Ejercicio 1.

13 de agosto de 2007

Problema 1. Sea $\vec{\sigma}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Denotamos por $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ los vectores tangente, normal y binormal respectivamente. Sea $\kappa(t)$ la curvatura y $\tau(t)$ la torsión.

Suponga que la curva es plana y que $\kappa(t) \neq 0$ para todo t. La evoluta Γ' de Γ se define como la curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + 1/\kappa(t)\, N(t)\,. \tag{1}$$

1. Suponga que $\kappa'(t) \neq 0$. Pruebe que la evoluta es una curva regular y que el vector tangente a la evoluta en t es paralelo a $N(t)$. Ind: puede suponer que Γ esta parametrizada en longitud de arco.

2. Suponga ahora que Γ es una espiral logarítmica de parametrización:

   $$\vec{\sigma}(t) = (a\exp(t)\cos(t)\,, a\exp(t)\sin(t)\,, 0) \quad t \in \mathbb{R}$$

   donde a es una constante positiva.
   Calcule la evoluta Γ' de la espiral logarítmica Γ. ¿qué puede decir sobre Γ'?.

Solución.

1. Supongamos que Γ esta parametrizada en longitud de arco, luego derivando (1)

   $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} + \left(\frac{1}{\kappa(t)}\right)' N(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\frac{dN(t)}{dt} \tag{2}$$

   usando que

   $$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = T(t)$$
   $$\frac{dN(t)}{dt} = -\kappa(t)\,T(t) + \tau(t)\,B(t)$$

   reemplazando en (2) y asumiendo que la curva es plana (torsión nula)

   $$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)} N(t) \tag{3}$$

   así

   $$\|\frac{d\vec{r}}{dt}\| = \frac{|\kappa'(t)|}{\kappa^2(t)}$$

y por hipótesis κ y κ' no nulas, luego

$$\|\frac{d\vec{r}}{dt}\| > 0$$

es decir la evoluta Γ' es regular. Además de (3) se tiene que el vector tangente de Γ' es paralelo al vector normal de Γ.

2. Calculemos la curvatura y el vector normal.

$$\vec{\sigma}\,(t) = ae^t \hat{\rho}$$

luego

$$\frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} = ae^t \hat{\rho} + ae^t \hat{\theta}$$
$$\|\vec{\sigma'}\,(t)\,\| = ae^t\sqrt{2}$$

así

$$T\,(t) = \frac{\hat{\rho} + \hat{\theta}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{dT\,(t)}{dt} = \frac{\hat{\theta} - \hat{\rho}}{\sqrt{2}}$$

y

$$\|\tfrac{dT(t)}{dt}\| = 1 \quad \Rightarrow \quad N\,(t) = \tfrac{\hat{\theta} - \hat{\rho}}{\sqrt{2}}$$

$$\kappa\,(t) = \|\frac{dT\,(t)}{dt}\|/\|\vec{\sigma'}\,(t)\,\| = \frac{1}{ae^t\sqrt{2}}$$

finalmente

$$\vec{r}\,(t) = ae^t \vec{\rho} + ae^t \left(\vec{\theta} - \vec{\rho}\right) = ae^t \vec{\theta}$$

Por lo tanto la evoluta de una espiral logarítmica es también una espiral logarítmica, de hecho es la misma espiral logarítmica rotada en 90° en el sentido antihorario.
Tomando $a = \frac{1}{10000}$ se obtienen los siguientes gráficos:

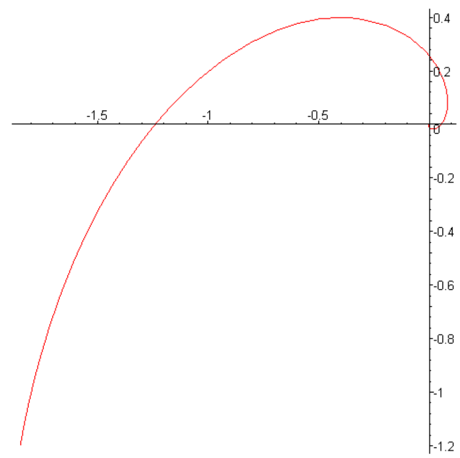

Figura 1: Espiral Logarítmica.

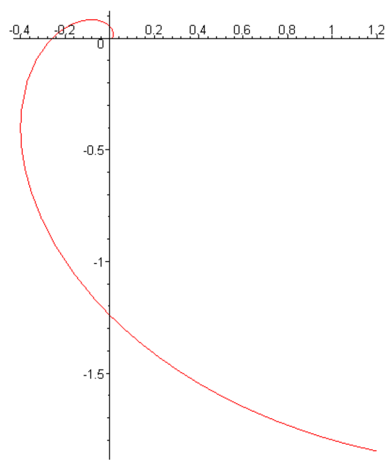

Figura 2: Evoluta de una espiral logarítmica.

