Guia Variable Compleja
Prof: Felipe Álvarez

Problema 1.-

1. Pruebe que para $b \in (-1, 1)$ se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{1 - b^2 - x^2}{(1 - b^2 - x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

   Indicación. Integre $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular dependiente de R y luego haga $R \to \infty$.

2. Suponga que $a \in \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$. Integrando la función $\frac{e^{az}}{e^z+1}$ en torno a un rectángulo de vértices en $\pm R$ y $\pm R + 2\pi i$, muestre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{az}}{e^x + 1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Problema 2.-

(i)

Se sabe que[1] si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ admite primitiva (ie. existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$) entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

donde F es la primitiva de f y Γ es un camino parametrizada por $\gamma \colon [a, b] \to \Omega$

1. Encuentre una primitiva de la función $\log(z)$ en $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$
   Indicación: Proceda como en el caso de $\mathbb{R}$ integrando por partes.
2. Calcule la integral $\int_\Gamma \log(z)\, dz$ para cada una de las siguientes curvas simples:
   a) $\Gamma = \partial D\left(i, \frac{1}{2}\right)$
   b) $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1,\ Re(z) \geq 0\}$
   c) Segmento de la recta entre 1 y $5i$.

(ii) Dada $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con u y v funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Definimos $\triangle f = \triangle u + i \triangle v$.

Diremos que f es una función armónica compleja si $\triangle f = 0$. Demuestre que $f \in H(\Omega)$ si y solo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas conjugadas.

Problema 3.- "*Formula de Wallis*"

1. Demuestre que

$$z^{-1}\left(z + \tfrac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{(2n)! z^{2n-2k-1}}{(2n-k)!k!} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

2. Pruebe que

$$\oint_\Gamma z^{-1}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz = 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

   donde $\Gamma = \partial(0, 1)$ es la circunferencia de centro 0 y radio 1, recorrida en sentido antihorario.

[1] ver apunte pagina 104, proposición 8.2.1

3. Usando la parte (2) pruebe que
$$\int_0^{2\pi} (2\cos(\theta))^{2n}\, d\theta = 2\pi \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
4. Muestre que
$$\int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2n}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$
5. Calcule
$$\int_0^{\pi/2} (\sin(\theta))^{2n}\, d\theta$$
para $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4. *"Teorema del valor medio de Gauss"*

1. Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces $\forall r \in (0, R)$ se tiene que
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$
2. Usando lo anterior muestre que
   a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta = 2\pi$
   b) $\int_0^{2\pi} Log\left[a^2 + 1 + 2a\cos(n\theta)\right] d\theta = 4\pi Log(a)$, donde $a > 1$, $n \in \mathbb{Z}$.
   Indicación: $a^2 + 1 + 2a\cos(n\theta) = |a + e^{in\theta}|^2$
3. Calcule
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)}d\theta \quad a > 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$
   Indicación: Considere $f(z) = \frac{1}{z^n + a}$

Problema 5.-

1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.
   a) $\sum_0^\infty z^{n!}$
   b) $\sum_0^\infty (n + 2^n) z^n$
2. Suponga que $\sum_0^\infty c_n z^n$ tiene radio de convergencia R. Encuentre el radio de convergencia de
   a) $\sum_0^\infty n^p c_n z^n$
   b) $\sum_0^\infty |c| z^n$
   c) $\sum_0^\infty c_n^2 z^n$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos tales que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$
entonces
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Problema 6.- Usando el teorema anterior encuentre el radio de convergencia de

1. $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} z^n$
2. $\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
3. $\sum_0^\infty \frac{n!}{n^n} z^n$
4. $\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!} z^n$