Notas sobre Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDP's)

Curso 2004, Responsable: José L. Vieitez

1 de diciembre de 2004

Resumen

Breves apuntes para el curso de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Ingeniería sobre el tema Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's).
Noviembre de 2004.

1 Introducción.

Estos apuntes **no** sustituyen a un libro sobre el tema (ver bibliografía al final). Son apuntes mínimos. En esta versión no discutiremos nada más que sobre la clasificación de EDP's lineales de orden 2, y la solución de EDP's por el método de separación de variables, más una demostración de la unicidad de las soluciones para la ecuación del calor.

Definición 1.0.1. *Se llama ecuación en derivadas parciales de segundo orden con variables independientes* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *a una relación entre una función incógnita* $u(x, t)$ *y sus derivadas parciales hasta de segundo orden inclusive:*

$$F(x, t, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_t, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_1 t}, u_{tt}) = 0\,.$$

Una función $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es solución de la ecuación* F *en* Ω*, un abierto de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, si para todo punto* $(x, t) \in \Omega$ *se cumple*

$$F(x, t, \varphi(x, t), \varphi_{x_1}(x, t), \ldots, \varphi_{tt}(x, t)) = 0\,.$$

Es necesario advertir que **no** siempre existe solución, aún en el caso de que F sea de clase C^∞. La situación es entonces bien diferente del caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's).

En cambio **sí** existe un teorema de existencia y unicidad de las soluciones de una EDP's en que F es analítica en todas las variables. Más abajo enunciamos esto más en detalle para el caso particular de dos variables escalares x, t.

Para dos variables independientes $x, t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}) = 0\,,$$

La ecuación se llama lineal *con respecto a las derivadas de mayor orden* si tiene la forma

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}) = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_2 u_{tt} + G(x, t, u, u_x, u_t) = 0$$

en donde $a_{i,j} = a_{i,j}(x, t)$ no depende nada más que de las variables independientes (x, t).
La definición con un mayor número de variables es análoga. En lo anterior estamos denotando u_t a la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial t}$ y u_{xt} es la notación para $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, etc. Recordemos que bajo condiciones generales que asumimos válidas aquí, se cumple que $u_{tx} = u_{xt}$.

Ejemplo de EDP: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u_{xt} = 0$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que $u = u(x, t)$ es solución. Entonces la derivada u_t de u respecto a t solo dependerá de t, o dicho de otro modo, será una función $u_t = f(x, t)$ cuya derivada respecto de x es nula, de donde no puede depender de x y queda $u_t(x, t) = f(x, t) = g(t)$. Integrando respecto a t se obtiene $u(x, t) = \int g(t)dt + h_2(x) = h_1(t) + h_2(x)$, donde $h_2(x)$ es la constante de integración *respecto*a t. En definitiva la solución es $u(x, t) = h_1(t) + h_2(x)$, donde $h_1(t), h_2(x)$, son funciones en una variable derivables dos veces.

Una función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (o $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) se dice analítica (analítica real) en el origen si puede expresarse por medio de una serie de potencias en las variables $(x_1, \ldots, x_n)$ complejas (o reales en el caso analítico real). Su expresión va a ser

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0} A_{i_1, \ldots, i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}\,,$$

donde para cada n-upla de índices $i_1, \ldots i_n$, $A_{i_1, \ldots, i_n}$ es un número complejo (real en el caso analítico real).

Teorema 1.0.1. (Sofia Kovalevskaia también escrita Sonya Kovlevsky en algunas traducciones)
Consideremos la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{r} u_{tt} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array} \right. \tag{1}$$

donde F, ϕ y ψ se suponen analíticas en **todas** *sus variables en un entorno del origen de coordenadas. Entonces existe una única solución de la ecuación (1) en un entorno del origen.*

La demostración de este teorema escapa del alcance de estas notas.

2 Clasificación de EDP's de segundo orden

Consideremos la EDP lineal en las variables de orden 2

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + G(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

y hagamos un cambio de variables $\tau = \phi(x,t),\ \xi = \psi(x,t)$.
Nos preguntamos, ¿cuál es el cambio de variables más adecuado para que la expresión de la EDP en las nuevas coordenadas sea lo más simple posible?

Por ejemplo, dada la ecuación diferencial (ecuación de la cuerda vibrante)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

hagamos el cambio $\tau = x + at$, $\xi = x - at$.
Entonces (regla de la cadena)

$$u_t = u_\tau \tau_t + u_\xi \xi_t = u_\tau a + u_\xi(-a) = a(u_\tau - u_\xi)$$

$$u_{tt} = a(u_{\tau\tau}\tau_t + u_{\tau\xi}\xi_t - u_{\xi\tau}\tau_t - u_{\xi\xi}\xi_t) = a^2(u_{\tau\tau} - 2u_{\tau\xi} + u_{\xi\xi})$$

Del mismo modo

$$u_x = u_\tau \tau_x + u_\xi \xi_x = u_\tau + u_\xi$$

$$u_{xx} = u_{\tau\tau} + 2u_{\tau\xi} + u_{\xi\xi}$$

Sustituyendo en $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ queda, después de simplificar, $u_{\tau\xi} = 0$ ecuación que ya resolvimos más arriba y cuya solución se expresa: $u(\xi,\tau) = f(\xi) + g(\tau)$. Cambiando por las variables originales obtenemos que

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)\,.$$

Esta es la solución de la ecuación de la cuerda vibrante por el método de D'Alembert (método de la propagación de ondas).

O sea, eligiendo el cambio de coordenadas adecuado se obtiene, en este caso, la solución de un modo sencillo.

