DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCAS FISICAS Y MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Cálculo Vectorial, Variable Compleja y Ecuaciones en Derivadas Parciales

Apuntes para el curso MA26B
Matemáticas Aplicadas

Felipe Alvarez
Juan Diego Dávila
Roberto Cominetti
Héctor Ramírez C.

Agosto 2005

Prefacio

El cálculo vectorial en $\mathbb{R}^n$, y el cálculo diferencial e integral de funciones de variable compleja son materias fundamentales del análisis matemático, tanto por su interés en matemáticas puras como por su utilidad para modelar y resolver problemas en ingeniería. Una gran variedad de estos últimos se expresan en términos de ecuaciones en derivadas parciales (EDP), para cuya resolución los métodos basados en variable compleja son de gran eficacia.

El objetivo de estos apuntes es proporcionar los elementos básicos del cálculo vectorial, de la teoría de funciones de variable compleja e ilustrar su utilización en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, tal como se expone en el curso de Matemáticas Aplicadas. Esta es una de las asignaturas del segundo año de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Estos apuntes se basan en las notas escritas en colaboración con mi colega el Profesor Roberto Cominetti, y se han beneficiado de una activa participación de los Profesores Héctor Ramírez Cabrera y Juan Diego Dávila. Buena parte del material referente a la teoría de EDP se debe a este último. Agradezco a todos ellos las múltiples e interesantes discusiones que hemos tenido sobre diversos aspectos del curso.

Mis más sinceros agradecimientos a Miguel Carrasco y Claudio Pizarro, quienes participaron activamente en la confección de este apunte al transcribir en LaTeX buena parte de las notas manuscritas, elaborar todas las figuras y sugerir varias ideas para mejorar la presentación. Sin ellos, la versión actual de los apuntes no existiría. También debo agradecer a Regina Mateluna por su eficiente y siempre bien dispuesta colaboración.

Finalmente, quisiera agradecer el financiamiento proporcionado por el Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile y por el proyecto Fondef IDEA+.

Felipe Alvarez

Agosto 2004

Derechos de autoría DIM

Se concede permiso para imprimir o almacenar una única copia de este documento. Salvo por las excepciones más abajo señaladas, este permiso no autoriza fotocopiar o reproducir copias para otro uso que no sea el personal, o distribuir o dar acceso a versiones electrónicas de este documento sin permiso previo por escrito del Director del Departamento de Ingeniería Matemática (DIM) de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM) de la Universidad de Chile.

Las excepciones al permiso por escrito del párrafo anterior son:

(1) Las copias electrónicas disponibles bajo el dominio uchile.cl.

(2) Las copias distribuidas por el cuerpo docente de la FCFM en el ejercicio de las funciones que le son propias.

Cualquier reproducción parcial de este documento debe hacer referencia a su fuente de origen.

Este documento fue financiado a través de los recursos asignados por el DIM para la realización de actividades docentes que le son propias.

Índice general

I Cálculo Vectorial **1**

1. Curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$ **3**

1.1. Curvas . . . 3

1.1.1. Reparametrización de curvas regulares . . . 5

1.1.2. Parametrización en longitud de arco . . . 6

1.1.3. Velocidad, rapidez y vector tangente . . . 8

1.1.4. Integral de Línea . . . 8

1.1.5. Centro de Masa . . . 9

1.1.6. Curvatura y vector normal . . . 9

1.1.7. Vector binormal y Torsión . . . 10

1.1.8. Fórmulas de Frenet . . . 12

1.1.9. Planos de Frenet . . . 13

1.2. Coordenadas ortogonales . . . 13

1.2.1. Triedro ortogonal y factores escalares . . . 14

1.2.2. Coordenadas cilíndricas . . . 15

1.2.3. Coordenadas esféricas . . . 16

1.2.4. Coordenadas toroidales . . . 17

1.2.5. Gradiente en coordenadas ortogonales . . . 18

1.2.6. Diferencial de volumen . . . 19

1.3. Superficies . . . 23

1.3.1. La noción de superficie . . . 23

1.3.2. Vectores tangente y normal a una superficie . . . 26

1.3.3. Area e integral de superficie . . . 27

1.3.4. Superficies Orientables . . . 32

1.4. Ejercicios . . . 33

2. Integración de campos vectoriales **39**
2.1. Integral de Trabajo . . . 39
2.1.1. Campos Conservativos . . . 41
2.2. Integral de flujo . . . 43
2.2.1. Líneas de flujo de un campo vectorial . . . 43
2.2.2. Integral de flujo de un campo vectorial . . . 46
2.3. Ejercicios . . . 49

3. Divergencia y rotor **53**
3.1. El teorema de la divergencia. . . . 53
3.1.1. Divergencia de un campo radial . . . 57
3.1.2. Flujo eléctrico - Ley de Gauss . . . 58
3.2. Divergencia en coordenadas curvilíneas . . . 59
3.3. El teorema de Stokes . . . 60
3.4. Rotor en coordenadas curvilíneas . . . 65
3.5. El teorema de Green en el plano . . . 67
3.5.1. Fórmulas de Green . . . 69
3.6. Ejercicios . . . 69

II Funciones de Variable Compleja **71**

4. El plano complejo **73**
4.1. Estructura algebraica del plano complejo . . . 73
4.2. Estructura métrica del plano complejo . . . 74
4.3. Representación polar y raíces de la unidad . . . 76

5. Continuidad y derivación **79**
5.1. Funciones continuas . . . 79
5.2. Derivada compleja: condiciones de Cauchy-Riemann . . . 80
5.3. Propiedades básicas de la derivada compleja . . . 82
5.4. Ejercicios . . . 83

6. Funciones en serie de potencias **85**
6.1. Definiciones y propiedades básicas . . . 85
6.2. Ejemplos de funciones en serie de potencias . . . 87
6.2.1. La función exponencial . . . 87
6.2.2. Funciones hiperbólicas . . . 88
6.2.3. Funciones trigonométricas . . . 88
6.2.4. Función logaritmo . . . 89
6.2.5. Otras funciones . . . 91
6.3. Ejercicios . . . 91

7. Integral en el plano complejo **93**
7.1. Definición . . . 93
7.2. Propiedades y ejemplos . . . 94
7.3. El teorema de Cauchy-Goursat . . . 99
7.4. Ejercicios . . . 101

8. Fórmula de Cauchy y primeras consecuencias **103**
8.1. La fórmula de Cauchy . . . 103
8.2. Desarrollo en serie de Taylor . . . 104
8.3. Otras consecuencias . . . 105
8.4. Ejercicios . . . 106

9. Teorema de los residuos **109**
9.1. Puntos singulares, polos y residuos . . . 109
9.2. El teorema de los residuos . . . 111
9.3. Ejemplos . . . 112
9.4. Series de Laurent . . . 117
9.5. Ejercicios . . . 121

10. Evaluación de integrales vía residuos **123**
10.1. Integrales de funciones trigonométricas . . . 123
10.2. Integrales impropias sobre dominios no acotados . . . 125
10.3. Ejercicios . . . 134

11. Funciones armónicas de dos variables reales **137**
11.1. Definición . . . 137
11.2. Funciones armónicas conjugadas . . . 138
11.3. Propiedad de la media y fórmula integral de Poisson . . . 140
11.4. Ejercicios . . . 142

