CONTROL 3: MA26B-02 Matemáticas Aplicadas 2006

Problema 1.

(a) [2.0 ptos.] Sean a, b constantes estrictamente positivas. Muestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$.

Ind.: Integre la función $f(z) = 1/z$ sobre la elipse descrita por $\gamma(\theta) = a\cos\theta + ib\operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(b) [2.0 ptos.] La función $f(z) = \dfrac{(z^2-4)(z-1)^4}{(\operatorname{sen}\pi z)^4}$ tiene singularidades en los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Clasifique todas las singularidades de $f(z)$, distinguiendo si se trata de singularidades evitables o polos, e indicando el orden cuando corresponda. No se pide que calcule los residuos.

Ind.: Puede ser útil comenzar mostrando que $\displaystyle\lim_{z\to n} \frac{\operatorname{sen}\pi z}{z-n} = (-1)^n\pi$ para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

(c) [2.0 ptos.] Determine el valor de la integral $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$ para la curva Γ correspondiente a la circunferencia $|z+i| = 1/2$ recorrida en sentido antihorario.

Problema 2.

(a) [3.0 ptos.] Considere la función $f(z) = e^{1/z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Justifique a partir de la teoría vista en clases que el coeficiente que acompaña al término z^k, $k \in \mathbb{Z}$, de la serie de Laurent de $f(z)$ en torno al punto $z_0 = 0$ está dado por $a_k = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{e^{1/w}}{w^{k+1}}dw$, donde la circunferencia $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ está orientada apropiadamente. Muestre que

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta + k\theta)d\theta.$$

(b) [1.0 pto.] Sin usar la parte (a), encuentre la serie de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ en torno a $z_0 = 0$.

Ind.: Puede utilizar series de potencias de funciones conocidas.

(c) [2.0 ptos.] Deduzca de (a) y (b) que para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta - n\theta)d\theta = \frac{1}{n!}.$$

Problema 3.

(a) [3.0 ptos.] Evalúe la siguiente integral: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4}dx$.

(b) [3.0 ptos.] Suponga que $a \in \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$. Integrando la función $\dfrac{e^{az}}{e^z+1}$ en torno a un rectángulo de vértices en $\pm R$ y $\pm R + 2\pi i$, muestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a}$.

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 5 de Octubre de 2006.

Prof.: Felipe Alvarez.
Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 2: MA26B-02 Matemáticas Aplicadas 2006

Problema 1.

(a) [3.0 ptos.] Considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = [x^2 - y/(x^2+y^2)]\hat{\imath} + [x/(x^2+y^2) - 2y]\hat{\jmath}$. Indique el dominio de diferenciabilidad Ω de $\vec{F}$ y muestre que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ en todo Ω. Calcule la integral de trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1, z=2$ recorrida en sentido antihorario.

(b) [4.0 ptos.] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto estrellado. Suponga que $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y sea $\vec{U} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ un campo vectorial tal que

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{U} &= 0 & \text{en} & \Omega \\ \mathrm{div}\vec{U} &= f & \text{en} & \Omega \\ \vec{U}\cdot\hat{n} &= g & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f, g \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ y $\hat{n}$ es la normal exterior a Ω. Pruebe que existe un campo escalar $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ tal que $\vec{U} = \nabla u$. Pruebe que para todo $v \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ se cumple

$$\iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dV = \iint_{\partial\Omega} vg\, dA - \iiint_\Omega vf\, dV.$$

Asumiendo que $\overline{\Omega}$ no intersecta al plano de ecuación $y=0$, y que $f(x,y,z) = g(x,y,z) = \dfrac{1}{y^2}$, deduzca que

$$\iiint_\Omega y\frac{\partial u}{\partial y}\, dV = \frac{1}{2}Area(\partial\Omega) - \frac{1}{2}Vol(\Omega).$$

Problema 2.

(a) [2.0 pts.] Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario y que encierra una región $D \subseteq \mathbb{C}$. Pruebe que $Area(D) = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\oint_\Gamma \overline{z}dz$.

(b) [3.0 pts.] Pruebe que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\mathrm{sen}\theta + \theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\theta+\theta)d\theta = 0$. Indicación: integre la función $f(z) = \exp(z)$ a lo largo de la circunferencia $|z|=1$.

(c) [1.0 pto] Pruebe que la función $f(z) = 1 + az + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}z^k$ está bien definida y es holomorfa para $|z|<1$, donde $a>0$.

Problema 3. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la función holomorfa dada por $f(z) = \exp(-z^2)$.

(a) [3.0 ptos.] Dado $\theta_0 \in]0,\pi/4]$, pruebe que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})|d\theta = 0$. Deduzca que se tiene $e^{i\theta_0}\displaystyle\int_0^\infty f(e^{i\theta_0}x)dx = \int_0^\infty f(x)dx$.

(b) [3.0 ptos.] Sabiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(x^2)dx$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{sen}(x^2)dx$. Indicación: $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.