Dado entonces $\tau = \phi(x,t),\ \xi = \psi(x,t)$, donde

$$(\tau,\xi) = (\phi(x,t), \psi(x,t))$$

es un cambio de coordenadas de clase C^r con $r \geq 2$ (esto es: derivadas parciales continuas hasta de orden r que es invertible con inversa de clase C^r) calculamos las derivadas parciales en el caso general

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + G(x,t,u,u_x,u_t) = 0 \tag{2}$$

obteniendo

$$\begin{gathered} u_x = u_\tau \tau_x + u_\xi \xi_x; \quad u_t = u_\tau \tau_t + u_\xi \xi_t = \\ = u_\tau \phi_x + u_\xi \psi_x; \quad u_t = u_\tau \phi_t + u_\xi \psi_t\,. \end{gathered}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{\tau\tau}(\phi_x)^2 + 2u_{\tau\xi}\phi_x\psi_x + u_{\xi\xi}(\psi_x)^2 + u_\tau\phi_{xx} + u_\xi\psi_{xx}$$

$$u_{tt} = \frac{\partial u_t}{\partial t} = u_{\tau\tau}(\phi_t)^2 + 2u_{\tau\xi}\phi_t\psi_t + u_{\xi\xi}(\psi_t)^2 + u_\tau\phi_{tt} + u_\xi\psi_{tt}$$

$$u_{xt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} = u_{\tau\tau}(\phi_t\phi_x) + u_{\tau\xi}[\phi_x\psi_t + \phi_t\psi_x] + u_{\xi\xi}(\phi_t\psi_t) + u_\tau\phi_{xt} + u_\xi\psi_{xt}\,.$$

Agrupando términos conteniendo derivadas parciales de segundo orden y juntando en un término común $G_1(\tau,\xi,u,u_\tau,u_\xi)$ a aquellos de menor orden obtenemos en la ecuación (2) obtenemos:

$$b_{11}u_{\tau\tau} + 2b_{12}u_{\tau\xi} + b_{22}u_{\xi\xi} + G(\tau,\xi,u,u_\tau,u_xi) = 0$$

donde

$$\begin{gathered} b_{11} = a_{11}(\phi_x)^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_t + a_{22}(\phi_t)^2 \\ b_{12} = a_{11}\phi_x\psi_x + a_{12}[\phi_x\psi_t + \phi_t\psi_x] + a_{22}\phi_t\psi_t \\ b_{22} = a_{11}(\psi_x)^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_t + a_{22}(\psi_t)^2\,. \end{gathered}$$

Escojamos las funciones $\tau = \phi(x,t)$, $\xi = \psi(x,t)$ de modo de que $b_{11} \equiv 0$ (se anule idénticamente). Para ello debe suceder que

$$a_{11}(\phi_x)^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_t + a_{22}(\phi_t)^2 \equiv 0\,.$$

O sea, tenemos que resolver la ecuación con función incógnita $z(x,t)$:

$$a_{11}(z_x)^2 + 2a_{12}z_xz_t + a_{22}(z_t)^2 = 0 \tag{3}$$

que es una EDP de primer orden, ya que solo aparecen las derivadas primeras.

Lema 2.0.1. *$z = \phi(x,t)$ es una solución de la EDP (3) si y solo si $\phi(x,t) = C =$ cte. es solución general de la ecuación diferencial ordinaria (EDO)*

$$a_{22}(\frac{dx}{dt})^2 - 2a_{12}\frac{dx}{dt} + a_{11} = 0$$

Demostración. Supongamos que $z = \phi(x,t)$ es solución de la EDP (3) y consideremos una curva de nivel $\phi(x,t) = C$. Diferenciando (más exactamente, aplicando el Teorema de la Función Implícita suponiendo que no se anula ϕ_x) obtenemos que $\phi_x(x,t)dx + \phi_t(x,t)dt = 0$ de donde

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\phi_t}{\phi_x}$$

Pero si $z = \phi(x,t)$ es solución de la EDP (3) entonces

$$a_{11}(\phi_x)^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_t + a_{22}(\phi_t)^2 = 0$$

y dividiendo entre $(\phi_x)^2$ obtenemos

$$a_{11} + 2a_{12}\frac{\phi_t}{\phi_x} + a_{22}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2 = 0$$

que es lo mismo que

$$a_{11} - 2a_{12}\left(-\frac{\phi_t}{\phi_x}\right) + a_{22}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2 = 0$$

o sea

$$a_{11} - 2a_{12}\frac{dx}{dt} + a_{22}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0\,.$$

Recíprocamente, supongamos que $C = \phi(x,t)$ es una ecuación integral solución de la EDO

$$a_{22}(\frac{dx}{dt})^2 - 2a_{12}\frac{dx}{dt} + a_{11} = 0$$

y probemos que

$$a_{11}(\phi_x)^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_t + a_{22}(\phi_t)^2 = 0\,.$$

Sea (x_0,t_0) un punto cualquiera del dominio de definición de la EDO. Para (x_0,t_0) hallamos C_0 tal que la solución $C_0 = \phi(x,t)$ pase por (x_0,t_0), o sea que se cumpla $C_0 = \phi(x_0,t_0)$. Sea $x = f(t)$ la función tal que $\phi(x(t),t) \equiv C_0$ dada por el Teorema de la Función Implícita. Esta función está definida en un entorno de (x_0,t_0). Dado que vale

$$a_{22}(\frac{dx}{dt})^2 - 2a_{12}\frac{dx}{dt} + a_{11} = 0$$

tenemos, en virtud de que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\phi_t}{\phi_x}\,,$$

que

$$a_{22}\left(-\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\phi_t}{\phi_x}\right) + a_{11} = 0$$

o lo que es lo mismo, multiplicando por $(\phi_x)^2$ que

$$a_{22}(\phi_t)^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_t + a_{11}(\phi_x)^2 = 0\,.$$

En particular vale para (x_0, t_0). Como este punto era arbitrario, obtenemos que $z = \phi(x,t)$ es solución de la EDP (3). Esto termina la demostración. $\square$

La EDO

$$a_{22}(\frac{dx}{dt})^2 - 2a_{12}\frac{dx}{dt} + a_{11} = 0 \tag{4}$$

asociada a la EDP (3) se llama ecuación característica de la EDP (2) y sus curvas integrales se llaman características. Resolviendo la ecuación de segundo grado en $\frac{dx}{dt}$ vemos que la ecuación (4) se divide en dos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12} + \sqrt{(a_{12})^2 - a_{22}a_{11}}}{a_{22}}\,, \tag{5}$$

y

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12} - \sqrt{(a_{12})^2 - a_{22}a_{11}}}{a_{22}}\,. \tag{6}$$

El signo debajo del radical determina el tipo de la ecuación:

Definición 2.0.2. *Decimos que la EDP (2) es de tipo hiperbólico en el punto* (x,t) *si* $(a_{12}(x,t))^2 - a_{22}(x,t)a_{11}(x,t) > 0$*, que es de tipo elíptico si* $(a_{12}(x,t))^2 - a_{22}(x,t)a_{11}(x,t) < 0$ *y que es de tipo parabólico si* $(a_{12}(x,t))^2 - a_{22}(x,t)a_{11}(x,t) = 0$.