III Ecuaciones en Derivadas Parciales **143**

12. Ecuaciones lineales de segundo orden **145**
12.1. Ecuaciones parabólicas y fenómenos de difusión . . . 145
12.1.1. Conducción del calor en una barra unidimensional . . . 145
12.1.2. Conducción del calor en un cuerpo . . . 147
12.1.3. Expansión de un gas en un medio isótropo y homogéneo . . . 148
12.2. Ecuaciones hiperbólicas y fenómenos oscilatorios . . . 149
12.2.1. Oscilaciones de una cuerda . . . 149

12.2.2. Oscilaciones de una membrana . . . 150
12.2.3. Vibraciones longitudinales de una barra . . . 151
12.3. Ecuaciones elípticas y fenómenos estacionarios . . . 151
12.3.1. Membrana en reposo . . . 151
12.3.2. Potencial de campo eléctrico . . . 152
12.4. Condiciones iniciales y de borde . . . 153
12.5. Otras ecuaciones de la física . . . 154
12.6. Principio de superposición . . . 155
12.7. La ecuación de superficies mínimas . . . 156

13. Separación de variables y series de Fourier 159
13.1. Ejemplo modelo: ecuación del calor . . . 159
13.1.1. Primera etapa: separar variables . . . 159
13.1.2. Segunda etapa: imponer condiciones de borde . . . 161
13.1.3. Tercera etapa: imponer la condición inicial . . . 162
13.2. Series de Fourier . . . 164
13.3. Aplicación a la resolución de EDPs . . . 169
13.3.1. Ecuación del calor en una barra finita: condiciones de borde de tipo Dirichlet . . . 169
13.3.2. Ecuación del calor en una barra finita. Condiciones de borde de tipo Neumann . . . 171
13.3.3. Ecuación del calor en barra finita. Condiciones mixtas . . . 173
13.3.4. Ecuación de Laplace en banda semi-infinita. . . . 175
13.3.5. Oscilaciones en una membrana rectangular . . . 176
13.3.6. Ecuación de Laplace en un rectángulo . . . 179
13.3.7. Ecuación de ondas. Cuerda finita. . . . 180

14. La transformada de Fourier 183
14.1. Definición y el teorema de inversión . . . 183
14.2. Propiedades fundamentales . . . 184
14.2.1. La transformada de una derivada . . . 184
14.2.2. El teorema de convolución . . . 185
14.2.3. Propiedades de la transformada de Fourier . . . 186
14.3. Ejemplos de transformadas de Fourier . . . 186
14.4. Aplicación a la resolución de EDPs . . . 189
14.4.1. Ecuación del calor en una barra infinita . . . 189
14.4.2. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición en el extremo de tipo Dirichlet . 191
14.4.3. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición de Neumann . . . 192
14.4.4. Problema de Dirichlet en un semiplano . . . 193

15. Tópicos adicionales en EDPs **195**

15.1. Propiedad de la media para funciones armónicas 195

15.2. Principio del máximo para funciones armónicas 196

15.3. Principio del máximo para la ecuación del calor 197

15.4. Unicidad para la ecuación de Laplace y el calor 198

Parte I

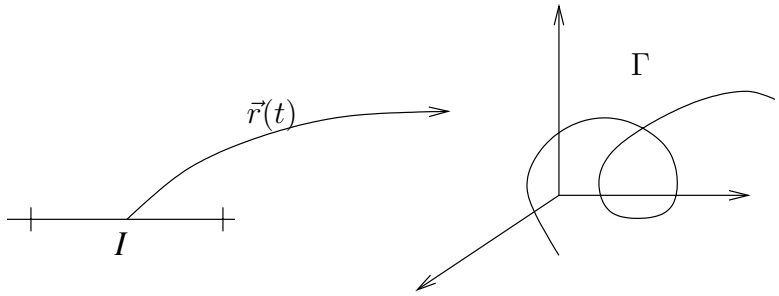
Cálculo Vectorial

Capítulo 1

Curvas y superficies en ^{3}

1.1. Curvas

La noción de curva es la formalización matemática de la idea intuitiva de trayectoria de una partícula. Por esta razón los casos $n = 2$ y $n = 3$ juegan un rol principal en lo que sigue.



Definición 1.1.1. *Un conjunto* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ *se llamara* curva *si existe una función continua* $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*, llamada* parametrización *de la curva, tal que*

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}.$$

Luego, diremos que la curva Γ *es*

1) suave*: si admite una parametrización de clase* $\mathcal{C}^1$*.*

2) regular*: si admite una parametrización suave* $\vec{r}$ *tal que* $\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| > 0$*, para todo* $t \in I$*.*

3) simple*: si admite una parametrización inyectiva (i.e. no hay puntos múltiples).*

4) cerrada*: si admite una parametrización* $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$*.*

Ejemplo 1.1.2. . *Se define la* cicloide *como la curva descrita por un punto solidario a una rueda (de radio R) que gira sin resbalar.*

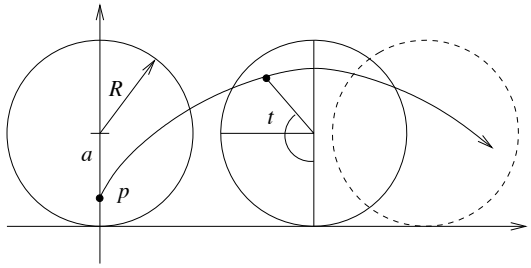


Figura 1.1: cicloide

Su parametrización viene dada por

$$\vec{r}(t) = (Rt, R) - (a \operatorname{sen} t, a \cos t) = (Rt - a \operatorname{sen} t, R - a \cos t),$$

donde a es la distancia del punto al centro de la rueda.

Notemos que cuando $a < R$ la trayectoria es simple y regular, mientras que en el caso $a > R$ deja de ser simple aunque sigue siendo regular.

El caso crítico es $a = R$, pues para este valor la trayectoria es simple pero no es regular.

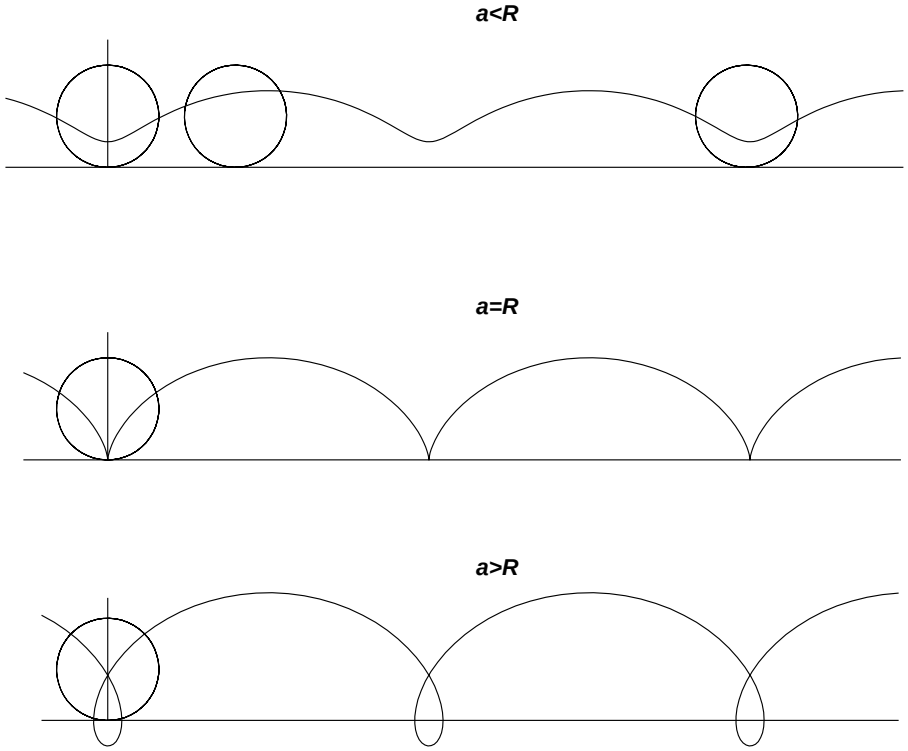
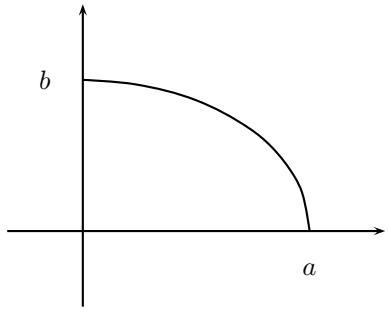


Figura 1.2: trayectoria de la cicloide para distintos valores de a.

