Trabajo Dirigido Nº1: MA26B Matematicas Aplicadas

Profesor: Felipe Álvarez
Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

30 de Agosto de 2007

Definición: *(Curva)* Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ se llamara Curva si existe una función continua $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ llamada parametrización de la curva, tal que

$$\Gamma = \{\vec{\sigma}(t) : t \in [a, b]\}$$

Luego diremos que la curva Γ es :

1. *Suave*: si admite una parametrización de clase C^1
2. *Regular* : si admite una parametrización suave $\vec{\sigma}$ tal que $\|\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t)\| > 0$, para todo $t \in I$
3. *Simple*: Si admite una parametrización inyectiva (i.e. no hay puntos multiples)

Definición: *(Largo)* Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{\sigma}[a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Definimos el largo de la curva $L(\Gamma)$ como

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\frac{d\vec{\sigma}}{du}(u)\| du$$

Definición: *(Vector Tangente)* $\hat{T} = \dfrac{\vec{\sigma'}(t)}{\|\vec{\sigma'}(t)\|}$

Problema 1.- Una particula se mueve sobre el manto de un cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que $z = z(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

$$z(0) = 1 \ , \ \frac{dz}{d\theta}(0) = 0$$

donde (ρ, θ, z) son las coordenadass cilindricas

i) Encuentre una parametrización de la curva γ descrita por la particula

ii) Calcule la longitud de γ si $\theta \in [0, 2\pi]$

Problema 2.- Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la esfera unitaria.

i) Dibuje la curva Γ.

ii) Encuentra una parametrización para la curva Γ.

iii) Verifique la regularidad. Encuentre la Velocidad y el Vector Tangente de la parametrización.

Problema 3.-(*Cardioide*)
Considere la curva plana Γ descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1 - \cos(\theta)) \ \ a > 0, \ \theta \in [0, 2\pi]$$

i) Encuentre una parametrización para Γ. Grafique esta parametrización y encuentre sus posibles irregularidades.

ii) Calcule el largo de Γ

Problema 4.- Parametrizar las siguientes curvas:

1. Una recta gira en torno al punto O con una velocidad angular w barriendo un plano. El punto P se mueve por la recta con una velocidad proporcional a la distancia $|\overrightarrow{OP}|$. Encontrar la ecuación de la linea descrita por el punto P (*espiral logarítmica*).

2. Una recta, no perpendicular al eje $\hat{z}$, gira uniformemente en torno al origen O con velocidad angular w. El punto P se mueve por la recta con velocidad constante.(*hélice cónica*).

3. Una recta, no perpendicular al eje $\hat{z}$, gira uniformemente en torno al origen O con velocidad angular w. El punto P se mueve por la recta con velocidad proporcional a la distancia $|\overrightarrow{OP}|$. (*espiral cónica).*

Problemas Propuestos

Problema 1.-Encuentre una parametrización para cada una de las siguientes curvas:

1. El cuadrado $|x| + |y| = 1$.
2. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
4. El triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.
5. La lenteja formada por las ecuaciones $x = y^2$; $y = x^2$;$x, y \geq 0$, recorrida en sentido anti-horario.
6. una partícula que se mueve sobre el manto del paraboloide invertido de ecuación $x^2 + y^2 = -z$ de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta) = -e^{-2\theta}$, $\theta \geq 0$.

Problema 2.-Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente: el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(A, 0)$ y $(-A, 0)$ es constante e igual a $B > 0$.(Lemniscata).

Problema 3.- Hallar la longitud de arco de la primera vuelta de la espiral de Arquímedes definida en polares por la ecuación $r = a\theta$.

Problema 4.- Un punto P se mueve a lo largo de la generatriz de un cilindro circular con velocidad proporcional al camino recorrido. A su vez el cilindro gira en torno a su eje con velocidad angular constante. Hallar las ecuaciones perimétricas de la trayectoria de P.

Problema 5.- La curva de Viviani es la intersección de la esfera de radio R con el cilindro circular de radio $\frac{R}{2}$ cuya generatriz pasa por el centro de la esfera. Estudiar dicha curva.

Problema 6.- Los ejes de dos cilindros circulares de radios a y b se cortan en ángulo recto. Hallar ecuaciones perimétricas para la curva intersección (bicilíndrica). ¿Qué ocurre cuando $a = b$?.