Trbajo Dirigido N°6: MA26B Matemáticas Aplicadas

Profesor: Felipe Álvarez
Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

03 de Septiembre de 2007

Problema 1:

(a) Verifique el teorema de Gauss para $\vec{F} = (x, y, z)$ sobre el volumen V limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$.

(b) Verifique el teorema de Stokes para $\vec{F} = \left(x^2, 2xy + x, z\right)$ sobre el disco S dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano $z = 0$

(c) Verdadero o falso (y porque).
Sea S un sólido en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{F} = \left(x^2 y + \sin z, \cos x - xy^2, 3xy + z\right)$. El volumen del sólido esta dado por

$$\int\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

considerando la normal exterior.

(d) Sea $a \in \mathbb{R}^3$ y S una superficie. Pruebe que

$$\int_{\partial S} (a \times \vec{r})\, d\vec{r} = 2 \int\int_S a \cdot dS$$

Problema 2:

(a) Calcule el flujo del campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(x + y), y + cos(x + y, \sqrt{x^2 + y^2} + 2z\sin(x + y)))$$

a traves de la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$ (excluyendo la tapa) orientada según la normal inferior (exterior a la esfera)

(b) Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con el casquete esferico de $x^2+y^2+z^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario (i.e. en sentido positivo con respecto al eje OZ). Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilindricas). Pruebe que $rot(\vec{F}) = 0$ en el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$. Calcule $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ¿Su resultado contradice el Teorema de Stokes? Explique

Problema 3.-

(a) Dado el campo vectorial

$$\vec{F} = \frac{k\hat{r}}{r^2} \text{ calcule } \int\int_S \vec{F} d\vec{S}$$

donde S es cualquier superficie que encierra el origen.

(b) Suponer que $\vec{F}$ satisface $div(\vec{F}) = 0$ y $rot(\vec{F}) = 0$. Mostrar que existe f tal que $\vec{F} = \nabla\vec{f}$, donde $\nabla^2 f = 0$

Problemas Propuestos

Problema 1:

(i) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2, 6abxz^3 - 10bx^4y, 18abxyz^2)$. Pruebe que es conservativo y determine el potencial asociado.

(ii) (a) Dados ϕ y $\vec{F}$ de clase $\mathcal{C}^1$, pruebe que $rot(\phi\vec{F}) = \phi\, rot(\vec{F}) + \nabla\phi \times \vec{F}$

(b) Probar que dada una curva simple, cerrada y regula por trozos Γ que es frontera de una superficie S , si $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$ respectivamente, entonces

$$\int_\Gamma f\nabla g \cdot d\vec{r} = \int\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dA$$

con Γ y S orientadas apropiadamente.

Problema 2.- Sea S una superficie y $\vec{F}$ un campo vectorial tal que $\nabla \times \vec{F}$ es tangente a S en cualquier punto de S. Pruebe que

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot dr = 0$$

Problema 3.- Sea $\vec{F} = \big(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\big)$

1. Pruebe que $\nabla \times \vec{F} = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$
2. Elija una curva γ cualquiera que una $A = (3, -1, 2)$ con $B = (2, 1, -1)$ y evalúe $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$
3. Ahora una A y B con una curva $\gamma' \neq \gamma$. Cuanto vale $\int_{\gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Problema 4.- Sean $S_1,\ S_2$ dos superficies con el mismo borde. Con un dibujo muestre como deben estar orientadas de modo que

$$\int_{S_1} \left(\nabla \times \vec{F}\right) d\vec{S} = \int_{S_2} \left(\nabla \times \vec{F}\right) d\vec{S}$$