Pauta P2 Control 1

11 de septiembre de 2007

(a) Parametrizamos la elipsoide con $\vec{r}(\theta,\phi) = (a\cos\theta\sin\phi, b\sin\theta\sin\phi, c\cos\phi)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0,\pi]$. Es muy importante notar que sólo importan las direcciones de los vectores y por lo tanto no es necesario normalizar. Sabemos que $\hat{n}$, es perpendicular a $\hat{t}_\theta$ y $\hat{t}_\phi$ que a su vez son paralelos a $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ y $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}$, respectivamente. Luego basta probar que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\cdot\vec{F} &= 0\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\cdot\vec{F} &= 0\end{aligned}$$

Entonces hay que calcular las derivadas parciales y escribir $\vec{F}$ con las coordenadas de nuestra parametrización.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \left(\frac{\cos\theta\sin\phi}{a}, \frac{\sin\theta\sin\phi}{b}, \frac{\cos\phi}{c}\right)\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} &= (-a\sin\theta\sin\phi, b\cos\theta\sin\phi, 0)\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} &= (a\cos\theta\cos\phi, b\sin\theta\cos\phi, -c\sin\phi)\end{aligned}$$

Felizmente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\cdot\vec{F} &= \cos^2\theta\cos\phi\sin\phi + \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi\\ &= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi\\ &= \cos\phi\sin\phi - \cos\phi\sin\phi\\ &= 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\cdot\vec{F} &= -\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Sea $\vec{x}_0$ un punto de la elipsoide. Entonces el plano tangente en el punto esta dado por

$$(\vec{x} - \vec{x}_0)\cdot\hat{n} = 0$$

Por **(a)** sabemos que $\hat{n}$ y $\vec{F}$ son paralelos, luego el plano también puede escribirse como

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{F} = 0 \tag{1}$$

La distancia del plano al origen es λ tal que $\lambda \hat{n}$ está en el plano (hagan un dibujo con una elipse y se van a convencer), es decir, $\lambda \hat{n}$ satisface (1), luego:

$$\begin{aligned} (\lambda \hat{n} - \vec{x}_0) \cdot \vec{F} &= 0 \\ \lambda \hat{n} \cdot \vec{F} &= 1 \\ \lambda &= \frac{1}{\hat{n} \cdot \vec{F}} \end{aligned}$$

Que es lo pedido.

(c) Como $\frac{1}{d} = \vec{F} \cdot \hat{n}$, vamos a ocupar el teorema de la divergencia. Claramente la elipsoide es una superficie cerrada y $\vec{F}$ es un campo de clase C^1. Además $\hat{n}$ es la normal exterior, luego

$$\begin{aligned} \int\int \frac{1}{d} dA &= \int\int \vec{F} \cdot \hat{n} dA \\ &= \int\int \vec{F} d\vec{S} \end{aligned}$$

En cartesianas, $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, entonces

$$\begin{aligned} \int\int \vec{F} d\vec{S} &= \int\int\int \nabla \cdot \vec{F} dV \\ &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \int\int\int dV \end{aligned}$$

La integral de volumen es sobre el volumen de la elipsoide que estaba dado como indicación y de ahí se concluye.