

CONTROL 1: MA26B Matemáticas Aplicadas 2006

Problema 1.

- (a) Dados $a, b, c > 0$ tales que $c^2 = a^2 + b^2$, sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por $\vec{r}: [0, 2\pi c] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\vec{r}(s) = a \cos\left(\frac{s}{c}\right)\hat{i} + a \sin\left(\frac{s}{c}\right)\hat{j} + b\left(\frac{s}{c}\right)\hat{k}.$$

- (a.1) (1.5 pts.) Muestre que el parámetro s es la longitud de arco sobre C . Calcule el triedro de Frenet: vectores tangente, normal y binormal a la curva. Pruebe que las rectas tangentes a C forman un ángulo constante con el vector unitario $\hat{k}$.
- (a.2) (1.5 pts.) Pruebe que las rectas normales principales (i.e. aquellas que pasan por $\vec{r}(s)$ y tienen como dirección al vector normal $N(s)$) cortan el eje z en un ángulo constante igual a $\pi/2$. Calcule la curvatura $\kappa = \kappa(s)$ y la torsión $\tau = \tau(s)$ de C , y verifique que $\kappa/\tau = a/b$.
Indicación: Puede utilizar la siguiente fórmula válida para la parametrización en longitud de arco: $\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)^2} [\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)] \cdot \vec{r}'''(s)$.
- (b) Sea $\vec{\sigma}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L]$, $\kappa(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$. Diremos que Γ es una *hélice* si existe una dirección fija $\hat{d}_0$ tal que todas las rectas tangentes a Γ forman un ángulo constante con $\hat{d}_0$. De esta forma, la curva C de la parte (a) es un caso particular de una hélice con $\hat{d}_0 = \hat{k}$.
- (b.1) (1.5 pts.) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si las rectas normales principales son paralelas a un plano fijo.
- (b.2) (1.5 pts.) Pruebe que Γ es una hélice si y sólo si $\kappa/\tau \equiv cte$.

Problema 2.

Considere la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esférico unitario que están por encima del plano $z = 2y$. Es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 2y\}$.

- (a) (1.5 pts.) Bosqueje S y encuentre una parametrización regular de esta superficie.
- (b) (1.5 pts.) Parametrice el borde geométrico ∂S de S , y las siguientes rectas tangentes a ∂S : la que pasa por el punto $(1, 0, 0)$, y la que pasa por el punto $(-1, 0, 0)$.
- (c) (3.0 pts.) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2 + z^2)\hat{i} + (e^{-x^2} - 2)\hat{j} + (2e^{-x^2} + 1)\hat{k}$$

sobre la superficie S orientada con la normal exterior a la esfera.

Problema 3.

- (a) (2.0 pts.) Sea $\vec{r}$ el campo vectorial dado por $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Dada una superficie regular S y un vector fijo $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, demuestre que

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\partial S} (\vec{v}_0 \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S \text{ es una superficie cerrada} \end{cases}$$

donde S y ∂S tienen orientaciones compatibles (explique).

- (b) Considere la superficie S correspondiente a la sección del paraboloide de ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$ que queda dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.
- (b.1) (1.5 pts.) Bosqueje S . Encuentre una parametrización para S en coordenadas cilíndricas.
- (b.2) (1.5 pts.) Calcule el vector normal unitario a S y el elemento de superficie.
- (b.3) (1.0 pts.) Calcule la masa total de S suponiendo densidad superficial de masa

$$f(x, y, z) = 1/\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$