

MATEMATICAS APLICADAS - MA26B
GUIA DE PROBLEMAS 2, 2007

Profesor: Carlos Conca

Auxiliares: Thomas Capelle, Francisco Collarte.

DIVERGENCIA Y ROTOR

P.0. Pruebe las siguientes identidades:

- (a) $\text{rot}(\nabla\phi) = 0$
- (b) $\text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = 0$
- (c) $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{G})$
- (d) $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
- (e) $\text{rot}(\phi\vec{F}) = \phi\text{rot}(\vec{F}) + \nabla\phi \times \vec{F}$

P.1. Considere el volumen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones:

$$\begin{cases} |z| \leq 2 - x^2 - y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Bosqueje la región Ω .
- (b) Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\vec{F} = \rho\hat{\rho}$ (en coordenadas cilíndricas) a través de $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior.

P.2.

- (i) Calcule $\oint_{\Gamma} (y^2, z^2, x^2) \cdot d\vec{r}$ donde Γ es el triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, 0, a)$, recorridos en este orden, y compruebe el teorema de Stokes.
- (ii) Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Considere el campo definido por $\vec{F}(x, y, z) = (z \sin(x) - y^3, z \cos(y) + x^3, \cos(xy))$. Calcule $I = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$

P.3.

- (a) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x - y \cos(z), y - x, z - e^y)$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z , centrado en el origen y de radios R_0 y r_0 ($R_0 > r_0$).
- (b) Calcular la integral de superficie $\iint_{\Sigma} \nabla\phi \cdot d\hat{S}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y ϕ es el campo escalar $\phi(x, y, z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$.

P.4. Calcule el flujo definido por el campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^y \sin(y) + xy^2z, e^x \cos(z) + x^2yz, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$. Indicación: Calcule el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas y usando el teorema de la divergencia). Calcule el flujo a través de las tapas directamente.

P.5.

- (a) Calcular $I = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ siendo $\vec{F}$ el campo vectorial definido por

$$\vec{F} = (x - z)\hat{i} + (x^2 + yz)\hat{j} - 3xy\hat{k}$$

y S es la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ (orientada exteriormente) que queda sobre el plano yz ($x \geq 0$) y en el primer octante. Indicación: Utilice el teorema de Stokes.

- (b) Un sólido situado en el primer octante está acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $y^2 + z^2 = a^2$. Si $\vec{F}$ es el campo vectorial definido por $\vec{F} = 2yz\hat{i} + (x + 3y - 2)\hat{j} - (x^2 + z)\hat{k}$, entonces pruebe que el valor de la integral de flujo $\iint_{\Sigma_2} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ tomada sobre la superficie del sólido y orientada según la normal exterior es $\frac{a^2}{4}(4a + \pi)$.

P.6. En todo lo que sigue Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, con frontera $\partial\Omega$, regular por trozos.

- (a) Demuestre la siguiente identidad de Green: Dados $f \in C^2(\Omega)$ y $g \in C^1(\Omega)$, se tiene:

$$\iint_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (g \Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

- (b) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Se quiere probar que si esta ecuación admite solución entonces ésta es única. Suponga que existen dos soluciones u_1 y u_2 , y definamos $w = u_1 - u_2$. Pruebe que w es idénticamente nula.

Indicación: Use la parte (a).

P.7 (C2, 2001). Considere el campo vectorial

$$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y - 3z + e^x \sin(z))\hat{i} + x^2\hat{j} + (e^x \cos(z) - 3x)\hat{k}$$

- (i) Calcule $\text{rot}(\vec{f})$
 (i) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\Gamma : \quad \vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcule

$$\oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilindro de la Figura 1.

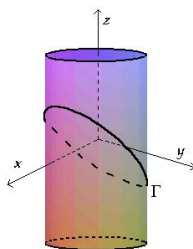


FIGURA 1

P.8 (C2, 2002).

- (a) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto, conexo y acotado de frontera $S = \partial\Omega$ regular y orientable por trazos. Sean f y g funciones continuas conocidas. Demuestre que si u_1 y u_2 , funciones de clase $\mathcal{C}^2$, satisfacen las propiedades siguientes:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla u_i)(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \quad i = 1, 2 \\ \nabla u_i \cdot \hat{n}(x) = g(x) & \forall x \in S \quad i = 1, 2 \\ \exists x_0 \in \Omega; u_1(x_0) = u_2(x_0), \end{cases}$$

entonces son iguales en Ω .

Indicación: Es útil probar la siguiente identidad del tipo Green (Consecuencia del Teo. de la Divergencia). Puede serle útil usar el problema 1:

Dados φ y ψ de clase $\mathcal{C}^2$ se tiene:

$$\iint_{\partial\Omega} \psi \nabla \varphi \cdot \hat{n} dA = \iiint_{\Omega} (\psi \operatorname{div} \nabla \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dv$$

y piense en probar que $u_1 - u_2 = 0$

- (b) Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = (h - z)$ con $h > 0$ constante y sea Π el plano tangente a la superficie del paraboloide en el punto $(0, \sqrt{h}, 0)$. Demuestre que el área de la porción del plano contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ es: $\pi a^2 \sqrt{1 + 4h}$.

