Auxiliar: MA26B Matemáticas Aplicadas

Profesor: Felipe Álvarez
Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

5 de Octubre de 2007

Problema 1.- Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, tal que es analítica en $\Omega \backslash \{0\}$ y continua en Ω, con Ω abierto tal que $\overline{D}(0, r) \subseteq \Omega$ para algún $r > 0$. Suponga que existe una sucesión $(z_n)_{n \geq 0} \subseteq \Omega \setminus \{0\}$ tal que $z_n \to 0$ y $f(z_n) = 0$ para todo $n \geq 0$. Pruebe que $f \equiv 0$.

Problema 2 (Liouville).- Pruebe que si f es entera y acotada, entonces f es constante.

Problema 3.- Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pruebe que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

Usando esto, pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

Problema 4.- Calcule

1. $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$
2. $\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

Problema 5.- Muestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt = \frac{2\pi}{ab}$$