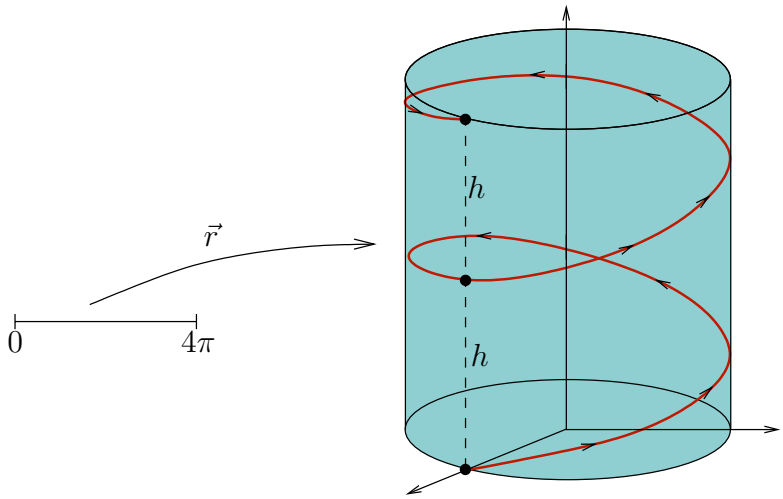
Es importante observar que la parametrización es siempre suave a pesar de que la curva presenta esquinas, de hecho, esto obliga a pasar por las esquinas con velocidad nula.

Ejemplo 1.1.3. *La función* $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi/2]$ *parametriza el cuarto de elipse que se ve a continuación*



Esta curva puede se parametrizar también mediante $\vec{r}_1(x) = (x, b\sqrt{1-(x/a)^2}), x \in [0, a]$.

Ejemplo 1.1.4. *La función* $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, \frac{ht}{2\pi}), t \in [0, 4\pi]$ *parametriza una* hélice*, que realiza 2 vueltas llegando a una altura* h*, como se ve en la proxima figura*



Podemos pensar que la hélice es una trayectoria que sigue el contorno de un cilindro dado (en este caso de radio a *y altura* h*).*

Insistamos que una curva Γ es un conjunto, que no debe confundirse con la parametrización que la define. De hecho, una curva admite muchas parametrizaciones tal como vimos en el ejemplo 1.1.3. Intuitivamente, una misma curva puede diferentes maneras y con distintas velocidades.

1.1.1. Reparametrización de curvas regulares

Definición 1.1.5. *Dos parametrizaciones* $\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *y* $\vec{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *de una misma curva* Γ *se dicen* equivalentes *si existe un cambio de variables continuo y biyectivo* $\theta : [a, b] \to [c, d]$ *tal que* $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\theta(t))$ *para todo* $t \in [a, b]$*. En este caso, la función* θ *se llamará* reparametrización.

Una función continua y biyectiva θ definida en un intervalo será necesariamente creciente o decreciente. En el primer caso diremos que la reparametrización preserva la orientación, mientras que en el segundo caso diremos que la invierte.

La definición anterior conlleva naturalmente a preguntarnos lo siguiente

(1) ¿Son todas las parametrizaciones equivalentes?

(2) En caso afirmativo, ¿existe alguna parametrización más "natural" que las otras?

La respuesta a (1) es en general no, como lo muestra la siguiente curva y las dos parametrizaciones que se indican a continuación

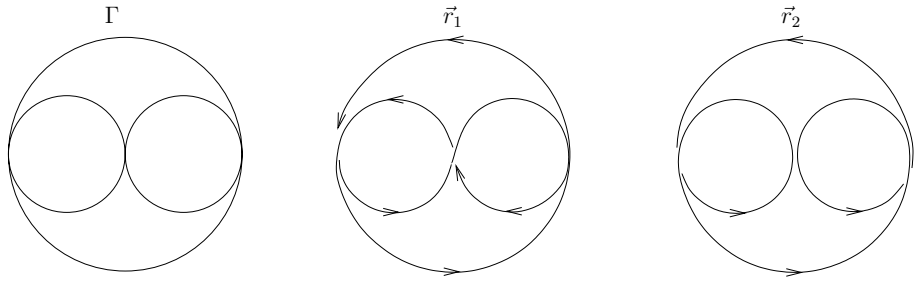


Figura 1.3: Parametrizaciones equivalentes para la misma curva Γ

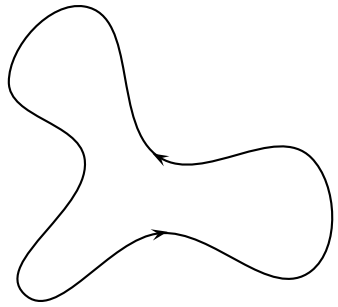
Sin embargo, se tiene el siguiente resultado que admitiremos sin demostración.

Proposición 1.1.6. *Sea Γ una curva simple y regular. Entonces todas sus parametrizaciones regulares son inyectivas y equivalentes.*

En esta situación, una parametrización regular $\vec{r}$ separa en dos al conjunto de parametrizaciones regulares:

- las que tiene la misma orientación que $\vec{r}$ (que llamaremos *orientación positiva*), y
- las que tienen la orientación opuesta (que se llamara *orientación negativa*).

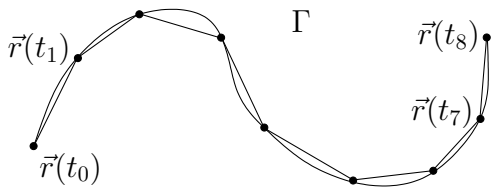
Evidentemente las nociones de orientación positiva y negativa quedan determinadas por la parametrización inicial que sirve de referencia. Existe sin embargo una convención en el caso de curvas planas cerradas y simples, esta es el escoger la orientación positiva como aquella obtenida al recorrer la curva en sentido *anti-horario*.



1.1.2. Parametrización en longitud de arco

Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Con el fin de definir la "longitud" de Γ procedemos a aproximarla por una poligonal a través de los puntos $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \ldots, \vec{r}(t_n)$ donde $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ es una malla de puntos.

Intuitivamente, cuando el peso de la malla $\Delta(\{t_i\}) = max(t_{i+1} - t_i)$ tiende a cero, la longitud de la poligonal converge hacia el largo de la curva Γ.



