

Profs. FELIPE ALVAREZ  
ROBERTO COMINETTI

## Matemáticas Aplicadas

### Guía #2: Superficies e Integrales de Flujo

**P1.-** Considerar la superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada por

$$\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 4\pi.$$

- a) Bosquejar la superficie.
- b) Hallar una normal unitaria a la superficie.
- c) Hallar la ecuación del plano tangente a  $\Sigma$  en el punto  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ .
- d) Si  $\vec{r}_0 \in \Sigma$ , mostrar que el segmento de recta horizontal que va del eje  $z$  a  $\vec{r}_0$  está contenido en  $\Sigma$  y en el plano tangente a la superficie en  $\vec{r}_0$ .

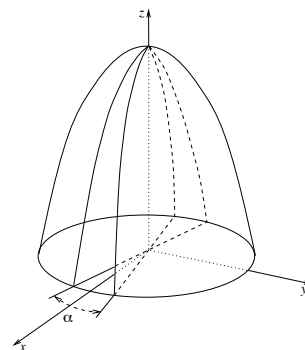
**P2.-** Sea  $S$  la superficie definida por  $z = x\phi(y/x)$  donde  $\phi$  es una función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie  $S$  pasan por el origen de los ejes de coordenadas. Indicación: calcule el plano tangente a partir de la normal.

**P3.-** Dada la superficie definida por  $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$

- a) Bosquejar su gráfico. ¿Qué curvas se producen en las intersecciones con los planos  $x = cte, y = cte, z = cte$ ?
- b) Calcule el plano tangente en el punto  $(1, 1, 2)$ .
- c) Calcule el centro de masa suponiendo densidad constante.

**P4.-** Considere la superficie  $S$  definida por  $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$ , a través de la cual se practica una doble abertura en un ángulo  $\alpha$ .

Suponiendo una distribución de masa uniforme de densidad  $\sigma$ , calcular la masa total y el centro de masa de  $S$ . Puede usar argumentos de simetría.



**P5.-** El cilindro  $x^2 + y^2 = x$  divide la esfera unitaria  $S$  en dos regiones  $S_1$  y  $S_2$ , donde  $S_1$  está dentro del cilindro y  $S_2$  afuera. Hallar la razón de las áreas  $A(S_2)/A(S_1)$ .

**P6.-** Una esfera inscrita en un cilindro es cortada por dos planos perpendiculares al eje del cilindro. Demuestre que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre los dos planos tienen la misma área.

**P7.-** Hallar el área del sector del cilindro  $x^2 + z^2 = a^2$  que se encuentra dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 2ay$  y simultáneamente en el octante positivo. Grafique.

**P8.-** Hallar el área de la superficie limitada por la intersección de los cilindros  $x^2 + y^2 = a^2$  y  $x^2 + z^2 = a^2$ .

**P9.-** a) Calcular el área de la parte del cono  $x^2 + y^2 = z^2$  con  $z \geq 0$  que está dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ , donde  $R$  es una constante positiva.  
b) ¿Cuál es el área de la parte de la esfera que está dentro del cono?

**P10.-** Hallar la masa de una superficie esférica  $S$  de radio  $R$  tal que en cada punto  $(x, y, z) \in S$  la densidad de masa es igual a la distancia de  $(x, y, z)$  a un punto fijo  $(x_0, y_0, z_0) \in S$ .

**P11.-** Calcular el centro de masa de una semiesfera de radio  $R$  centrada en el origen, con densidad superficial de masa  $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

**P12.-** Sea  $S$  la esfera de radio  $R$  y  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ . Demuestre que:

$$\iint_S \frac{dA}{\|\vec{r} - \vec{p}\|} = \begin{cases} 4\pi R & \text{si } \|p\| < R \\ 4\pi R^2 / \|\vec{p}\| & \text{si } \|\vec{p}\| > R \end{cases}$$

**P13.-** Sea  $S$  una superficie cuya normal forma un ángulo  $\theta$  con la vertical. Encuentre el área de la proyección vertical sobre el plano  $xy$  de  $S$  en función de  $\theta$  y el área de  $S$ .

**P14.-** Sea  $S$  la superficie cerrada formada por el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  y su base  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = 0$ . Sea  $\vec{E}$  el campo  $\vec{E}(x, y, z) = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$ . Hallar el flujo a través de  $S$  orientada exteriormente.

**P15.-** Calcular la integral  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , donde  $S$  es la superficie de la semibola  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$  y  $\vec{F} = (x + 3y^5)\hat{i} + (y + 10xz)\hat{j} + (z - xy)\hat{k}$  (orientar  $S$  según la normal exterior).

**P16.-** Sea la superficie definida por  $z = \rho^2$  (en coordenadas cilíndricas) con  $0 \leq \rho \leq R; \theta \in [0, 2\pi]$ . Calcule el área y el flujo del campo vectorial  $x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$  a través de  $S$  (orientada según la normal superior).

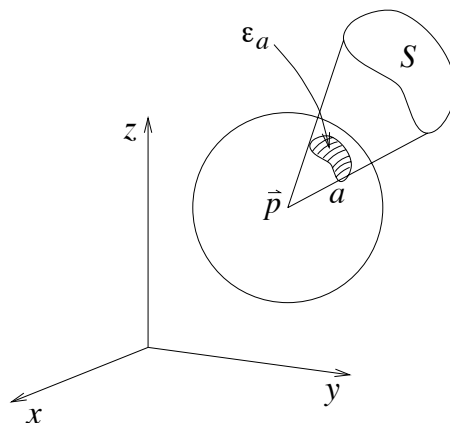
**P17.-** Considere el campo  $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$  y la región  $\Omega$  definida por  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \in [0, b]$ ;  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , donde  $a > 0$  y  $b > 0$  son constantes dadas.

a) Evalúe las integrales de flujo sobre cada una de las cinco caras de la región. Haga un bosquejo y considere la orientación exterior.

b) Interprete físicamente los cinco flujos calculados, así como el flujo total a través de la superficie  $\Omega$ .

**P18.-** Sea  $S$  una superficie suave y  $\vec{p}$  un punto tal que toda recta que pasa por  $\vec{p}$  corta  $S$  en a lo más un punto. Sea  $\Omega$  la unión de todas las semirectas que parten de  $\vec{p}$  y pasan por  $S$  y sea  $\varepsilon_a$  la intersección de  $\Omega$  con la esfera (superficie esférica) de centro  $\vec{p}$  y radio  $a$ . Demuestre que:

$$s = \frac{\text{área de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \hat{n}}{\|\vec{r} - \vec{p}\|^3} dA.$$



Nota:  $s$  se denomina ángulo sólido de  $S$  con respecto a  $\vec{p}$ .

**P19.-** Sea  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de clase  $C^1$  tal que

$$\|\vec{F}(\vec{r})\| \leq \frac{1}{\|\vec{r}\|^a + 1} \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3.$$

con  $a > 2$ . Muestre que  $\int_{\mathbb{R}^3} \text{div}(\vec{F}) = 0$ .

**P20.-** Si  $\vec{F} = (y + z, z + x, x + y)$  y  $S$  es la superficie del cubo limitado por  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ . Calcular  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  con  $S$  orientado según la normal exterior.