Ejercicio: Probar que una vez transformado el sistema de coordenadas mediante un cambio cualquiera $\tau = \phi(x,t)$, $\xi = \psi(x,t)$ y obtenidos los coeficientes correspondientes b_{11}, b_{12}, b_{22} en la EDP transformada, se cumple

$$(b_{12})^2 - b_{11}b_{22} = [(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}](\phi_x\psi_t - \phi_t\psi_x)^2\,.$$

Esto muestra que el tipo de EDP no depende del sistema de coordenadas ya que

$$J = (\phi_x\psi_t - \phi_t\psi_x)$$

es el determinante del cambio de coordenadas y por lo tanto $J \neq 0$ de donde resulta $J^2 > 0$.

Sin embargo es bueno observar que el tipo de ecuación depende, en general, del punto (x,t).

Para el caso hiperbólico tenemos dos familias independientes $\phi(x,t) = C_1$ y $\psi(x,t) = C_2$, $\phi(x,t) = C_1$ solución de (5) y $\psi(x,t) = C_2$ solución de (6). podemos entonces hacer un cambio de variable que anule a la vez b_{11} y b_{22}, obteniendo en este caso que la ecuación se reduce, después de dividir G_1 por $2b_{12}$, a la expresión:

$$u_{\tau\xi} = \frac{G_1}{2b_{12}} = H(\tau, \xi, u, u_\tau, u_\xi)\,.$$

Haciendo un nuevo cambio de variables $\xi = z + w$, $\tau = z - w$ la ecuación toma la forma

$$u_{zz} - u_{ww} = 4H(z, w, u, u_z, u_w)\,.$$

Para las ecuaciones de tipo parabólico $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ y las ecuaciones (5) y (6) coinciden y se reducen ambas a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12}}{a_{22}}\,.$$

Si $\phi(x,t) = C$ es la integral general de la ecuación anterior hacemos el cambio de variables $\tau = \phi(x,t)$, $\xi = \psi(x,t)$ donde ψ es cualquier función independiente de ϕ (o sea,una función ψ tal que $J = \phi_x\psi_t - \phi_t\psi_x \neq 0$). Ya que $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ resulta $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$. Cambiando los signos en la ecuación (2), si fuera preciso, podemos escribir $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. Con el cambio de variables elegido queda

$$0 = b_{11} = a_{11}(\phi_x)^2 + 2a_{12}\phi_x\phi_t + a_{22}(\phi_t)^2 =$$

$$= a_{11}(\phi_x)^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_22} + a_{22}(\phi_t)^2 =$$
$$= b_{11} = (\sqrt{a_{11}}\phi_x + \sqrt{a_{22}}\phi_t)^2$$

De aquí $(\sqrt{a_{11}}\phi_x + \sqrt{a_{22}}\phi_t) = 0$. Pero entonces también resulta $b_{12} = 0$ pues

$$b_{12} = a_{11}\phi_x\psi_x + a_{12}[\phi_x\psi_t + \phi_t\psi_x] + a_{22}\phi_t\psi_t =$$

$$= a_{11}\phi_x\psi_x + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}[\phi_x\psi_t + \phi_t\psi_x] + a_{22}\phi_t\psi_t =$$
$$= b_{12} = (\sqrt{a_{11}}\phi_x + \sqrt{a_{22}}\phi_t)(\sqrt{a_{11}}\psi_x + \sqrt{a_{22}}\psi_t) = 0\,.$$

En definitiva se anulan tanto b_{11} como b_{12}. La ecuación de tipo parabólico queda entonces en el nuevo sistema de coordenadas de la forma

$$b_{22}u_{\xi\xi} + G_1(\tau, \xi, u, u_\tau, u_\xi) = 0\,.$$

Para la ecuación de tipo elíptico se cumple que

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0\,,$$

y las soluciones $\phi = C_1$ de (5) y $\psi = C_2$ de (6)que se obtienen son funciones de variable compleja. Se puede probar que $\psi(x,t) = \phi^*(x,t) = \overline{\phi(x,t)}$ es la función que se obtiene conjugando $\phi(x,t)$.
Para no trabajar con funciones complejas consideramos el cambio de variables

$$z = \frac{\phi(x, t + \phi^*(x,t)}{2}, \quad w = \frac{\phi(x,t) - \phi^*(x,t)}{2i}$$

O sea, $\tau = z + iw$, $\xi = z - iw$. Con este cambio, luego de operar, se puede ver que se obtiene la forma[1]:

$$u_{zz} + u_{ww} = H(z, w, u, u_z, u_w)\,.$$

En resumen se obtiene para las EDP's lineales en las derivadas parciales de segundo orden que dependen de dos variables independientes (x,t):
Si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ecuación de tipo hiperbólico, se reduce a una ecuación de la forma:

$$u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} = H \text{ o bien a } u_{\tau\xi} = H\,.$$

Si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ecuación de tipo parabólico, se reduce a una ecuación de la forma:

$$u_{\xi\xi} = H\,.$$

Si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ecuación de tipo elíptico, se reduce a una ecuación de la forma:

$$u_{\xi\xi} + u_{\tau\tau} = H\,.$$

En las expresiones anteriores H es una función, normalmente de clase C^2, de $(\tau, \xi, u, u_\tau, u_\xi)$.
Existe extensa bibliografía en torno a la resolución de EDP's de cada uno de los tipos. En la siguiente sección damos el método de variables separables para la búsqueda de soluciones.

[1] Es preciso pedir en este caso que los coeficientes a_{11}, etc. que aparecen en la ecuación sean analíticos.

3 Separación de variables

Vamos a dar ejemplos de resolución de ecuaciones de tipo hiperbólico, de tipo parabólico y de tipo elíptico usando el método conocido como de separación de variables.

Vamos a considerar primero ecuaciones del tipo parabólico con detalle. para los otros tipos daremos solo un bosquejo. En particular consideraremos la ecuación del calor unidimensional.

