Ejercicio 1

13 de agosto de 2007

Problema 1. Sea $\vec{\sigma}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Denotamos por $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ los vectores tangente, normal y binormal respectivamente. Sea $\kappa(t)$ la curvatura y $\tau(t)$ la torsión. Suponga que la curva es plana y que $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$.
La evoluta Γ' de Γ se define como la curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \frac{N(t)}{\kappa(t)}$$

1. $(3,5$ pts$)$ Suponga que $\kappa'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$. Pruebe que la evoluta es una curva regular y que el vector tangente a la evoluta en t es paralelo a $N(t)$.
   Indicación: Si lo prefiere, puede suponer que Γ esta parametrizada en longitud de arco.
2. $(2,5$ pts$)$ Ahora, sea Γ una espiral logarítmica de parametrización:

   $$\vec{\sigma}(t) = \left(ae^t \cos(t), ae^t \sin(t)\right) \quad t \in \mathbb{R}$$

   donde a es una constante positiva. Calcule la evoluta Γ' de la espiral logarítmica Γ.
   ¿Qué puede decir sobre Γ'?

Problema 2. Considere la superficie S que se obtiene de intersectar la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con el volumen dado por $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$, donde $a > 0$.

1. $(1,5$ pts$)$ Encuentre una parametrización de S.
2. $(2$ pts$)$ Calcule el área de S.
3. $(1$ pt$)$ Considere ahora la curva Γ que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, donde $a > 0$. Encuentre una parametrización para Γ.
4. $(1,5$ pts$)$ Suponga ahora que Γ es un alambre con densidad de masa $\rho(x,y,z) = \frac{2a}{\sqrt{8a^2-x^2-y^2}}$.
   Calcule la masa del alambre.