Problema 2. Considere la superficie S que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$ donde $a > 0$.

1. Encuentre una parametrización de S.
2. Calcule el área de S.
3. Considere ahora la curva Γ que se obtiene como la intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ donde $a > 0$. Encuentre una parametrización para Γ.
4. Suponga ahora que Γ es un alambre con densidad de masa $\rho(x, y, z) = \frac{2a}{\sqrt{8a^2 - x^2 - y^2}}$, calcule la masa del alambre.

Solución.

1. Tomando coordenadas cilíndricas:
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\theta) \\ y &= \rho\sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned}$$
se tiene que
$$\begin{aligned} z &= \rho \\ \rho^2 - 2a\rho\sin(\theta) &\leq 0 \end{aligned}$$
descartamos el caso $\rho = 0$, luego una parametrización de S estará dada por:
$$\vec{r}(\rho,\theta) = \rho\left(\hat{p} + \hat{k}\right) \quad \theta \in [0,\pi] \quad \rho \in [0, 2a\sin(\theta)]$$

2. El área se calcula como:
$$A = \int\int_S dS$$
calculamos
$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} &= \vec{\rho} + \vec{\theta} \\ \tfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} &= \rho\vec{\theta} \end{aligned}$$
luego
$$\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\| \quad = \quad \|\rho\vec{k} - \rho\vec{\rho}\| = \rho\sqrt{2}$$
por lo tanto
$$A = \int_0^\pi \int_0^{2a\sin(\theta)} \rho\sqrt{2}d\rho d\theta = 2\sqrt{2}a^2 \int_0^\pi \sin^2(\theta)\,d\theta = \sqrt{2}a^2\pi$$

3. usando la parte (1)
$$\begin{aligned} z &= \rho \\ \rho &= 2a\sin(\theta) \end{aligned}$$
luego una parametrización de Γ sera:
$$\vec{r}(\theta) = 2a\sin(\theta)\left(\vec{\rho} + \vec{k}\right) \quad \theta \in [0,\pi]$$

4. La masa del alambre es:
$$M = \int_\Gamma \rho dl = \int_0^\pi \rho\left(\vec{r}(\theta)\right)\|\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}\|d\theta$$
pero
$$\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} = 2a\cos(\theta)\left(\hat{p} + \hat{\theta}\right) + 2a\sin(\theta)\,\hat{\theta}$$

luego

$$\|\frac{d\vec{r}\,(\theta)}{d\theta}\| = 2a\sqrt{1+\cos^2(\theta)}$$

y

$$\rho\,(\vec{r}\,(\theta)) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(\theta)}}$$

luego

$$M = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(\theta)}} 2a\sqrt{1+\cos^2(\theta)}d\theta = 2a\pi.$$

Tomando $a = 1$. se obtienen los siguientes gráficos:

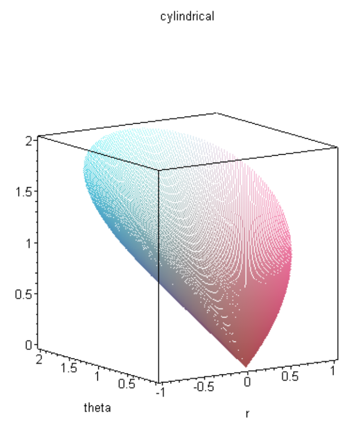

Figura 3: Superficie S.

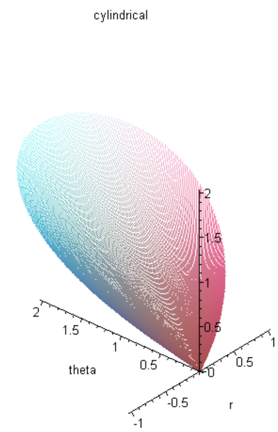

Figura 4: Superficie S.

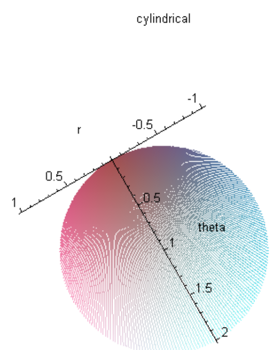

Figura 5: Vista superior de la superficie S.

Notar que la curva Γcorresponde al borde geométrico de la superficie S.