de orden 4 0,5

$m \in \{2, -2\} \rightarrow$ polo de orden 3. 0,5

$m = 1 \rightarrow$ removible 0,5

OSO: El puntaje se daba por justificar bien pq los límites existen (usando ⊗) y que

$\lim_{z \rightarrow m} f(z)(z - m)^m$ con $m <$ orden no existían

$$c) \oint \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)}$$

Γ 0,5

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)}$$

tiene polo en i y $-i$, para ocupar residuos solo importa $-i$, de orden 2 0,5

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z - i)^2} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow -i} \left(\frac{e^{iz} [(iz + 1) - 2]}{(z - i)^3} \right)$$

Evaluando en $-i \Rightarrow \text{Res}(f, -i) = 0$ 0,5

Luego, por theo Res.

$$\oint f = 2\pi i \text{Res}(f, -i) = 0$$
 0,5