DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs. FELIPE ALVAREZ
ROBERTO COMINETTI

Matemáticas Aplicadas
Guía # 4: Variable Compleja

1. (a) Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.
   (b) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos. Pruebe que:
      i. Si $f' \equiv 0$ en Ω entonces f es constante en Ω.
      ii. Si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: Considere $|f|^2$ y pruebe que $f' \equiv 0$.

2. (a) Sean $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces $u + iv$ es constante.
   (b) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|,\ z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0.

3. Dada una función $f = u + iv$, se define el laplaciano de f por $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω. Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.

4. Definamos los operadores diferenciales $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

   (a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
   (b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$.
   (c) ¿ A qué corresponde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$? Deduzca que toda función holomorfa es armónica.

5. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \widehat{u}(x,y) + i\widehat{v}(x,y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r,\theta) = \widehat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $v(r,\theta) = \widehat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si
$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} & = & \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} & = & -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$
Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

6. (a) Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:
$$\sum z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n}, \quad \sum \frac{z^n}{n^2}$$
   (b) Si $\sum c_k(z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$. ¿ Cuál es el radio de convergencia de las siguientes series de potencias ?
$$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2(z - z_0)^k$$

7. Pruebe que:
   (a) $\sin(iz) = i\sinh(z)$, $\sinh(iz) = i\sin(z)$, $\cos(iz) = \cosh(z)$, $\cosh(iz) = \cos(z)$.
   (b) $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$, $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.
   (c) $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}\sin(x + iy) = \frac{1}{2}[\sin x + i\cos x]$.
   (d) $\lim\limits_{y\to\infty} \tan(x + iy) = i$.

8. Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:
$$\int_{[0,z_0]} \mathrm{Re}(z)dz, \quad \int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}, \quad \int_{|z|=1} \overline{z}^n dz$$

9. Pruebe que la función $z \to z\log(z)$ tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y calcule el valor de la integral
$$\int_{[0,i]} z\log(z)dz$$

10. Pruebe que
$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{z}{z^3+1}dz = 0, \quad \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,-R+i]}\frac{z^2\exp(z)}{z+1}dz = 0$$

11. Pruebe que
$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx\\ \int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^b e^{x^2}dx\end{aligned}$$
Ind.: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ en un contorno rectangular adecuado.

12. (a) Pruebe que para $b \in]-1,1[$ se tiene
$$\int_0^\infty \frac{1-b^2+x^2}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$
Indicación: Integre $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

    (b) Si además $b \neq 0$, pruebe que
$$\int_0^\infty \frac{x}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}dx = \frac{1}{4b}\ln\frac{1+b}{1-b}$$

13. Pruebe que
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{Im}(e^{-2ix}p(x+i))dx = 0$$
para cualquier polinomio $p(z)$ a coeficientes reales.
Indicación: Considere $f(z) = \exp(-z^2)p(z)$.

14. Pruebe que si $f \in H(D(z_0,R))$ entonces para todo $r \in]0,R[$ se tiene
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$
Deduzca que $\int_0^{2\pi}\log(1+re^{i\theta})d\theta = 0$ para $0 < r < 1$, y por lo tanto $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

15. (a) Transforme la integral $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta)d\theta$ en una de la forma $\int_{|z|=1} g(z)dz$ y muestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{(a^2-1)^{1/2}}, \quad a > 1.$

(b) Utilizando una transformación similar a (a), pruebe que:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1-2a\cos 2\theta + a^2} d\theta = \pi \frac{1-a+a^2}{1-a}, \quad 0 < a < 1.$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$ (Nota: $\exp(1/z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k!z^k), \forall z \neq 0$).

16. Pruebe que:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$, con $a > 0$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}$, donde $\lambda \in I\!R$ y $a > 0$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = -n\frac{\pi}{4}$, para $n = 0$ y $n = 1$ (considere ambos casos separadamente).

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a}), \quad a > 0$