$L(\Gamma) \approx \sum_{i=1}^{8} \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|$

Definición 1.1.7. *Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Definimos la longitud de Γ por:*

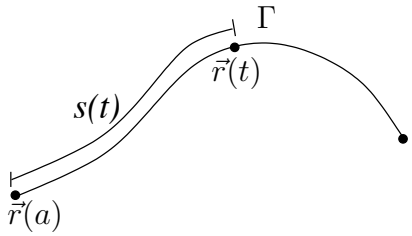
$$L(\Gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right\| d\tau \tag{1.1}$$

Se cumple el siguiente resultado

Proposición 1.1.8. *La suma $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|$ converge cuando el paso $\Delta(\{t_i\})$ tiende a cero, hacia la integral $\int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right\| d\tau$. El valor de esta integral no depende de la parametrización regular $\vec{r}$, y en por lo tanto el largo de Γ está bien definido.*

Definición 1.1.9. *Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular. Definimos la longitud de arco $s\colon [a,b] \to [0, L(\Gamma)]$*

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right\| d\tau \tag{1.2}$$



Intuitivamente $s(t)$ es el recorrido hasta el instante t. Claramente

$$\frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right\| > 0$$

con lo cual $s(t)$ es una biyección estríctamente creciente con s y s^{-1} de clase $\mathcal{C}^1$. Denotaremos por $t\colon [0, L(\Gamma)] \to [a,b]$ la función inversa de s, la cual nos permite reparametrizar la curva Γ usando como parámetro la longitud de arco o camino recorrido, vale decir

$$\vec{r}_1(s) = \vec{r}_1(t(s)),\ s \in [0, L(\Gamma)]$$

Notemos que $\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right\|} > 0$ con lo cual la reparametrización preserva la orientación. Es fácil ver que cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización en longitud de arco (salvo orientación) por lo cual esta puede ser considerada como *parametrización canónica*. La llamaremos *parametrización natural* o *en longitud de arco*

Ejemplo 1.1.10. *Encuentre la parametrización natural de la cicloide $\vec{r}(t) = R(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$*

Respuesta:

$$\vec{r}_1(s) = 2R\left(\arccos\left(1 - \frac{s}{4R}\right) - \left(1 - \frac{s}{4R}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{4R}\right)^2}, 1 - \left(1 - \frac{s}{4R}\right)^2 \right) \quad s \in [0, 8R].$$

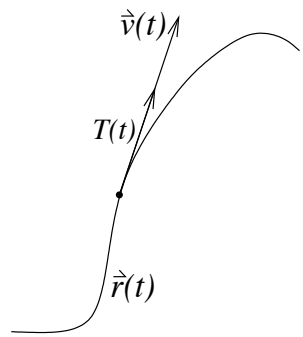
Ejercicio: Encontrar la reparametrización en longitud de arco para la hélice $\vec{r}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, \frac{ht}{2\pi}),\ t \in [0, 4\pi]$.

1.1.3. Velocidad, rapidez y vector tangente

Definición 1.1.11. *Consideremos $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de una curva simple Γ. Definimos el vector* velocidad*, la* rapidez *y el* vector tangente*, respectivamente, mediante*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t), \quad v(t) = \|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| = \frac{ds}{dt}(t), \quad T(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)/\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\|, \tag{1.3}$$

donde $s\colon [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ representa la función de longitud de arco.



Notemos que si $\vec{r}$ es la parametrización natural entonces

$$T(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}(s) \tag{1.4}$$

debido a que $\|\frac{d\vec{r}}{ds}(s)\| = 1$. Esto nos permite interpretar la parametrización natural como aquella que se obtiene al recorrer la curva Γ con velocidad constante unitaria, y además nos indica que el vector tangente sólo depende del punto en el cual es calculado y no de la parametrización regular $\vec{r}$ asociada a la curva, salvo por la orientación. En efecto, si $\vec{r}_1(\tau) = \vec{r}(\theta(\tau))$ con θ una reparametrización, entonces

$$\frac{d\vec{r}_1}{d\tau}(\tau)/\|\frac{d\vec{r}_1}{d\tau}(\tau)\| = \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta(\tau))\frac{d\theta}{d\tau}(\tau)/\|\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta(\tau))\||\frac{d\theta}{d\tau}(\tau)| = \text{signo}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)T(\theta(\tau)).$$

Enfaticemos que lo anterior nos permite calcular el vector tangente a Γ en el punto $p \in \Gamma$ de dos maneras distintas:

(1) $T(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)/\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\|$ donde t es tal que $\vec{r}(t) = P$.

(2) Calcular la parametrización en longitud de arco $\vec{r}_1(s)$ y calcular

$$T(s) = \frac{d\vec{r}_1}{ds} \qquad \text{con } s \text{ tal que } \vec{r}_1(s) = P.$$

En general, el procedimiento (1) es más directo y por lo tanto será el más utilizado.

1.1.4. Integral de Línea

Definición 1.1.12. *Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^n$, y sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función contínua definida en $\Omega \supseteq \Gamma$. Definimos la* integral de línea *de f sobre la curva Γ mediante:*

$$\int_\Gamma f dl := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt, \tag{1.5}$$

donde $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ.

Es fácil verificar que el valor de la integral definida en (1.5) no depende de la parametrización regular elegida.

Una aplicación de la integral de línea es el cálculo de la masa de un alambre parametrizado por $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. En efecto, si suponemos que la densidad lineal de masa de este alambre [gr/cm] está dada por la función contínua $\rho(x, y, z)$, que depende de la posición dentro del alambre. Entonces, la masa total del alambre puede aproximarse por

$$M \simeq \sum_{i=0}^{k-1} \rho(\vec{r}(t_i))\|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\|. \tag{1.6}$$

Usando los mismos argumentos para definir la longitud de arco, podemos mostrar que cuando el *paso* de la malla $\Delta(\{t_i\})$ tiende a cero, la suma anterior tiende a la integral de línea $\int_\Gamma \rho dl$.

Ejemplo 1.1.13. *La densidad de masa de un alambre helicoidal parametrizado por* $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *viene dada por*

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Luego, la masa total del alambre será

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2)\|(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\| dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3\right). \end{aligned}$$

1.1.5. Centro de Masa

El centro de masa de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, cuya densidad lineal de masa es $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define como el punto de coordenadas:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho\, dl, \quad y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho\, dl, \quad z_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho\, dl,$$

donde M es la masa total de la curva.

Ejemplo 1.1.14. *El centro de masa de la hélice del ejemplo 1.1.13 está dado por*

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} \cos t\,(1 + t^2)\sqrt{2}\, dt = \frac{1}{(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3)}\int_0^{2\pi} t^2 \cos t\, dt = \frac{6}{(3 + 4\pi^2)}, \\ y_G &= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,(1 + t^2)\sqrt{2}\, dt = \frac{1}{(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3)}\int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = \frac{-6\pi}{(3 + 4\pi^2)}, \\ z_G &= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} t\,(1 + t^2)\sqrt{2}\, dt = \frac{1}{(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3)}(2\pi^2 + 4\pi^4) = \frac{3\pi(1 + 2\pi^2)}{(3 + 4\pi^2)}. \end{aligned}$$

1.1.6. Curvatura y vector normal

En primera aproximación, la trayectoria de una partícula que se mueve siguiendo la parametrización $\vec{r}(t)$, se aproxima a una recta cuya dirección viene dada (localmente) por el vector tangente $T(t)$. Cuando estudiamos las variaciones de la velocidad, esto es la aceleración de la particula, vemos que esta se produce ya sea por el cambio en la magnitud de la velocidad, o bien cambios en la dirección de la velocidad. Así por ejemplo, en moviminto rectilineo ($T(t)$ es constante) la única aceleración posible proviene de la variación de la rapidez y está dada por $\frac{d^2s}{dt^2}T(t)$. Por el contrario, en un movimiento a lo largo de una circunferencia de radio R a velocidad angular constante ω, la rapidez es constante e igual a ωR. Sin embargo, por efecto del cambio en la dirección de la velocidad aparece una aceleración centrípeta de magnitud $\frac{\omega^2}{R}$ y que apunta hacia el centro de la circunferencia.

