

Trabajo Dirigido 1.

30 de julio de 2007

- Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que $z = z(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d^2 \theta} = z$$
$$z(0) = 1 \quad , \quad \frac{dz}{d\theta}(0) = 0$$

donde (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas.

- (a) Encuentre una parametrización de la curva γ descrita por la partícula (use a θ como parámetro)
- (b) Calcule la longitud de γ si $\theta \in [0, 2\pi)$.

Solución.

resolvemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d^2 \theta} = z \tag{1}$$

con polinomio característico

$$\lambda^2 = 1$$

entonces

$$\lambda = \pm 1$$

así

$$z(\theta) = Ae^{\theta} + Be^{-\theta}$$

imponiendo condiciones de borde

$$\begin{aligned} z(0) = 1 &\Rightarrow A + B = 1 \\ \frac{dz}{d\theta}(0) = 0 &\Rightarrow A - B = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$z(\theta) = \frac{1}{2} (e^{\theta} + e^{-\theta}) = \cosh(\theta)$$

por otra parte, la parametrización del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} x &= \cos(\theta) \\ y &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

por lo que una parametrización de la trayectoria que realiza la partícula (γ) estará dada por:

$$\vec{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \cosh(\theta)) \quad \theta \in [0, \infty)$$

(b) por definición el largo de γ (si $\theta \in [0, 2\pi]$ es

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d\vec{r}}{du}(u) \right\| du$$

calculamos $\frac{d\vec{r}}{du}(u)$:

$$\frac{d\vec{r}}{du}(u) = (-\sin(u), \cos(u), \sinh(u))$$

luego

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{du}(u) \right\| = \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2 + (\sinh(u))^2} = \sqrt{1 + \sinh^2(u)}$$

usando la identidad $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{du}(u) \right\| = \cosh(u)$$

luego

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \cosh(u) du = \sinh(2\pi)$$