MATEMATICAS APLICADAS - MA26B
GUIA DE PROBLEMAS, 2007

Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Thomas Capelle, Francisco Collarte.

Curvas

P.1. Dados a, b, c tales que $c^2 = a^2 + b^2$, sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por: $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ con $\vec{r}(s) = a\cos(s/c)\hat{\imath} + a\sin(s/c)\hat{\jmath} + b(s/c)\hat{k}$

(a) Muestres que el parámetro s es la longitud de arco sobre C. Calcule el triedro de Frenet. Pruebe que las rectas tangentes a C forma un ángulo constante con el vector $\hat{k}$.
(b) Pruebe que las rectas normales principales (ie. aquellas que pasan por $\vec{r}(s)$ y tienen como dirección al vector normal $N(s)$) cortan al eje z en un ángulo constante e igual a $\pi/2$. Calcule la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de C. Verifique que $\kappa/\tau = a/b$

P.2. Dada una curva $\mathcal{C}$, se define la *evoluta* de $\mathcal{C}$ como el lugar geométrico de sus centros de curvatura.
Sea Γ la hélice circular de parametrización: $\vec{\sigma}(\theta) = (a\cos(\theta),\, a\sin(\theta),\, h\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, y a una constante real no nula.

(i) Pruebe que la evoluta de la hélice Γ es una hélice con la misma generatriz y mismo paso h. Denotémosla Γ'.
(ii) Demuestre que la evoluta de Γ' es Γ.
(iii) Pruebe que las curvaturas de Γ' y Γ son iguales, calcule el cuociente entre las torsiones de ambas curvas.

P.3. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(i) Demuestre que si todas las tangentes a una curva pasan por un punto fijo, ésta es una recta.
(ii) Demuestre que las tangentes en puntos correspondientes a una curva Γ y a la curva Υ, obtenida como el lugar geométrico de los centros de curvatura de Γ, son ortogonales.

P.4. ¿Cómo debe ser la función $f(t)$ para que la curva $\Gamma : \vec{\sigma}(t) = (a\cos(t),\, a\sin(t),\, f(t)) \quad t \in [0, \infty]$ sea una curva plana?.

P.5. Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{\sigma}(t) = (t\cos(t),\, t\sin(t),\, t) \quad t \in \mathbb{R}$$

(i) Demuestre que la curva se mueve sobre el manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
(ii) Demuestre que el ángulo que forma la recta tangente con el eje z es constante.
(iii) Demuestre que el vector normal en cualquier punto de la curva es perpendicular al eje z.
(iiii) Demuestre que el ángulo que forma el vector binormal con el eje z es constante.
(iiiii) Calcule la curvatura y torsión de Γ.
(iiiiii) Compruebe que el cuociente entre estas cantidades permanece constante. (Esta curva recibe el nombre de *hélice cónica*).

P.6. Dada una una curva Γ consideremos el *vector de Darboux* definido por $\delta := \tau\hat{t} + \kappa\hat{b}$, donde τ y κ son la torsión y curvatura respectivamente, demuestre que:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \delta \times \hat{t},\ \frac{d\hat{n}}{ds} = \delta \times \hat{n},\ \frac{d\hat{b}}{ds} = \delta \times \hat{b}$$

P.7. Calcular el área de laparte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2R^2$, donde R es una constante positiva. ¿Cuál es el área de la esfera que est dentro del cono?

P.8. Sea Γ el grafo de una función diferenciable f.

$$grafo(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = f(x)\}$$

(a) Determine una fórmula para la longitud de Γ
(b) Suponiendo f dos veces diferenciabl, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{2/3}}$$

(c) ¿Que sucede ahora si $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$?. Determine una fórmula para la superficie del grafo de f, si f es diferenciable (como función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

P.9. Dada una función contínua y no nula $g : [0, l_0] \to \mathbb{R}$ pruebe que existe una curva plana $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ de longitud "l_0"tal que su curvatura está dada por $|g|$, que es la función $|g|(x) = |g(x)|$.
Indicación: Defina $\theta(s) = \int_0^s g(t)dt,\ x(s) = \int_0^s \cos\theta(t)dt,\ y(s) = \int_0^s \sin\theta(t)dt$ y estudie $\vec{\gamma}(s) = x(s)\hat{\imath} + y(s)\hat{\jmath}$.