Ejercicio: Sea la EDP

$$v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + b v_x(x,t) + c v(x,t)\,.$$

Mostrar que eligiendo adecuadamente $\alpha, \beta \in I\!R$ la ecuación anterior se transforma en

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \ \text{ donde } \ v(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x,t)\,.$$

Consideremos una varilla (o barra) de longitud l en la que suponemos despreciables las magnitudes transversales. La varilla la ubicamos en el intervalo $[0,l]$ sobre el eje Ox. Llamaremos $u(x,t)$ a la temperatura de la varilla en el punto $x \in [0,l]$ en el instante de tiempo $t \geq 0$. Vamos a suponer que los extremos se mantienen a temperatura cero para todo $t \geq 0$, o sea,

$$\forall t \geq 0 : \ u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0$$

Estas son las condiciones de borde. En general pueden ser de distinto tipo, podría ser, por ejemplo, $u(0,t) = \mu(t)$ con $\mu : [0,\infty) \to I\!R$ una función dada y en el otro borde tener una condición que involucre no al valor de $u(l,t)$ sino al la derivada $u_t(l,t)$, por ejemplo, $u_t(l,t) = 0$ (que indicaría que no hay flujo de calor por ese extremo de la varilla. Nosotros nos contentaremos con estudiar el caso $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Supondremos que además la temperatura inicial es conocida

$$u(x,0) = \phi(x), \ x \in [0,l], \ \phi \text{ continua y con derivada primera continua a trozos}\,.$$

Estas son las condiciones iniciales.

La ecuación que rige el fenómeno de la transmisión del calor se basa en la Ley de Fourier que dice que el calor se propaga siguiendo la dirección del gradiente de temperaturas y el sentido opuesto a éste. En el caso unidimensional para una varilla (o barra) homogénea se obtiene la siguiente ecuación:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ f \text{ de clase } C^2\,.$$

En resumen, queremos resolver

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in [0,l],\ t \geq 0\,; \\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \forall t \geq 0\,; \\ u(x,0) = \phi(x),\ x \in [0,l]\,. \end{cases} \tag{7}$$

Para resolverlo resolvemos primero el problema auxiliar:
Hallar soluciones $u(x,t)$ no idénticamente nulas de

$$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in [0,l],\ t \geq 0\,, u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \forall t \geq 0\,, \tag{8}$$

de modo que se puedan escribir en la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, o sea, como producto de una función X que solo depende de x y una función T que solo depende de t.
Planteada la ecuación nos queda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial X(x)T(t)}{\partial t} = X(x)\dot{T}(t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial X(x)T(t)}{\partial x^2} = a^2 X''(x)T(t)$$

Aquí hemos puesto $\dot{T}(t)$ por la derivada de T respecto a t. De $X(x)\dot{T}(t) = a^2 X''(x)T(t)$ resulta

$$\text{(X)} \quad \frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda\,,$$

donde $\lambda \in I\!R$ es una constante porque $\dot{T}(t)/T(t)$ solo depende de t y $X''(x)/X(x)$ solo depende de x. Fijando x vemos que al variar t en (X) $\dot{T}(t)/T(t)$ no varía y fijando t vemos que al variar x $X''(x)/X(x)$ no varía.
Por otra parte de $u(0,t) = u(l,t) = 0$ se obtiene $X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$, como queremos que $u(x,t)$ no se anule idénticamente tiene que ser $T(t) \neq 0$ para algún t de donde debe ser $X(0) = X(l) = 0$.
Se deduce que debe valer

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \\ \dot{T} + a^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda < 0$ entonces se cumple $-\lambda > 0$ y de la teoría elemental de las EDO's se obtiene que la solución general de $X'' + \lambda X = 0$ es

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-sqrt{-\lambda}x},\ A \text{ y } B \text{ constantes}\,.$$

De $X(0)=0$ se obtiene $A+B=0$ y de $X(l)=0$ se obtiene $Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-sqrt-\lambda l}=0$. Ambas ecuaciones dan lugar al sistema

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-sqrt-\lambda l} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right).$$

Que tiene determinante

$$e^{-sqrt-\lambda l}-e^{sqrt-\lambda l}<0$$

de donde $A=B=0$ por lo que $X(x)\equiv 0$ y la solución $u(x,t)=X(x)T(t)$ es idénticamente nula.
Debemos entonces descartar la posibilidad $\lambda<0$.
Si $\lambda=0$ queda $X''=0$ cuya solución general se obtiene integrando dos veces respecto a x lo que nos da

$$X(x)=Ax+B$$

De $X(0)=0$ se obtiene $B=0$ y de $X(l)=0$ se obtiene $Al+B=0$ que como $B=0$ da lugar a $Al=0$ de donde $A=0$.
Debemos entonces descartar la posibilidad $\lambda=0$.
Por último, si $\lambda>0$ la solución general de $X''+\lambda X=0$ es

$$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

Imponiendo $X(0)=0$ queda $A\cos 0+B\operatorname{sen}0=0$. Como $\cos 0=1$ y $\operatorname{sen}0=0$ resulta $A=0$. Por último si $X(l)=0$ se obtiene, dado que $A=0$, $B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l)=0$. Si queremos que la solución $u(x,t)$ no se anule idénticamente no puede anularse B de donde debe ser $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l)=0$ lo que se cumple si $\sqrt{\lambda}l=k\pi$ con $k=0,1,2,3,\ldots$. El caso $k=0$ conduce a la solución trivial otra vez, de donde finalmente queda

$$(\sqrt{\lambda}l=k\pi;\ k=1,2,3,\ldots)\iff(\lambda=\frac{k^2\pi^2}{l^2};\ k=1,2,3,\ldots).$$

Denotaremos por λ_k a $\frac{k^2\pi^2}{l^2}$.
Para el valor

$$X_k(x)=\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}\,x)=\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x),\ B_k \text{ constante},$$

hallado para λ_k se obtiene el valor de $T_k(t)$ resolviendo

$$\dot{T}+a^2\lambda_k T=0$$

que tiene solución general

$$T_k(t)=e^{-a^2\lambda_k t}=e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t},\ C_k \text{ constante}.$$

De aquí resulta

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)e^{-a^2\lambda_k t},\ x \in [0,l], t \geq 0\,.$$

Sustituyendo en (8) se ve que realmente son soluciones. Más aun, dado que la ecuación (8) es lineal la suma $\sum_{k=1}^{N} D_k u_k(x,t)$ también verifica (8) incluyendo en eso que se anulan en la frontera.

