Viviani

5 de agosto de 2007

Voy a ocupar cilíndricas. El ángulo θ será el mismo que aparece en la foto (gentileza de wikipedia).

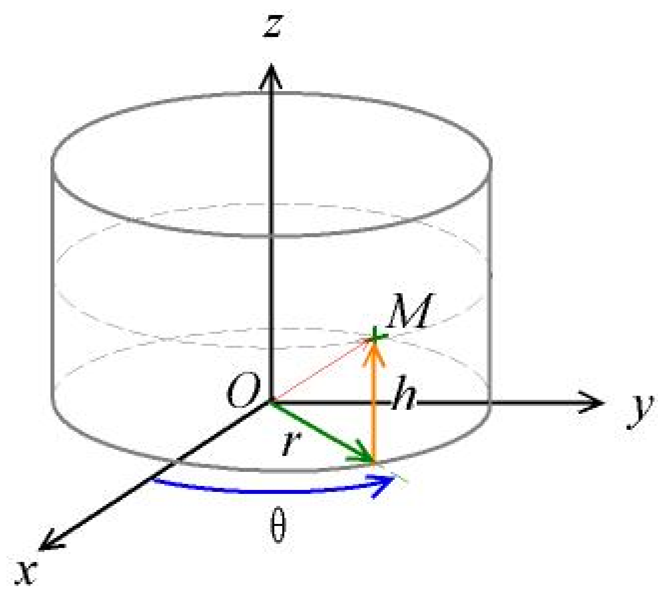

Figura 1: Cilíndricas

Voy a considerar también que el cilindro tiene centro en $\left(0, \frac{R}{2}, 0\right)$. Como el cilindro esta en el semiplano xy con $y > 0$, entonces sólo nos van a servir los $\theta \in [0, \pi]$.

Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 &= \frac{R^2}{4} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio a cilíndricas, ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$) la primera ecuación queda:

$$\rho^2 + z^2 = R^2 \tag{1}$$

Para la segunda, desarrollamos un poco, obteniendo, $x^2 + y^2 = Ry$, entonces en cilíndricas:

$$\rho^2 = R\rho \sin\theta$$

Supongamos que $\rho \neq 0$ (cuando $\rho = 0$, $z = \pm R$), entonces

$$\rho = R\sin\theta$$

Nótese que como $\theta \in [0, \pi]$, $\rho = R\sin\theta > 0$. Reemplazando en (1) queda:

$$z^2 = R^2 \left(1 - \sin^2\theta\right) \implies z = \pm R\cos\theta$$

Antes sacamos el caso $\rho = 0$, pero vemos que cuando $\theta = 0$ se recupera el caso que habíamos sacado.

Entonces tenemos

$$\vec{r}\,(\theta) = \begin{cases} R\sin\theta\hat{\rho} + R\cos\theta\hat{k} & \theta \in [0, \pi] \\ R\sin\theta\hat{\rho} - R\cos\theta\hat{k} & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

Pero aquí tenemos el problema de, por ejemplo, $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en cual lo evalúo. Para resolver este detalle, voy a hacer un cambio de variable en $\vec{f}\,(\theta) = R\sin\theta\hat{\rho} - R\cos\theta\hat{k}$. Sea $\alpha = \theta + \pi$, esto es para que me quede entre $[\pi, 2\pi]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{f}\,(\alpha) &= -R\sin\alpha\,(-\hat{\rho}) + R\cos\alpha\hat{k} \\ &= R\sin\alpha\hat{\rho} + R\cos\alpha\hat{k} \end{aligned}$$

Es lo mismo que la primera parte del $\vec{r}\,(\theta)$, entonces la parametrización es:

$$\vec{r}\,(\theta) = R\sin\theta\hat{\rho} + R\cos\theta\hat{k}, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Nótese que esto no es cilíndricas, porque el $\rho\,(\theta) = R\sin\theta$ no siempre es positivo.

Les pongo una foto de la curva para que se imaginen como se va recorriendo a medida que el θcrece (noten que cuando el $\theta > \pi$, el $\rho\,(\theta)$ es negativo, por eso apunta para el otro lado).

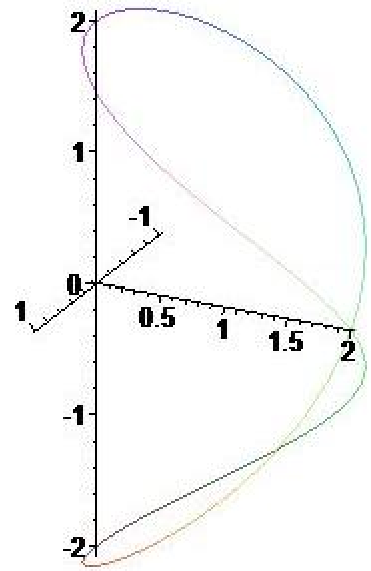

Figura 2: La curva de Viviani