P.10 (C1, 2001). Considere una curva regular $\mathcal{C}$ que se mueve en la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen del sistema de coordenadas (para fijar ideas, piense en la superficie terrestre y en un gaseoducto representado por $\mathcal{C}$). Si (θ, φ) son los ángulos en coordenadas esféricas que describen $\mathcal{C}$, entonces éstos satisfacen la relación:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = 1.$$

(i) Sabiendo que $\mathcal{C}$ se inicia en la intersección de la esfera con el eje z para $z \geq 0$ (es decir, en el polo norte) y concluye en un punto que pertenece al plano $z = 0$, determine una parametrización de $\mathcal{C}$ en términos de θ ó φ y bosqueje la curva.
(ii) Determine la masa del gaseoducto, suponiendo que la densidad lineal es

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{R + y}.$$

(iii) Determinar la integral de trabajo para el campo vectorial definido por $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}, 0, -z\right)$, a lo largo de la curva $\mathcal{C}$.

Integrales de linea

P.1. Calcule la longitud de las curvas descritas por las siguientes parametrizaciones:

(i) $\vec{\sigma}(t) = (\cos^4(t), \sin^4(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$
(ii) $\vec{\sigma}(t) = (\cosh^2(t), \sinh^2(t)) \quad t \in [0, 1]$
(iii) $\vec{\sigma}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t) \quad t \in [0, 1]$

P.2. Considere la curva Γ descrita por $\vec{\sigma}(t) = (a\cos(t),\, b\sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$, que como es sabido, es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Demuestre que la longitud L de esta curva esta dada por la integral:

$$L = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)}\, dt, \quad \text{donde} \quad e = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - a^2}\,\text{(excentricidad de la elipse)}.$$

¿Que ocurre cuando $a = b$?.

P.3. Hallar la masa total de un alambre "en v" cuya forma es la de la curva $y = |x|, \quad x \in [-1, 1]$ si la densidad en cada punto de el es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto. Encuentre su centro de masa.

P.4. Calcule las coordenadas del centro de masa del alambre homogéneo($\rho = \rho_0$) para las siguientes curvas:

(i) El cuadrado $|x| + |y| = 1$.
(ii) La mitad superior($y \geq 0$) del cuadrado anterior.
(iii) La porción de la catenaria $y = cosh(x) \quad x \in [-1, 1]$.
(iiii) Los lados del triángulo isósceles con vértices en $A = (0, 0), B = (2, 0)$ y $C = (1, h)$.

Integrales de Trabajo

P.1. Pruebe que los siguientes campos vectoriales son conservativos:

(i) $F(x, y, z) = (\pi, e, e^\pi)$
(ii) $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$
(iii) $F(x, y, z) = (3y + 2z^2, 3x, 4xz)$

P.2. Dentro de los siguientes campos vectoriales, sólo uno de ellos es no conservativo, determine cuál de ellos es. Para esto, calcule la integral de trabajo sobre la circunferencia unitaria centrada en el origen, o bien, encuentre un potencial.