En lo que sigue veremos que en un movimiento general $\vec{r}(t)$, la aceleración puede descomponerse en estos dos tipos de aceleraciones: una componente tangencial y una componente de tipo centrípeta. Para ello identificaremos la circunferencia que mejor aproxima (instantaneamente) la trayectoria.

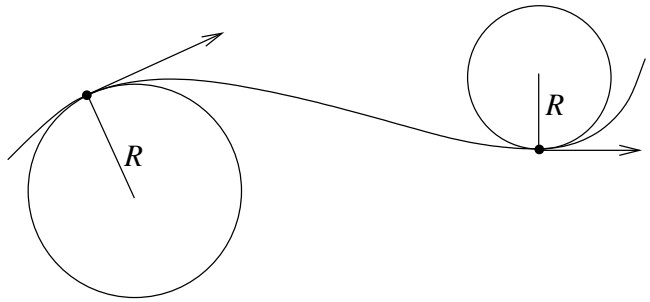


Figura 1.4: vector Tangente, Normal y Binormal.

Intuitivamente, la curvatura aparece por efecto de la variación del vector tangente, respecto de la longitud de arco. Mientras más rápida sea esta variación, más cerrada será la curva y menor el radio de la misma. Estas consideraciones intuitivas permiten afirmar lo siguiente

Definición 1.1.15. *Definimos la curvatura de la curva* Γ *mediante*

$$k(s) = \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| \tag{1.7}$$

Cuando $k(s) > 0$ *definimos el radio de curvatura y el vector normal, respectivamente como*

$$R(s) = \frac{1}{k(s)}, \quad N(s) = \frac{dT}{ds}(s) \Big/ \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\| \tag{1.8}$$

Notemos que $N(s) \perp T(s)$. En efecto, esto se obtiene de derivar la identidad $\|T(s)\|^2 = 1$, de modo tal que

$$0 = \frac{d}{ds} \|T(s)\|^2 = 2T(s) \cdot \frac{dT}{ds}(s).$$

debido a lo engorroso que puede llegar a ser el cálculo explícito de la parametrización en longitud de arco, vale la pena tener expreciones para la curvatura, radio de curvatura y vector normal, calculable a partir de una parametrización regular cualquiera $\vec{r}(t)$. Eso es relativamente fácil utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dT}{ds} \Big/ \frac{ds}{dt} \tag{1.9}$$

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds}(t) \right\| \Big/ \frac{ds}{dt}(t) \tag{1.10}$$

$$R = \frac{1}{\kappa} \tag{1.11}$$

$$N = \frac{dT}{dt} \Big/ \left\| \frac{dT}{dt} \right\| \tag{1.12}$$

1.1.7. Vector binormal y Torsión

En esta sección restringiremos nuestro estudio a $n = 3$.

Definición 1.1.16. *Definimos el vector* binormal B *mediante*

$$B = T \times N,$$

donde la operación $\times$ *denota el producto cruz entre dos vectores de* $\mathbb{R}^3$.

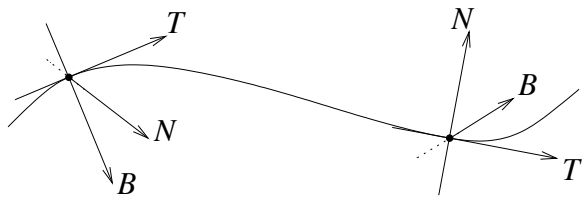


Figura 1.5: vector Tangente, Normal y Binormal.

Hemos visto que los vectores T y N son ortogonales entre sí, pero varían a medida que nos movemos por la curva. En consecuencia el vector B variara también (a menos que la curva sea plana).

Notemos que

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds} = kN \times N + T \times \frac{dN}{ds} = T \times \frac{dN}{ds},$$

obteniendo así que $\frac{dB}{ds}$ es ortogonal a T. De otra parte, sabemos que

$$B \cdot \frac{dB}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\|B\|^2\right) = 0,$$

lo cual implica que $\frac{dB}{ds}$ es también ortogonal a N, concluyendo finalmente que $\frac{dB}{ds}$ es proporcional a N. Esto nos permite hacer la siguiente definición.

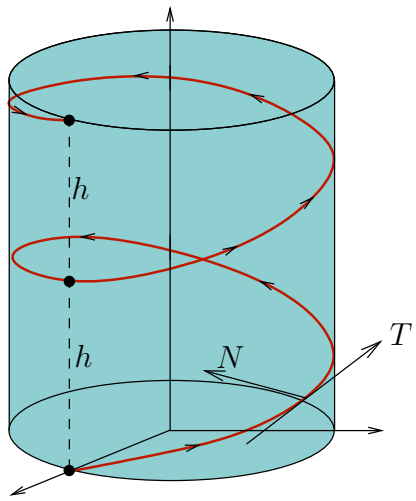
Definición 1.1.17. *Definimos la* torsión *asociada a la curva como la siguiente magnitud*

$$\mathcal{T}(s) = -N(s) \cdot \frac{dB}{ds}(s).$$

La torsión se puede interpretar como la tasa a la cual el vector binormal "persigue" al vector normal. Notemos que no es necesario trabajar con la parametrización en longitud de arco ya que se tiene:

$$\mathcal{T}(t) = -N(t) \cdot \left(\frac{dB}{dt}(t) / \frac{ds}{dt}(t)\right). \tag{1.13}$$

Ejemplo 1.1.18. *Consideremos la hélice* $\vec{r}(t) = a\hat{r}(t) + \frac{ht}{2\pi}\hat{k}$



donde $\hat{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $\hat{\theta}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ *y* $\hat{k} = (0,0,1)$ *denotan los vectores unitarios de las coordenadas* polares *o* cilíndricas. *Notemos que* $\frac{d\hat{r}}{dt}(t) = \hat{\theta}(t)$ *y* $\frac{d\hat{\theta}}{dt}(t) = -\hat{r}(t)$. *Se tiene que*

$$\begin{aligned}
&T(t) = (a\hat{\theta}(t) + h\hat{k})/\sqrt{a^2+h^2}, \quad N(t) = -\hat{r}(t),\\
&B(t) = (a\hat{k} - h\hat{\theta}(t))/\sqrt{a^2+h^2}, \quad \frac{dB}{dt}(t) = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\,\hat{r}(t),\\
&\mathcal{T}(t) = h/(a^2+h^2), \quad k(t) = a/(a^2+h^2).
\end{aligned}$$

1.1.8. Fórmulas de Frenet

Considerando las definiciones dadas en esta sección, las siguientes relaciones se satisfacen:

(I) $\frac{dT}{ds} = kN$,

(II) $\frac{dN}{ds} = -kT + \mathcal{T}B$,

(III) $\frac{dB}{ds} = -\mathcal{T}N$,

donde todas las funciones implicadas están evaluadas en s, el camino recorrido.

