Clase Auxiliar: MA26B Matemáticas Aplicadas

Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

17 de Agosto de 2007

Definición Sean S una superficie orientada según el campo de normales $\hat{n}: S \to \mathbb{R}^3$, y $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Definimos la integral de flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S como

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

si $\vec{r}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S tal que

$$\hat{n} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) / \left(\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \|\right)$$

entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\left(\vec{r}\left(u,v\right)\right) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right] dudv$$

Coordenadas Toroidales. Dado un radio mayor R fijo, la posición de un punto $\vec{P}$ queda determinada por un radio menor r y dos ángulos θ y φ como muestra la figura.

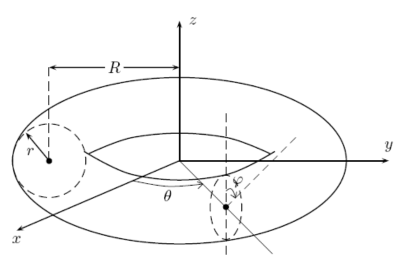

Figura 1: Coordenadas Toroidales.

El vector posición viene dado por:

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = ((R + r\sin\varphi)\cos\theta, (R + r\sin\varphi)\sin\theta, r\cos\varphi), \qquad r \in [0,R], \quad \theta \in [0,2\pi), \quad \varphi \in [0,\pi]$$

Los vectores unitarios son:

$$\hat{r} = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$
$$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\hat{\varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$$

Los factores escalares son:

$$h_r = 1 \quad h_\theta = (R + r\sin\varphi) \quad h_\varphi = r$$

Problema 1. Dado el campo vectorial

$$\vec{F}_1(x,y,z) = (0,0,z)$$

1. Sea Σ la superficie del toro de eje de simetría z, centrado en el origen y de radios R_0 y $r_0(R_0 > r_0)$. Calcule $I_1 = \int\int_\Sigma \vec{F}_1 d\vec{S}$ orientado según la normal exterior.

2. Dado un campo vectorial $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ se define la divergencia de $\vec{F}$ como

$$div\left(\vec{F}\right) := \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

   sea V el volumen encerrado por Σ, calcule $I_2 = \int\int\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV$. ¿Qué puede decir de I_1 e I_2?.

Problema 2. Sea S la superficie de la esfera unitaria. Sean $\vec{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_r \sin(\phi)\, d\phi d\theta$$

Problema 3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $S_1 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\right\}$, y su base $S_2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = 0\right\}$. Sea el campo eléctrico definido por

$$\vec{E}(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

1. Evaluar $I_1 = \int\int_{S_1} \vec{E}d\vec{S} + \int\int_{S_2} \vec{E}d\vec{S}$ orientado según la normal exterior.

2. Sea V el volumen encerrado por S, calcule $I_2 = \int\int\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV$. ¿Qué puede decir de I_1 e I_2?.

Propuesto 1. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unitaria S en dos regiones S_1 y S_2, donde S_1 esta dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.

Propuesto 2. Hallar la masa M de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x,y,z) a algún punto fijo $(x_0,y_0,z_0) \in S$.

Propuesto 3. Sea S la superficie definida por $z = x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ donde ϕ es una función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie S pasan por el origen de los ejes los ejes coordenadas.