- $F(x, y) = (3x^2 + 2xy^2 + y, 2x^2y + x + 3y^2)$
- $F(x, y) = (y\cos(x) + \sin(y) + 1, \sin(x) + x\cos(y) + 1)$
- $F(x, y) = (e^x \sin(y) + 1, e^x \cos(y) + 1)$
- $F(x, y) = (2xy + 1, x^2 + 4y)$
- $F(x, y) = (x^2, xy^2)$
- $F(x, y) = (15x^4 + 6x^2y^3 + y, 6x^3y^2 + x + 15y^4)$

P.3. Calcular la integral de línea del campo:

$$F(x, y, z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right)$$

a lo largo de las curvas parametrizadas por:

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{\sinh(5t^4)}{\sinh(5)}, t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, \frac{\ln(1 + 6t^8)}{\ln(7)}\right) \quad \text{con}\, t \in [0, 1]$$

$$\vec{\mu}(t) = \left(\ln(t^2 - t + 1), \sin(t^3 + 3t^2 - 4t), \frac{\cosh(t^5 - t) - 1)}{(t^2 + t + 1)^{\frac{4}{7}}}\right) \quad \text{con}\, t \in [0, 1]$$

P.4. Considere la curva Γ que se mueve sobre la superficie de la esfera centrada en el origen de radio a, y tal que la relación entre sus ángulos en coordenadas esféricas es $\phi = \frac{\theta}{2}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$. Calcule el trabajo realizado por el campo F a lo largo de la curva Γ.

P.5 (Control 1, 2002).

(a) Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y - z)\hat{\imath} + (z - x)\hat{\jmath} + (x - y)\hat{k}$.
Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{\sigma}(\varphi) = (a\sin(\varphi)\cos(\alpha),\, a\sin(\varphi)\sin(\alpha),\, a\cos(\varphi)), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

donde $a > 0$ y $0 < \alpha < \pi$.
Compruebe que dicha curva está en la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $y = x\tan(\alpha)$, y demuestre que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a lo largo de ella es:

$$\pm 2\pi a^2(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))$$

interprete el signo.

(b) Sea $\vec{F}(x, y) = cxy\hat{\imath} + x^6y^2\hat{\jmath}$, con $c > 0$, un campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, que debe moverse desde el origen del sistema de coordenadas hasta la recta $x = 1$ a lo largo de la curva: $y = ax^b$ donde $a, b > 0$. Encuentre un valor de a (en términos de c) de modo que el trabajo realizado por esta fuerza sea independiente de b.

Integrales de Flujo y Superficies

P.1. Considerar la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por:

$$\vec{r}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \quad 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

(a) Bosqueje la superficie
(b) Hallar la normal unitaria a la superficie
(c) Hallar la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$
(d) Si $\vec{r_0} \in \Sigma$, mostrar que el segmento de recta horizontal que va del eje z a $\vec{r_0}$ está contenido en Σ y el plano tangente a la superficie en $\vec{r_0}$.

P.2. Sea S la superficie definida por $z = x\phi(y/x)$ donde ϕ esuna función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie S pasan por el origen de los ejes de coordenadas. Indicación: calcule el plano tangente a partir de la normal.

P.3. Dada la superficie definida por: $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$

(a) Bosquejar su gráfico. Dibuje las curvas que se producen en las intersecciones: $x = a, y = b, z = c$
(b) Calcule el plano tangente en el punto $(1, 1, 2)$.
(c) Calcule el centro de masa suponiendo densidad constante.

P.4 (Examen 2002). Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 = (z + a)^2$ con $z \in [0, h]$ donde a y h son constantes positivas fijas. Dibuje la superficie S.
Considere el campo vectorial $\vec{F}(\rho, \theta, z) = (1/\rho)\,\hat{\rho} + (\rho^2 + z^2)\,\hat{\theta} + z\,\hat{k}$, donde ρ, θ y z son las variables en coordenadas cilíndricas. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S, primero por definición y luego haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

P.5 (C1 2002). Considere aquella curva Γ sobre la superficie del paraboloide de ecuación: $x^2 + y^2 - z = 0$, que al ser descrita en coordenadas cilíndricas, las variables $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, \infty[$ satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho, \quad \text{con condiciones iniciales} \quad \rho(0) = 1\,, \quad \frac{d\rho}{d\theta}(0) = -1.$$

(i) Obtenga una parametrización para la curva en términos de θ y bosquéjela.