P.9 (C2, 2002). Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = (z + c(z)a)^2$ con $z \in [-h, h]$ donde a y h son constantes positivas fijas y:

$$c(z) = \begin{cases} \operatorname{signo}(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Considere el campo vectorial $\vec{F} = (k_1/\rho)\hat{\rho} + k_2 e^{-z^2}\hat{\theta} + k_3 z\hat{k}$, donde ρ, θ y z son las variables en coordenadas cilíndricas y k_1, k_2, k_3 son constantes dadas. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S , primero por definición y luego haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado. Comente.

P.10 (C2, 2002). Considere el toro de radio mayor R y radio menor a , donde $R > a > 0$ son constantes conocidas. Sea Σ la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la cual orientamos según la normal exterior al toro.

- (i) Demuestre que si $\vec{F}$ es un campo continuamente diferenciable en Σ , entonces se satisface:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\operatorname{rot}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde:

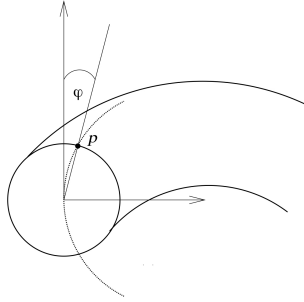
C_1 y C_2 son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$ respectivamente, con $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$, $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ y $z_2 = -z_1$, ambas orientadas en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Indicación: Usando coordenadas toroidales, calcule $\sin(\varphi)$ y las coordenadas del punto p de la fig.2

fig.2

- (ii) Considere el campo $\vec{F} = (e^{-z^2}/\rho)\hat{\rho} + \hat{\theta} + \sin(\theta)\cos^3(z\theta)\hat{k}$, calcule:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\operatorname{rot}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$



P.11 (EX, 2002). Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = (z + a)^2$ con $z \in [0, h]$ donde a y h son constantes positivas fijas.

Considere el campo vectorial $\vec{F} = (1/\rho)\hat{\rho} + (\rho^2 + z^2)\hat{\theta} + z\hat{k}$, donde ρ, θ y z son las variables en coordenadas cilíndricas. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S , primero por definición y luego haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

P.12 (EX, 2001).

- (a) Sea $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1 . Suponga que $\vec{F}$ es el rotor de algún campo vectorial y que $F_3(x, y, z) = \vec{F} \cdot \hat{k} = 1$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del semicasquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, orientado según la normal superior.
- (b) Considere una cañería cilíndrica de longitud L y de radios a y b , la cual conduce un líquido a temperatura T_1 , mayor que la temperatura exterior T_0 . Se desea determinar el régimen estacionario de la temperatura; para ello suponga que la conductividad térmica k es constante y suponga además simetría cilíndrica, es decir, $T(\rho, \theta, z) = T(\rho)$.
- (i) Para $\rho \in [a, b]$ considere el flujo de calor

$$\Phi(\rho) := \iint_{\Sigma(\rho)} k \nabla T \cdot d\vec{S}$$

a través del manto del cilindro de radio ρ y longitud L ($\Sigma(\rho)$).

Usando el Teorema de la divergencia, demuestre que $\Phi(\rho)$ es constante e igual a $\Phi(b)$.

- (ii) Deduzca que $\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}$ es constante y encuentre una expresión analítica para $T(\rho)$ en función de T_0, T_1, a, b .

- (iii) Pruebe que $\Phi(b) = 2\pi Lk(T_0 - T_1)/\ln(b/a)$.

Indicación: Recuerde que la ecuación del calor para el caso en que la conductividad k es constante está dada por:

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T$$

con lo que para el caso estacionario, se trata de la ecuación de Laplace:

$$k \Delta T = 0$$

P.13 (C2, 2001).

- (a) Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ una superficie regular cuyo borde $\partial\Sigma$ es una curva cerrada, simple y regular por tramos. Demuestre que el área de Σ puede ser calculada por

$$Area(\Sigma) = \oint_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{f} = -y\hat{i} + x\hat{j}$

(b) Dado el campo

$$\vec{f} = (6zy^2 + \cos(x^2))\hat{i} + (xz\sin(xz) + 2x^3)\hat{j} + (xy\sin(xy) - 2x^3)\hat{k}$$

y la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde

$$\Gamma_1 = \{(x, 0, z) / x^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y, 0) / x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

Calcule

$$\oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

P.14 (C2, 2001).

(a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ cuyo borde Σ satisface las hipótesis del teorema de la divergencia. Sea $\vec{f}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \|\vec{f}(\vec{r})\| = 0$$

Pruebe que

$$\int \int \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \text{div}(\vec{f}) dV = \int \int_{\Sigma} \vec{f} \cdot \hat{n} dA$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal interior a Ω sobre Σ

Indicación: Use el teorema de la divergencia en $B(0, r) \setminus \bar{\Omega}$ con r suficientemente grande.

