Clase Auxiliar: MA26B Matemáticas Aplicadas

Profesor: Felipe Álvarez
Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

27 de Agosto de 2007

Problema 1. Calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = \left(yz, e^{\sin(xz)} + \tan z, y^2\right)$ a través de la parte superior del semielipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Problema 2. Considere la superficie Σ correspondiente a la mitad inferior del toro de radios R y a según se muestra en la figura

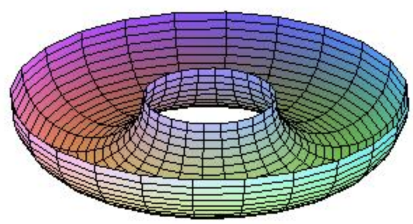

Figura 1: Superficie Σ: Mitad Toro

(i) Determinar el centro de masa de Σ, suponiendo densidad constante. Puede ocupar argumentos de simetría debidamente explicados.

(ii) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j}$ a través de Σ, orientado según la normal superior.

Problema 3. Dados el campo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y la función $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ambos de clase $\mathcal{C}^1$, pruebe que

$$div\,(gF) = \nabla g + g div\,(F)$$

Muestre entonces que para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera $\partial\Omega$ regular por trozos y orientada según la normal exterior $\vec{n}$ y para todo par de funciones f y g de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$, se tiene la identidad de Green:

$$\int\int\int_\Omega (g \triangle f + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV = \int\int_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS$$

donde $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$ es la derivada normal de f

Hint: Use el Teorema de Gauss para un campo adecuado.