Las relaciones (I) y (III) son consecuencias directas de las definiciones establecidas. Probemos la relación (II): dado que $N = B \times T$ se obtiene

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dB}{ds} \times T + B \times \frac{dT}{ds} = -\mathcal{T}N \times T + B \times (kN) = \mathcal{T}B - kT.$$

Notemos que en la segunda igualdad se utilizaron las relaciones (I) y (III).

Veamos ciertas aplicaciones de las fórmulas de Frenet.

Proposición 1.1.19. *Las siguientes propiedades son ciertas:*

1. *Una curva con curvatura nula es una recta.*
2. *Una curva sin torsión es una curva plana.*

Demostración. 1) Si $k = 0$, de la fórmula de Frenet (I) se tiene que $\frac{dT}{ds} = 0$, es decir, que $T(s) = T_0$ constante para todo s. De esta manera se concluye que

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(0) + \int_0^s T_0 ds = \vec{r}(0) + sT_0.$$

2) Si $\mathcal{T} = 0$, de la fórmula de Frenet (III) se tiene que $\frac{dB}{ds} = 0$, es decir, que $B(s) = B_0$ constante para todo s. Entonces

$$\frac{d}{ds}(B_0 \cdot \vec{r}) = B_0 \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = B \cdot T = 0,$$

y luego $B \cdot \vec{r}$ es siempre constante (e igual a $B_0 \cdot \vec{r}(0)$), esto quiere decir que la curva pertenece al plano ortogonal a B_0 y que pasa por $\vec{r}(0)$, el cual esta dado por

$$B_0 \cdot (\vec{r}(s) - \vec{r}(0)) = 0.$$

■

1.1.9. Planos de Frenet

Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva regular y consideremos $\vec{r}\colon [a,b] \to R^3$ su parametrización en longitud de arco que supondremos dos veces diferenciable. Consideremos $T(s)$ y $N(s)$ los vectores tangente y normal (unitarios) a $\vec{r}$ en el punto s. Los vectores $T(s)$ y $N(s)$ determinan un plano, llamado *plano osculador* de $\vec{r}$ en el punto s. Por definición el vector binormal $B(s)$ es unitario (en efecto si u y v son vectores entonces $\|u \times v\| = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2$) y es ortogonal al plano osculador por lo tanto un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ pertenecerá a este plano si satisface la ecuación:

$$(\vec{x} - \vec{r}(s)) \cdot B(s) = 0. \tag{1.14}$$

El plano definido por los vectores $N(s)$ y $B(s)$ se llama *plano normal* de $\vec{r}$ en s y por lo tanto tiene por vector normal a $T(s)$. La ecuación del plano normal esta dada por:

$$(\vec{x} - \vec{r}(s)) \cdot T(s) = 0. \tag{1.15}$$

Se llama *plano rectificante* de $\vec{r}$ en s al plano que pasa por $\vec{r}(s)$ y que es ortogonal al plano osculador y al plano normal y por lo tanto tiene como vector normal a $N(s)$. Su ecuación viene dada por:

$$(\vec{x} - \vec{r}(s)) \cdot N(s) = 0. \tag{1.16}$$

A las rectas que pasan por $\vec{r}(s)$ y tienen vectores paralelos $T(s), N(s)$ y $B(s)$ se les llama, respectivamente, recta tangente, recta normal y recta binormal de $\vec{r}$ en s. Es claro que las ecuaciones paramétricas de estas rectas corresponden respectivamente a

$$\vec{x} = \vec{r}(s) + tT(s), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$
$$\vec{x} = \vec{r}(s) + tN(s), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$
$$\vec{x} = \vec{r}(s) + tB(s), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.19}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

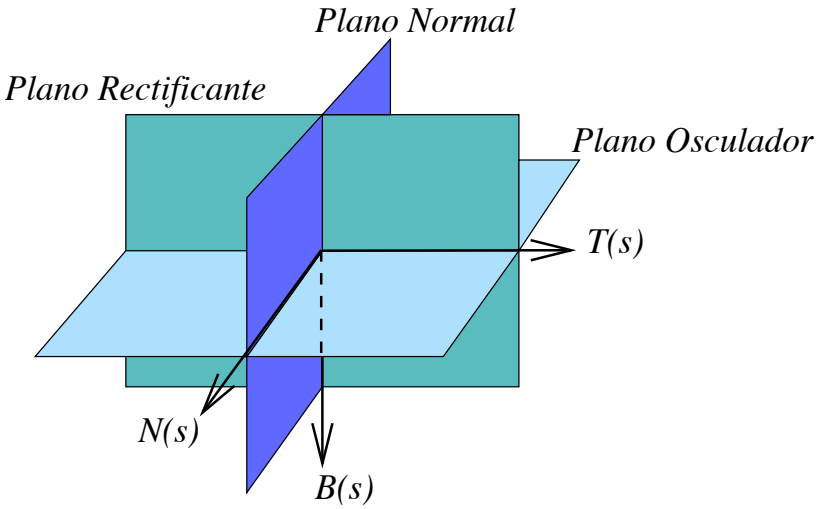


Figura 1.6: planos Osculador, Normal y rectificante.

1.2. Coordenadas ortogonales

Las coordenadas cartesianas no siempre son las más cómodas para describir curvas (trayectorias), superficies, volúmenes y otros objetos geométricos. En diversas ocasiones el problema en estudio posee ciertas simetrías que

no se ven reflejadas al utilizar estas coordenadas. Así, se hace evidente el estudiar formalmente un sistema de coordenadas arbitrario, al cual nos referiremos por *sistema de coordenadas curvilíneas*.

En general, un sistema de coordenadas curvilíneas es una transformación invertible $\vec{r}\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de modo que a todo triplete $(u, v, w) \in D$ le corresponde un único punto en el espacio

$$\vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

1.2.1. Triedro ortogonal y factores escalares

Asociado a un sistema de coordenadas curvilíneo, dado por $\vec{r}$, se define un triedro de vectores unitarios de la siguiente manera. Supongamos que $\vec{r}$ es diferenciable, fijemos $(u_0, v_0, w_0) \in D$ y consideremos la curva parametrizada por $u \mapsto \vec{r}(u, v_0, w_0)$. Si $\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0)\| \neq 0$, entonces el vector tangente a la curva en el punto $\vec{r}(u_0, v_0, w_0)$ está bien definido y se expresa como

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) \right\|$$

Similarmente, asumiendo que $\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0, w_0)\| \neq 0$ y $\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}(u_0, v_0, w_0)\| \neq 0$, los vectores tangentes $\hat{v}$ y $\hat{w}$ a las curvas parametrizadas por $v \mapsto \vec{r}(u_0, v, w_0)$ y $w \mapsto \vec{r}(u_0, v_0, w)$ están bien definidos. Todo esto se establece a continuación.