(b) Sea Ω la porción del casquete esférico de radio R con $0 \leq z \leq R/2$. Calcule el flujo del campo

$$\vec{f}(x, y, z) = \left(e^{(z+y^2)} \cos(y) + 4x, z \sinh(x) + y, x^2 + y^2 - 4z \right)$$

a través de la superficie Ω según la normal exterior.

P.1.

- (a) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.
- (b) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: considere $|f|^2$.

P.2. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

- (a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
- (b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.
- (c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.
- (d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2 , se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v,$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω . Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω . Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .

P.3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}, \quad z = re^{i\theta}.$$

P.4.

- (a) Sabiendo que la serie $S(z) = \sum c_k(z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $R_0 > 0$, determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2(z - z_0)^k.$$

- (b) Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:

$$\sum z^k, \quad \sum \frac{z^k}{k}, \quad \sum \frac{z^k}{k^2}.$$

P.5. Calcule el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

P.6. Para las siguientes series, calcule el radio de convergencia y su valor donde corresponda:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n}$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$

P.7. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $p^\lambda : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda \log(z)), \quad z \neq 0.$$

- (i) Muestre que $p^i(i) = e^{-\pi/2}$ y que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $p^k(z) = z^k$.
- (ii) Dado $\lambda = \alpha + i\beta$, pruebe que para todo $t > 0$ real,

$$p^\lambda(t) = t^\alpha [\cos(\beta \log t) + i \sin(\beta \log t)].$$

- (iii) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Determine además el dominio donde $p^\lambda(z)$ es holomorfa y pruebe que

$$(p^\lambda)'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z).$$

Nota: todo lo anterior justifica que la función $p^\lambda(z)$ se llame función potencia generalizada y que se denote más

simplemente por z^λ . Así, en (i) se probó que $i^i = e^{-\pi/2}$.

P.8. Sea $S_n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n$, $T_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$.

- (a) Mostrar que $S_n = \frac{(T_n - nz^{n+1})}{1-z}$
- (b) Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ y usando (a) calcule la suma de dicha serie.

P.9. Calcule el valor de las siguientes integrales:

- (i) $\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1} dx$
- (ii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$
- (iii) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos(\theta)+\sin(\theta)} d\theta$
- (iv) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)} d\theta$
- (v) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin(\pi x)}{x^2+2x+5} dx$
- (vi) $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx \quad m > 0$
- (vii) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$

P.10. Pruebe que para $b \in]-1, 1[$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1-b^2+x^2}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Integre $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

P.11. Pruebe que:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}, \quad \text{donde } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Indicación: Considere la función $f(z) = \frac{\pi \operatorname{cosec}(\pi z)}{(z+a)^2}$ integrada en el camino Γ_N correspondiente al borde del cuadrado de vértices $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$

P.12. Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que para $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0,$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

P.13 (EX, 2002). El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$ donde $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Para ello considere el borde del cuadrado C_N de vértices: $(N + \frac{1}{2})(-1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 + i)$, $(N + \frac{1}{2})(-1 + i)$, con $N \in \mathbb{N}$.

(i) Considere la función $f(z) = \frac{\pi \operatorname{cosec}(\pi z)}{(z+a)^2}$. Indique dónde f es holomorfa, encuentre sus polos y determine los órdenes correspondientes.

(ii) Calcule los residuos de los polos de f .

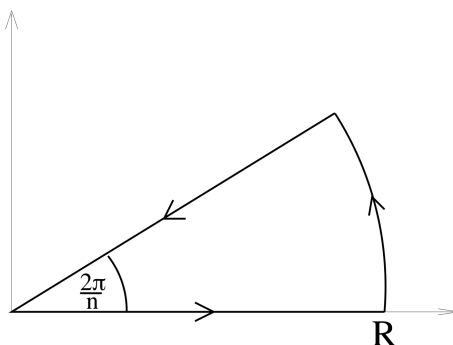
(iii) Calculando $\oint_{\partial C_N} f(z) dz$, concluya que $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}$

Indicación: Use (sin demostrar) que existe M , independiente de N , tal que $|\operatorname{cosec}(\pi z)| < M \quad \forall z \in \partial C_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$

P.14 (C3, 2002).

(a) Calcule $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$ para $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

Indicación: Considere el camino de la figura:



(b) Determine los radios de convergencia de las series siguientes:

$$(i) \sum (\log n)^2 z^n \quad (ii) \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} z^n$$

P.15 (C3, 2002). Es sabido que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente. El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de dicha serie haciendo uso de la teoría de variable compleja. Para ello considere el borde del cuadrado C_N de vértices:

$(N + \frac{1}{2})(-1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 + i)$, $(N + \frac{1}{2})(-1 + i)$, con $N \in \mathbb{N}$.

- (i) Considere la función $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$. Indique dónde f es holomorfa, encuentre sus polos y determine los órdenes correspondientes.
- (ii) Calcule los residuos de los polos de f .
- (iii) Calculando $\oint_{\partial C_N} f(z) dz$, concluya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Indicación: Use (sin demostrar) que existe M , independiente de N , tal que $|\cot \pi z| < M$
 $\forall z \in \partial C_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$