Nos planteamos ahora resolver el problema un poco más general

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ x \in [0,l],\ t \geq 0\,; \\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \forall t \geq 0\,; \\ u(x,0) = \phi(x),\ x \in [0,l]\,. \end{cases} \tag{9}$$

llamado problema homogéneo ya que no aparece el término $f(x,t)$. Para ello buscamos soluciones de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)e^{-a^2\lambda_k t},\ x \in [0,l], t \geq 0$$

Como las sumas finitas verifican la ecuación (8) (incluyendo las condiciones de borde de la anulación en las fronteras 0 y l), si la convergencia de la serie y sus derivadas parciales término a término es uniforme obtendremos, de los teoremas correspondientes de la teoría de convergencia de funciones, que (8) también se va a satisfacer para la serie $u(x,t)$. Para que también valga la condición inicial tiene que satisfacerse la igualdad

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x) = \phi(x)\,.$$

Como pedimos que la condición inicial$\phi(x)$ sea continua y con derivada primera continua a trozos, y dado que $\phi(0) = 0 = \phi(l)$ (pues $u(0,0) = u(l,0) = 0$) entonces la Teoría de las Series de Fourier nos dice que es posible escribir la solución de esa forma. Más exactamente: la serie $\sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$ converge uniformemente a la función $\phi(x)$ eligiendo como valores de D_k a los coeficientes de Fourier

$$D_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(s) \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}s)ds\,.$$

Recordemos la prueba de esto: primero extendemos ϕ de modo de que sea una función impar a todo $\mathbb{R}$. Por el criterio M (de la mayorante) de Weierstrass la convergencia será uniforme si $\sum_{k=1}^{\infty} |D_k|$ converge. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} |D_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\frac{2}{l}\int_0^l \phi(s) \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}s)ds| = \text{(integración por partes)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{k\pi} \left| \frac{2}{l} \int_0^l \phi'(s) \cos(\frac{k\pi}{l} s) ds \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{k\pi} |D'_k| \, .$$

Aquí pusimos D'_k por el k-ésimo coeficiente de Fourier de la función ϕ' (que es par). Por la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |D'_k|^2 \text{ converge} \, .$$

Por otro lado

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2}{k^2\pi^2} = \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge} \, ,$$

$$\text{por lo tanto} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (|D'_k|^2 + \frac{l^2}{k^2\pi^2}) \quad \text{también converge.}$$

Además es conocido que para todo par de reales a, b se cumple $(a-b)^2 \geq 0$ de donde si $a, b \geq 0$ se tiene $(a^2 + b^2)/2 \geq ab \geq 0$. Entonces por el criterio de comparación de series de términos positivos se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |D_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{k\pi} |D'_k| \text{ es convergente} \, .$$

Probemos ahora que eligiendo como coeficientes a los D_k, la serie

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l} x)$$

satisface a la ecuación (9) en el abierto Ω definido por $\Omega = \{(x,t) \in I\!R^2 \,/\, x \in (0,l), t > 0\}$.

Para ello alcanza con ver que la serie definiendo

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l} x)$$

así como la series que se obtienen derivando término a término a la anterior respecto a t h veces y respecto a x l veces convergen uniformemente para todo $h, l \geq 0$, si $(x,t) \in (0,l) \times \{t \geq t_0\}$, donde $t_0 > 0$ es arbitrario pues de ese modo por el teorema acerca de la convergencia uniforme de derivadas existirán

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{h+l} u}{\partial t^h \partial x^l}, \ldots$$

y coincidirán con las correspondientes derivadas término a término. Más aun, dado que las sumas parciales verifican la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ y las condiciones de borde $u(0,t) = u(l,t) = 0$ lo mismo va a pasar con el límite de esas sumas $u(x,t)$. Por último, lo antes visto muestra que $u(x,0) = \phi(x)$.
Fijemos $t_0 > 0$ i veamos que para $(x,t) \in (0,l) \times \{t \geq t_0\}$ hay convergencia uniforme de las series obtenidas derivando formalmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$$

A modo de ejemplo lo hacemos para la derivada formal respecto a t una vez, pero el método es general. La derivada formal es en este caso:

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a^2(\frac{k\pi}{l})^2 D_k e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$$

Tratemos de acotar el valor absoluto del término general T_k de esta serie a efectos de aplicar el criterio M de Weierstrass.

$$|T_k| = |-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 D_k e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)| \leq a^2 \frac{\pi^2}{l^2} k^2 |D_k| e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t_0}$$

Aquí usamos que $\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)| \leq 1$ y que si $t \geq t_0$ entonces $e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \leq e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t_0}$. Además se tiene que como ϕ es continua existe $M > 0$ tal que $|\phi(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,l]$, entonces

$$|D_k| = \frac{2}{l}|\int_0^l \phi(s) \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}s)ds| \leq \frac{2}{l}\int_0^l |\phi(s) \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}s)|ds \leq \frac{2}{l}\int_0^l M ds = 2M \,.$$

Por lo tanto

$$|T_k| \leq 2Ma^2 \frac{\pi^2}{l^2} k^2 e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t_0} = c_1 \cdot k^2 e^{-c_2 k^2}$$

Aquí $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ son las constantes respecto de k que aparecen en la expresión que las escribimos así para simplificar. Alcanza con probar que la serie de términos positivos con término general $a_k = c_1 \cdot k^2 e^{-c_2 k^2}$ es convergente. Por el criterio del cociente (criterio de D'Alembert) se tiene

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{c_1 \cdot (k+1)^2 e^{-c_2(k+1)^2}}{c_1 \cdot k^2 e^{-c_2 k^2}} = (1 + \frac{1}{k})^2 e{-}c_2(2k+1) \to 0 \text{ cuando } k \to \infty \,.$$

Por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y por el criterio M de Weierstrass

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a^2(\frac{k\pi}{l})^2 D_k e^{-a^2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$$

converge uniformemente para $t \geq t_0$. Como $t_0 > 0$ es arbitrario resulta la convergencia en Ω. Luego esta serie es la serie de $u_t(x,t)$ en Ω. Para las otras derivadas término a término el argumento es el mismo. Acotando los valores absolutos de las expresiones en senos y cosenos que aparecen por el número 1 y el término en la exponencial por el mismo término evaluado en t_0, se llega a una expresión de la forma $a_k = c_1 k^p e^{-c_2 k^2}$ con p un natural positivo, y la serie con ese término general converge por el criterio del cociente. Lo antes visto prueba que la solución $u(x,t)$ es entonces solución de la ecuación (9).