Definición 1.2.1. *Supongamos que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \neq 0$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \neq 0$ en el punto (u_0, v_0). Definimos el* triedro de vectores unitarios*, $\hat{u}$, $\hat{v}$ y $\hat{w}$, asociados al sistema de coordenadas dado por $\vec{r}$, el punto $\vec{r}(u_0, v_0, w_0)$, mediante*

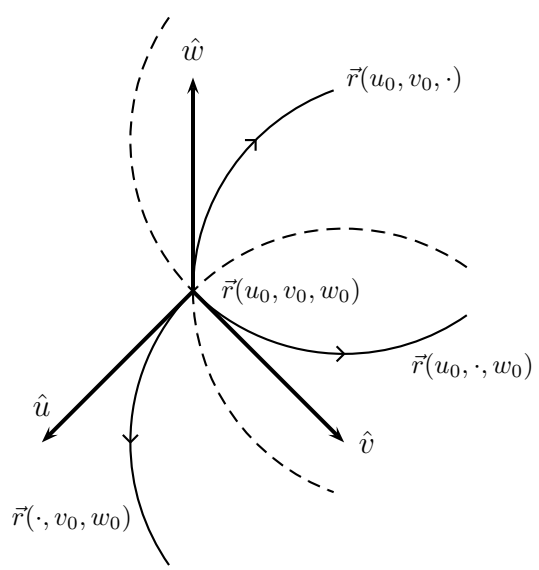
$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad \hat{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad \hat{w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|. \tag{1.20}$$

También llamaremos factores escalares *a los siguientes valores reales*

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|. \tag{1.21}$$

De esta forma se obtiene que

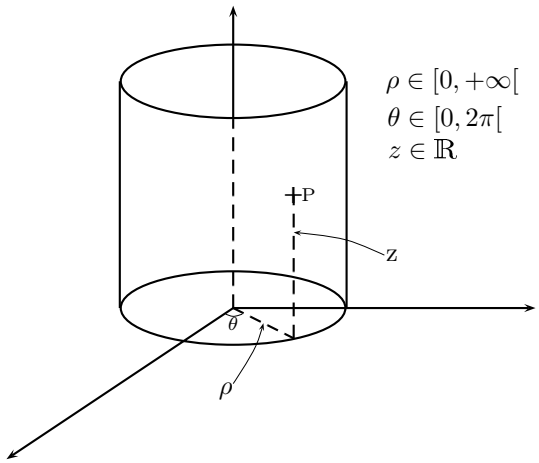
$$\hat{u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{u}}, \quad \hat{v} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{v}}, \quad \hat{w} = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{w}}.$$



Veamos ahora algunos sistemas de coordenadas clásicos.

1.2.2. Coordenadas cilíndricas

Para este sistema de coordenadas la posición de un punto $\vec{P}$ en el espacio queda determinada por tres variables, ρ, θ y z, como muestra la siguiente figura:



Entonces, la relación entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas viene dada por

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (x(\rho, \theta, z), y(\rho, \theta, z), z(\rho, \theta, z)) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z).$$

Recíprocamente, a un punto descrito por lo valores x, y e z, en coordenadas cartesianas, le corresponden los siguientes valores en coordenadas cilíndricas

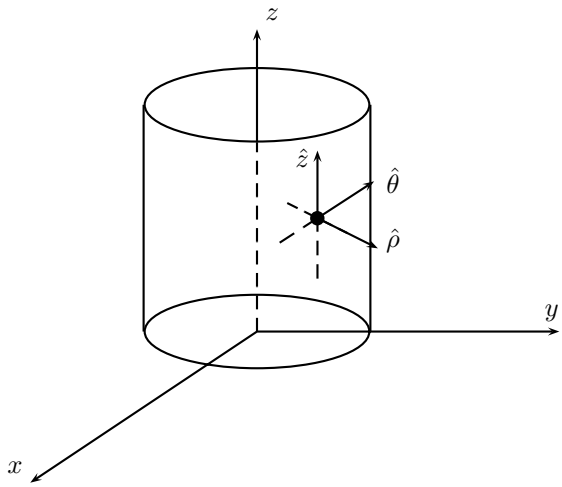
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z.$$

Calculemos los factores escalares y el triedro unitario asociado a este sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \Rightarrow h_\rho = 1, \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (-\rho \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0) \Rightarrow h_\theta = \rho, \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1) \Rightarrow h_z = 1,
\end{aligned}$$

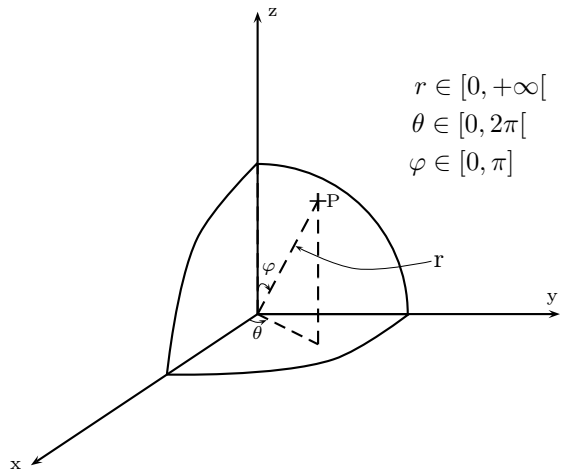
obteniendo finalmente que el triedro es:

$$\hat{\rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), \quad \hat{\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \quad \hat{z} = \hat{k} = (0, 0, 1). \tag{1.22}$$



1.2.3. Coordenadas esféricas

Un tipo de geometría que aparece con frecuencia en las aplicaciones es la geometría esférica. Para el sistema de coordenadas ligado a esta geometría, la posición de un punto $\vec{P}$ está determinada por un radio r y dos ángulos θ y φ, como se muestra en la figura.



Así, tenemos para un punto descrito usando los valores r, θ y ϕ la siguiente representación

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi).$$

Recíprocamente, para un punto dado en coordenadas cartesianas, es decir descrito usando x, y y z, se tiene la relación

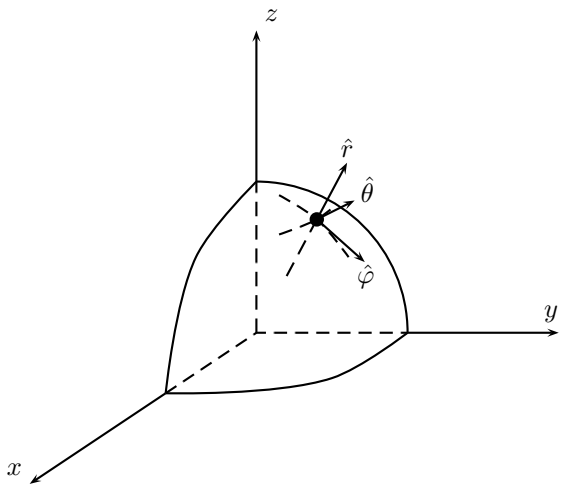
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right).$$

Calculemos los factores escalares y el triedro unitario

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi) \Rightarrow h_r = 1, \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (-r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, 0) \Rightarrow h_\theta = r \operatorname{sen} \varphi, \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{sen} \varphi) \Rightarrow h_\varphi = r,
\end{aligned}$$

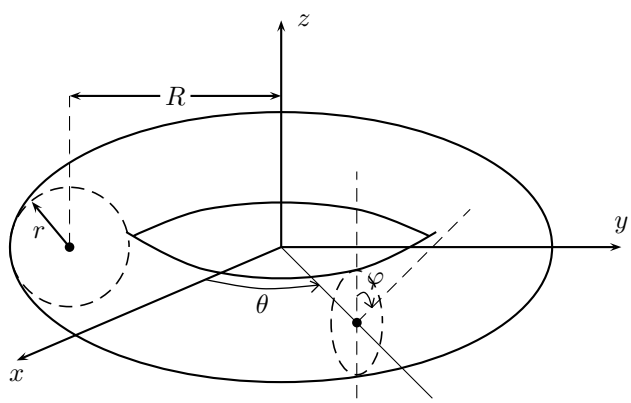
obteniendo

$$\hat{r} = (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi), \quad \hat{\theta} = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0), \quad \hat{\varphi} = (\cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, -\operatorname{sen} \varphi). \tag{1.23}$$



1.2.4. Coordenadas toroidales

Este nuevo sistema no corresponde exactamente a la noción de sistema de coordenadas definida anteriormente, pues no permiten describir el espacio $\mathbb{R}^3$ completo. Sin embargo, el análisis anterior sigue siendo válido.
En estas coordenadas, dado un radio mayor R fijo, la posición de un punto $\vec{P}$ queda determinada por un radio menor r y dos ángulos θ y φ como muestra la figura.



