Trabajo Dirigido N°2: MA26B Matemáticas Aplicadas

Profesor: Felipe Álvarez
Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

6 de Agosto de 2007

Definición 1 Sea Γ una curva una curva simple y regular, y $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Definimos la **función longitud de arco** $s\colon [a,b] \to [0, L(\Gamma)]$ como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(\tau) \right\| d\tau$$

Notar que $s(t) > 0$.

Definición 2 Se define la **curvatura** de la curva Γ mediante:

$$\kappa(t) = \frac{\left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\|}{\frac{ds}{dt}(t)}$$

Cuando $\kappa(t) > 0$ definimos el **radio de curvatura** y el **vector normal**, respectivamente como:

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \qquad \text{y} \qquad N(t) = \frac{\frac{dT}{dt}(t)}{\left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\|}$$

Definición 3 Se define el vector **binormal** B mediante:

$$B = T \times N$$

Definición 4 Definimos la **torsión** asociada a la curva como

$$\tau(t) = -N(t) \cdot \left(\frac{\frac{dB}{dt}(t)}{\frac{ds}{dt}(t)} \right)$$

Problema 1 Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}, \quad h > 0$$

de formar tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= z \\ z(0) &= h \end{aligned}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

1. Bosqueje la curva y encuentre una parametrización para Γ.
2. Encuentre la función longitud de arco $s(t)$ y la parametrización en longitud de arco de Γ.
3. Calcule la rapidez, el vector velocidad, tangente, normal y binormal.
4. Calcule la curvatura y la torsión.

5. Verifique que se cumple
$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$
donde κ es la curvatura y τ es la torsión.

Problema 2 Calcular el elemento de volumen en coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ) que se relacionan con las coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \epsilon\eta\cos\phi \\ y &= \epsilon\eta sin\phi \\ z &= \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \epsilon^2\right) \end{aligned}$$

Identifique geométricamente las nuevas coordenadas y justifique el nombre.

Problema 3 Calcule el gradiente de

$$f\left(x,y,z\right) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2+y^2+z^2}$$

Problema 4 Sea $\vec{\gamma}(t) : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización (no necesariamente en longitud de Arco) de la curva regular Γ. Demuestre que la curvatura y la torsión están dadas por las siguientes fórmulas:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|}{\|\vec{\gamma}'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{[\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)] \cdot \vec{\gamma}'''(t)}{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|^2}$$