Veamos ahora el caso general de la ecuación (7):

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ x \in [0,l], \ t \geq 0\,; \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \forall t \geq 0\,; \\ u(x,0) = \phi(x), \ x \in [0,l]\,. \end{cases}$$

Para ello buscamos soluciones de la forma :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\,.$$

Multiplicando $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ por $\operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)$ e integrando respecto a x entre 0 y l queda

$$\int_0^l u_t(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx = a^2 \int_0^l u_{xx}(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx + \int_0^l f(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx =$$

(integrando por partes)

$$= a^2 u_x(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)\Big|_0^l - a^2 \frac{j\pi}{l} \int_0^l u_x(x,t) \cos(\frac{j\pi}{l}x)dx + \int_0^l f(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx =$$

$$= -a^2 \frac{j\pi}{l} \int_0^l u_x(x,t) \cos(\frac{j\pi}{l}x)dx + \int_0^l f(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx$$

Volviendo a integrar por partes queda, pues $u(0,t) = u(l,t) = 0$,

$$\int_0^l u_t(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx = a^2 (\frac{j\pi}{l})^2 \int_0^l u(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx + \int_0^l f(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx\,.$$

Recordando que $\lambda_j = \frac{j^2\pi^2}{l^2}$ lo anterior se escribe

$$\int_0^l u_t(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx = a^2 \lambda_j \int_0^l u(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx + \int_0^l f(x,t) \operatorname{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx\,.$$

Como suponemos que $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,\text{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$ y, admitiendo que podamos cambiar el orden de sumación de la serie con el de integración, nos queda:

$$\int_0^l u_t(x,t)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(t) \int_0^l \text{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx = \frac{l}{2}\dot{T}_j(t)$$

Aquí usamos que $\int_0^l \text{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx = 0$ si $j \neq k$ y que vale $\frac{l}{2}$ si $j = k$. Por otro lado tenemos, admitiendo que podemos cambiar el orden de integración con el de sumación:

$$a^2\lambda_j \int_0^l u(x,t)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx + \int_0^l f(x,t)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx =$$

$$= \frac{l}{2}a^2\lambda_j T_j(t) + \int_0^l f(x,t)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx\,.$$

Dividiendo por $\frac{l}{2}$ nos queda

$$\dot{T}_j(t) = a^2\lambda_j T_j(t) + \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx\,.$$

Si llamamos $c_j(t)$ a $\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\,\text{sen}(\frac{j\pi}{l}x)dx$ queda el sistema de infinitas EDO's

$$\dot{T}_j(t) = a^2\lambda_j T_j(t) + c_j(t) \quad j = 1,2,3,\ldots\,.$$

La condición inicial de cada ecuación está dada por el hecho de que para $t = 0$ debe ser $u(x,0) = \phi(x)$, o sea que

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\,\text{sen}(\frac{k\pi}{l}x) = \phi(x)\,.$$

Como por la Teoría de las Series de Fourier se cumple (si ϕ es continua y con derivada primera continua a trozos):

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k\,\text{sen}(\frac{k\pi}{l}x) \text{ con } D_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(s)\,\text{sen}(\frac{k\pi}{l}s)ds$$

concluimos que $T_j(0) = D_j$. En resumen: Debemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

$$\begin{cases} \dot{T}_j(t) = a^2\lambda_j T_j(t) + c_j(t)\,; \\ T_j(0) = D_j\,; \end{cases} \quad j = 1,2,3,\ldots\,.$$

La solución de cada $T_j(t)$ puede darse explícitamente obteniendo

$$T_j(t) = \cdots \text{ (¡calcularla resolviendo la ecuación!)} .$$

En resumen obtenemos de este modo una candidata a solución de la ecuación (7). Se puede ver que en condiciones de regularidad la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x) = \phi(x)\,,$$

es efectivamente solución y que además es única.
En efecto, se tiene que la única solución de $u_t = a^2 u_{xx}$ con las condiciones de borde $u(0,t) = u(l,t) = 0$, y la condición inicial $u(x,0) \equiv 0$ es la función idénticamente nula $u(x,t) \equiv 0$ para todo $x \in [0,l]; t \geq 0$. Si así no fuera, existiría una $u(x,t)$ tal que para algún $t_0 > 0$ y algún $x_0 \in (0,l)$ cumpliría $u(x_0,t_0) \neq 0$. Observemos que, por linealidad de la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$, también $-u(x,t)$ la cumple, así como las condiciones de borde e inicial por ser nulas. Se deduce que podemos asumir que $u(x_0,t_0) > 0$. Consideremos el conjunto compacto $K = [0,l] \times \{T \geq t \geq 0\}$ con $T > t_0$. Por compacidad la función $u(x,t)$ alcanza su máximo $M > 0$ en algún punto $(x_1,t_1) \in K$. es claro que $0 < x_1 < l$ y que $t_1 > 0$ pues la función u se anula en $x = 0$, $x = l$ y $t = 0$. Si $t_1 < T$ el máximo se alcanza en un punto interior de K. si no $t_1 = T$ Si $t_1 < t_2$, como es un máximo local se cumple que $u_t = 0$. Si $t_1 = T$ podría ser $u_t(x_1,T) \neq 0$ pero en ese caso debe ser $u_t(x_1,T) \geq 0$. Pues si fuera $u_t(x_1,T) < 0$ entonces tendríamos que $u(x_1,T) > u(x_1,T)$ para $t < T = t_1$ contradiciendo que el máximo se alcanza en (x_1,T). En cualquier caso, como $u_t = a^2 u_{xx}$, se tiene $u_{xx} \geq 0$.
Por otra parte la matriz Hessiana de una función cualquiera $v(x,t)$ es

$$H = \begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xt} \\ v_{xt} & v_{tt} \end{pmatrix}\,,$$

que para que tenga un máximo en (x_2,t_2) no en los bordes de K debe cumplir necesariamente

