Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 16 de Octubre de 2003.

Profs.: Salomón Alarcón y Felipe Alvarez.
Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 2: MA26B-01 Matemáticas Aplicadas 2003

Problema 1.

(a) [3.0 pts.] Calcular el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(x + y), y + \cos(x + y), \sqrt{x^2 + y^2} + 2z \operatorname{sen}(x + y)),$$

a través de la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \leq 0$, (excluyendo la tapa) orientada según la normal inferior (exterior a la esfera).

(b) [3.0 pts.] Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario (i.e. en sentido positivo con respecto al eje OZ). Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{\text{k}}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ en el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$. Calcule $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$. ¿Su resultado contradice el teorema de Stokes? Explique.

Problema 2.

(a) [2.0 ptos.] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, ambos de clase C^1. Pruebe que $\text{rot}(g\,\vec{F}) = g\,\text{rot}(\vec{F}) + \nabla g \times \vec{F}$. Deduzca que si $S \cup \partial S \subset \Omega$, donde S es una superfice regular a trozos, entonces se tiene la fórmula de integración por partes

$$\iint_S g\ \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} g\,\vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

siempre que las orientaciones de S y ∂S sean las adecuadas (explique).

(b) [2.0 ptos.] Utilice el teorema de Green en el plano para calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$. Ind.: considere la curva plana parametrizada por $x = 8\cos^3\theta$ y $y = 8\operatorname{sen}^3\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(c) [2.0 ptos.] Sea $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, $z = x + iy$, una función holomorfa en $\mathbb{C}$ para la cual existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $v(x, y) = a\,u(x, y) + b$. Pruebe que f es constante.

Problema 3. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

(a) [1.0 ptos.] Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(b) [1.5 ptos.] Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico $r = a$ ($a > 0$) orientado según la normal exterior.

(c) [1.5 ptos.] Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ (recuerde que $\Delta u = \text{div}\,\nabla u$).

(d) [2.0 ptos.] Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_\Omega U dV.$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.