(ii) Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z(1 + xz)e^{xz+y},\, xze^{xz+y},\, x(1 + xz)e^{xz+y})$, considere una partícula confinada a moverse *a través de la curva* Γ. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$, al llevar dicha partícula desde la altura $z = 1$ hasta $z = z_0$ con $0 < z_0 \leq 1$. ¿Cuál será el trabajo para llevarla hasta el origen?.

(iii) Imagine que la curva es un alambre cuya densidad lineal de masa es $\rho(x, y, z) = \sqrt{1 + 2z}$. Calcule la masa total y las coordenadas del centro de masa del alambre.

Indicación: Sepa que, para $a > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x)\,dx = \frac{a}{1+a^2} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin(x)\,dx = \frac{1}{1+a^2}.$$

P.6 (C1 2001). Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ y la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$, con $4R^2 \geq z \geq 0$.

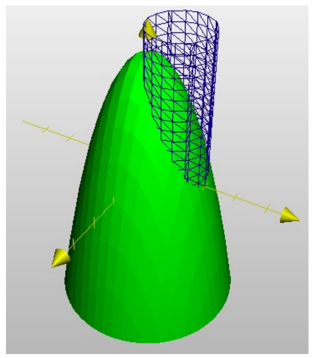

FIGURA 1

(i) Parametrice la superficie de la porción del cilindro que queda fuera del paraboloide (zona oscurecida en la Figura 1). Indicación: Use coordenadas cilíndricas con origen en (0,0,0).

(ii) Calcule el área de dicha porción del cilindro.

P.7 (C1 2001). Sea S una superficie definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$, para (x, y) en un región $D = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathcal{R}^2$. Suponiendo F de clase $\mathcal{C}^1$, pruebe que

$$\int\int_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dA = \int_a^b \int_c^d \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dy$$

Indicaciones:

(i) Observe que una parametización regular de S es:

$$\vec{\sigma} : D \longrightarrow \mathcal{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto (x, y, z(x, y))$$

donde $z = z(x, y)$ queda definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

(ii) Note que si define

$$g(x, y) = F(x, y, z(x, y)),$$

entonces $g \equiv 0$, al igual que sus derivadas.

P.8 (EX 2001).

(a) Sea $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\hat{\imath} + F_2(x,y,z)\hat{\jmath} + F_3(x,y,z)\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$.Suponga que $\vec{F}$ es el rotor de algún campo vectorial y que $F_3(x,y,z) = \vec{F}\cdot\hat{k} = 1$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del semicasquete esférico $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0$, orientado según la normal superior.

(b) Considere una cañería cilíndrica de longitud L y de radios a y b, la cual conduce un líquido a temperatura T_1, mayor que la temperatura exterior T_0. Se desea determinar el régimen estacionario de la temperatura; para ello suponga que la conductividad térmica k es constante y suponga además simetría cilíndrica, es decir, $T(\rho,\,\theta,\,z) = T(\rho)$.

(i) Para $\rho \in [a,b]$ considere el flujo de calor

$$\Phi(\rho) := \iint_{\Sigma(\rho)} k\,\nabla T \cdot d\vec{S}$$

a través del manto del cilindro de radio ρ y longitud L ($\Sigma(\rho)$).
Usando el Teorema de la divergencia, demuestre que $\Phi(\rho)$ es constante e igual a $\Phi(b)$.

(ii) Deduzca que $\rho\,\frac{\partial T}{\partial \rho}$ es constante y encuentre una expresión analítica para $T(\rho)$ en función de $T_0,\ T_1,\ a,\ b$.

(iii) Pruebe que $\Phi(b) = 2\pi Lk(T_0 - T_1)/\ln(b/a)$.

Indicación: Recuerde que la ecuación del calor para el caso en que la conductividad k es constante está dada por:

$$c\,\varrho\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\triangle T$$

con lo que para el caso estacionario, se trata de la ecuación de Laplace:

$$k\,\triangle T = 0$$