$$v_{xx}(x_2,t_2) \leq 0,\ v_{tt} \leq 0,\ v_{xx}v_{tt} - v_{xt}^2 > 0\,.$$

El caso de un máximo sobre $t = T$ pero con $x \neq 0$, $x \neq l$, obliga a que $v(x,T) = g(x)$ sea una función con derivada $g'(x_1) = v_x(x_1,T)$ nula en x_1 y segunda derivada $v_{xx}(x_1,T) = g''(x_1) \leq 0$.
Consideremos la función $v(x,t) = u(x,t) + \epsilon(x-l)x$ donde $\epsilon > 0$. Entonces $v(0,t) = 0 = v(l,t)$. Además

$$|v(x,0)| = |u(x,0) + \epsilon(x-l)x| = |\epsilon(x-l)x| < \epsilon l^2\,.$$

Si elegimos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon l^2 < M/4$ entonces $v(0,t) = v(l,t) = 0$ para todo $t \geq 0$ y además

$$v(x,0) < M/4 \text{ y } v(x_1,t_1) = u(x_1,t_1) = M + \epsilon(x_1 - l)x_1 > M - M/4 = 3M/4\,.$$

Entonces el máximo de v se alcanza en un punto $(x_2,t_2) \in (0,l) \times \{T \geq t > 0\}$. Para ese punto $v_t(x_2,t_2) = u_t(x_2,t_2) = 0$ si $t_2 < T$ y $u_t(x_2,t_2) \geq 0$ si $t_2 = T$. Por otro lado $u_t = a^2 u_{xx}$ de donde $u_{xx}(x_2,t_2) \geq 0$. En consecuencia para v tenemos

$$v_{xx}(x_2,t_2) = u_{xx}(x_2,t_2) + 2\epsilon = 2\epsilon > 0\,,$$

lo que contradice que la Hessiana debe cumplir $v_{xx}(x_2,t_2) \leq 0$ al ser (x_2,t_2) un punto donde se alcanza el máximo de $v(x,t)$. Concluimos que $u_t = a^2 u_{xx}$ con condiciones de borde $u(0,t) = u(l,t) = 0$ y condición inicial $u(x,0) = 0$, solo admite la solución $u(x,t) \equiv 0$.
Si ahora existen dos funciones u_1, u_2 ambas soluciones de la ecuación (7) entonces su diferencia $u_1 - u_2$ es solución de $u_t = a^2 u_{xx}$ con las condiciones de borde $u(0,t) = u(l,t) = 0$, y la condición inicial $u(x,0) \equiv 0$. Por lo anterior $u_1 - u_2 \equiv 0$ de donde $u_1 \equiv u_2$.

Observación 3.0.1. *Lo que hemos probado más arriba se conoce como principio del máximo para la ecuación del calor. Dice que el máximo de $u(x,t)$ no puede alcanzarse en los bordes $x = 0, x = l$ a menos que u sea constante (sí puede alcanzarse en el borde $t = 0$ en el caso general).*

En segundo lugar tratamos las <u>ecuaciones del tipo hiperbólico</u>.
Como dijimos antes lo haremos con menor detalle.
Consideremos la ecuación de la cuerda vibrante

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ \text{(condiciones de borde)} \\ u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\ \text{(condiciones iniciales)}. \end{cases} \tag{10}$$

Aquí $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ con $T_0 > 0$ la tensión de la cuerda y $\rho > 0$ la densidad de la misma (suponemos una cuerda homogénea). $f(x,t)$ representa la densidad de la fuerza actuando sobre la cuerda en el punto x en el instante t. Suponemos que $x \in [0,l]$ y $t \geq 0$.
$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$ representan las condiciones de borde; asumimos que los extremos la cuerda están fijos en todo instante.
Las condiciones $u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$ representan la posición inicial y la velocidad inicial de cada punto x de la cuerda, para que sean compatibles con las

condiciones de borde tienen que cumplir con $\phi(0)=\phi(l)=\psi(0)=\psi(l)=0$.
Como antes para la ecuación del calor, planteamos primero el resolver el problema en el caso $f(x,t)\equiv 0$, es decir, con densidad de fuerza nula, buscando una solución no trivial (no necesariamente verificando las condiciones iniciales) por el método de variables separables: $u(x,t)=X(x)T(t)$. De la ecuación $u_{tt}=a^2u_{xx}$ se tiene $\ddot{T}(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$. De aquí resulta

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda=\text{cte.}$$

Se obtiene entonces las ecuaciones

$$X''+\lambda X=0, \quad \ddot{T}+a^2\lambda T=0\,.$$

De las condiciones de borde para u, a efectos de que no sea una solución trivial, debe ser $X(0)=X(l)=0$. Resolviéndolas y a los efectos de que las soluciones no sean triviales debe ser $\lambda>0$ y además debe ser

$$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2},\ k=1,2,3,\ldots\,.$$

Para ese valor de λ se obtiene

$$X_k(x)=D_k\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x),\ D_k\in I\!R\,.$$

Para esos valores de λ_k la solución de $\ddot{T}(t)=a^2\lambda_kT(t)$ queda

$$T_k(t)=A_k\cos(\frac{k\pi}{l}at)+B_k\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}at),\ A_k,B_k\in I\!R\,.$$

Se concluye que

$$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)=\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)(A_k\cos(\frac{k\pi}{l}at)+B_k\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}at))$$

son soluciones particulares de la ecuación $u_{tt}=a^2u_{xx}$. Buscamos ahora una solución

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}((A_k\cos(\frac{k\pi}{l}at)+B_k\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}at)))\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$$

De las condiciones iniciales $u(x,0)=\phi(x)$ resulta

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$$

y derivando formalmente respecto a t (término a término) la expresión de u dada por la serie obtenemos de $u_t(x,0)=\psi(x)$:

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}aB_k\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\,.$$

Si ϕ y ψ son continuas y derivables a trozos entonces existen valores de A_k y B_k tales que las series anteriores convergen uniformemente a los valores de ϕ y ψ. Más exactamente, tenemos que elegir los coeficientes de Fourier correspondientes:

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(s)\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}s)ds\,,$$

$$B_k=\frac{2}{l}\frac{l}{k\pi a}\int_0^l\psi(s)\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}s)ds\,.$$

Ejercicio: Probar que como para la ecuación del calor esta serie así como sus derivadas formales hasta de segundo orden convergen uniformemente siempre que ϕ y ψ sean funciones de clase C^2 y que la tercera derivada de ψ sea continua a trozos. (Estas condiciones son suficientes, no necesarias, vale decir, la convergencia se puede asegurar en condiciones más débiles).

Como para la ecuación del calor (7), en el caso de la ecuación (10) en que $f(x,t)$ no se supone nulo, buscamos soluciones de la forma

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\,.$$

Multiplicando $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$ por $\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$ e integrando entre 0 y l respecto a x resulta, aplicando integración por partes dos veces al término

$$a^2\int_0^l u_{xx}\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x)dx\,,$$

que formalmente debe cumplirse

$$\ddot{T}_k(t)+(\frac{k\pi}{l})^2a^2T_k(t)=0\,.$$

De las condiciones iniciales $u(x,0)=\phi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ resulta además

$$T_k(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x)dx$$

$$\dot{T}_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x)dx$$

por lo que los valores de $T_k(t)$ están totalmente determinados. Sustituyendo los valores de $T_k(t)$ hallados en $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x)$ se obtiene la candidata a solución de la EDP (10). Si probamos que la serie representando a $u(x,t)$ converge uniformemente, así como sus derivadas hasta de segundo orden, habremos obtenido una solución de la EDP (10). Como en el caso de la ecuación del calor, se puede probar que si la solución existe, entonces es única.

Observación 3.0.2. *Es bueno recordar que con sencillas transformaciones de coordenadas ($\tau = x+at$, $\xi = x-at$) la ecuación de ondas $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ se transforma en $u_{\tau\xi} = 0$ que fue resuelta en la sección anterior, dando lugar a la solución general*

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at),\ f, g,\ \textit{de clase } C^2\,.$$

El método de escribir la solución de esta forma se llama método de D'Alembert o de propagación de ondas.

Ecuaciones de tipo elíptico. La más conocida de las ecuaciones de tipo elíptico está dada por

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ (ecuación de Laplace)}\,.$$

donde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ representa el Laplaciano de la función u. Esta ecuación se obtiene, por ejemplo, en el caso de la EDP del calor en un medio plano (con espesor despreciable, como en el caso de una lámina delgada) que es, si no hay fuentes externas de calor y la densidad sea constante, $u_t = a^2\Delta u$. Si buscamos soluciones estacionarias, es decir que no varíen con el tiempo será $u_t = 0$, y obtenemos $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
Dada una función analítica $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con Ω un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ (i.e: f es desarrollable en forma de serie de potencias en un entorno de cada punto $z_0 \in \Omega$) si g y h son la parte real e imaginaria de f: $f(z) = g(z) + ih(z)$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces g y h son funciones que cumplen $\Delta g = \Delta h = 0$. Aquí vemos a $g(z) = g(x,y)$ y lo mismo a $h(z) = h(x,y)$. Esta da un método muy general de buscar soluciones a la ecuación de Laplace. Si una función satisface además condiciones de frontera adecuadas, podemos obtener así muchas veces la solución de un problema que involucre a la ecuación de Laplace.
Consideremos la ecuación

$$\Delta u(x,y) = 0, \text{ en el interior del disco de radio } r \tag{11}$$

con la condición $u(x,y) = f(x,y)$ en el borde del disco.

Se puede ver que en coordenadas polares (ρ, θ) la ecuación de Laplace queda:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

La condición $u(x,y) = f(x,y)$ se transforma, dado que $x^2 + y^2 = \rho^2 = r$ sobre el borde del disco de radio r, en $u(r,\theta) = F(\theta)$ donde F es la función que se obtiene de $f(x,y)$ a partir del cambio de coordenadas $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ teniendo en cuenta que en el borde del disco $\rho = r$ por lo que F solo depende de θ. Debemos pues resolver la ecuación anterior con la condición de borde $u(r,\theta) = F(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, debiendo cumplirse $F(0) = F(2\pi)$ por lo que F puede verse como una función periódica de período 2π.
Como en los casos anteriores (parabólico e hiperbólico) buscamos por el método de separación de variables una solución no trivial del tipo

$$u(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta)\,.$$

Dejamos al lector interesado que encuentre soluciones $u_k(\rho,\theta)$ de la forma anterior, por sí mismo. En particular le conviene probar con soluciones para la ecuación diferencial que obtenga en $R(\rho)$ de la forma $R(\rho) = \rho^b$, determinando $b \in I\!R$ para que sea solución. La ecuación en $T(\theta)$ conduce a una suma de cosenos y senos multiplicados por constantes.
Luego, como en los casos ya vistos, se busca una función

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho,\theta)$$

que satisfaga la condición de borde $u(r,\theta) = F(\theta)$. Para ello se aplica el método de las series de Fourier.

La ecuación de Laplace se puede formular también en dimensiones mayores que 2. Por ejemplo, la ecuación del calor en el espacio va a ser, en el caso de que no existan fuentes externas de calor y que el medio tenga densidad constante y sea homogéneo: $u_t(x,y,z,t) = a^2 \Delta u(x,y,z,t)$. Si el fenómeno es estacionario, o sea, no depende del tiempo, será $u(x,y,z,t) = u(x,y,z)$ y $u_t = 0$. En ese caso queda la ecuación del calor reducida a la de Laplace:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0\,.$$

El estudio de esta ecuación puede, a veces, tratarse también por el método de separación de variables, especialmente si admitimos la existencia de simetrías, por ejemplo simetrías esféricas.

Epílogo

Las EDP's tienen la pretensión de reflejar leyes muy generales de la realidad (en general compleja) del mundo material. No es de extrañar entonces que ellas sean muchas veces muy difíciles de estudiar y que, por la generalidad de las leyes físicas en cuestión, la respuesta sea también muy general. Libros enteros están dedicados, a veces, a estudiar como resolver una EDP particular. Lo que se escribió en estas notas debe verse entonces como un balbuceo sobre esta Teoría.

Dixit et salvavi anima meam.

Referencias

[TS] Tijonov, A.N.; Samarsky A.A., *Ecuaciones de la Física Matemática,* Editorial MIR, **Moscu,** 1972.

[Pe] Peral Alonso, I., *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, **USA** 1995.

jlvb