El vector posición viene dado por:

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = ((R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\cos\theta, (R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\varphi), \quad r \in [0,R],\ \theta \in [0,2\pi),\ \varphi \in [0,\pi].$$

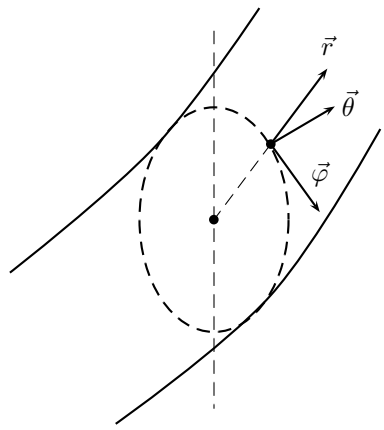
Entonces, los vectores unitarios y los factores escalares resultan ser:

$$\begin{aligned}
h_r &: \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \cos\varphi); \quad h_r = 1,\\
h_\theta &: \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-(R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\theta, (R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\cos\theta, 0); \quad h_\theta = (R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi),\\
h_\varphi &: \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, -r\,\mathrm{sen}\,\varphi); \quad h_\varphi = r.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$\hat{r} = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi); \quad \hat{\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0); \quad \hat{\varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi).$$

Es fácil verificar que $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ son mutuamente ortogonales.



Notemos que en todos los sistemas de coordenadas anteriores, los triedros calculados resultan ortogonales. Esta propiedad no es válida en cualquier sistema de coordenadas. Sin embargo, en lo que sigue limitaremos nuestro estudio a sistemas de coordenadas que si satisfagan esta propiedad, los cuales serán llamados *sistemas ortogonales*.

1.2.5. Gradiente en coordenadas ortogonales

En las aplicaciones, muchas magnitudes escalares se expresan de manera natural como una función descrita en un sistema de coordenadas curvilíneas distinto al cartesiano. A modo de ejemplo y motivación, pensemos en el potencial gravitacional engendrado por una partícula de masa M que se encuentra en el origen. Su expresión en coordenadas cartesianas es

$$V(x,y,z) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

mientras que en esféricas se tiene

$$V(r,\theta,\varphi) = V(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Resulta entonces interesante obtener una expresión para el gradiente de una función diferenciable $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en términos de un sistema de coordenadas curvilíneas dado.

Sea $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un sistema de coordenadas que supondremos ortogonal, y consideremos la función f descrita usando este sistema, es decir $f : (u,v,w) \to f(\vec{r}(u,v,w))$. Si esta función es diferenciable en todo $(u,v,w) \in D$ tal que $\vec{r}(u,v,w) \in \Omega$, gracias a la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(f\circ\vec{r}) &= \nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \nabla f \cdot \hat{u},\\
\frac{\partial}{\partial v}(f\circ\vec{r}) &= \nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \nabla f \cdot \hat{v},\\
\frac{\partial}{\partial w}(f\circ\vec{r}) &= \nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \nabla f \cdot \hat{w},
\end{aligned}$$

donde h_u, h_v y h_w son los factores escalares, y $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ el triedro, asociados al sistema de coordenadas dado por $\vec{r}$. Entonces, de la ortogonalidad de $\hat{u}$, $\hat{v}$ y $\hat{w}$ deducimos que

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(f \circ \vec{r})\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(f \circ \vec{r})\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(f \circ \vec{r})\hat{w}. \tag{1.24}$$

Notemos que en el caso de las coordenadas cartesianas, lo anterior corresponde a la expresión habitual para el gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}.$$

Ejercicio. Exprese ∇f en coordenadas esféricas y cilíndricas.

Ejemplo 1.2.2. *Volvamos al ejemplo del potencial gravitacional $V = -\frac{GM}{r}$. El campo de fuerzas generado por este potencial viene dado por $\vec{F} = \nabla V$, que de acuerdo a la expresión* (1.24)*, se escribe en coordenadas esféricas como sigue*

$$\vec{F}(r) = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}.$$

Verifiquemos lo anterior mediante un cálculo directo. Dado que

$$V(x, y, z) = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

tenemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-GMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-GMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-GMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Así se concluye la expresión

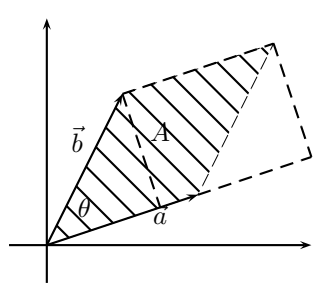
$$\nabla V = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = \frac{-GM}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-GM}{r^2}\hat{r}.$$

En general, hemos deducido que si $g :]0; \infty[\to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces $g(r)$, como función en el sistema de coordenadas esféricas representado por sus componentes (r, θ, φ), tiene como gradiente a la función

$$\nabla g = g'(r)\hat{r}. \tag{1.25}$$

1.2.6. Diferencial de volumen

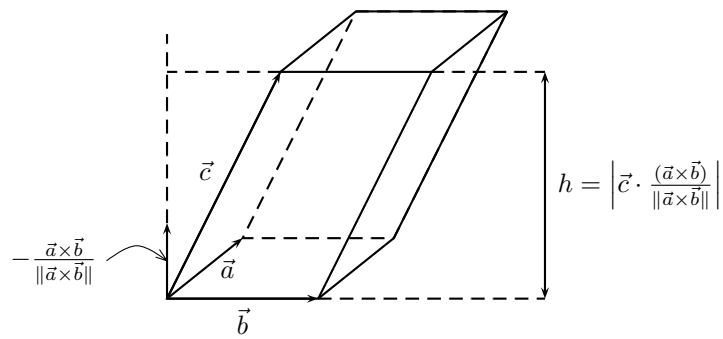
El objetivo de esta sección es describir el diferencial de volumen para un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal arbitrario. Para esto, consideremos el paralelogramo definido por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$



Es fácil ver que el área A de este paralelogramo viene dada por

$$A = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \operatorname{sen}\theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

En el caso de un paralelepípedo definido por tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tal como lo muestra la siguiente figura



el volumen V viene dado por

$$V = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \left| \vec{c} \cdot \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \right| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|.$$

Notemos que $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es una región más complicada, sabemos que

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\, dV = \iiint_\Omega dxdydz,$$

siempre que la integral exista. Decimos entonces que el elemento de volumen en cartesianas viene dado por $dV = dxdydz$.

Supongamos ahora que hemos descrito el conjunto Ω mediante un sistema de coordenadas $(u, v, w) \to \vec{r}(u, v, w)$ con $D = \vec{r}^{-1}(\Omega)$. La fórmula de cambio de variables para la integral de una función integrable $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ viene dada por

$$\int_\Omega f = \int_D (f \cdot \vec{r})|J\vec{r}| \quad \text{donde } J\vec{r} \text{ es la matriz Jacobiana de } \vec{r}\,. \tag{1.26}$$

Lo que aplicado a nuestro caso implica

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_D f(\vec{r}(u, v, w)) \left| \det\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right) \right| dudvdw.$$

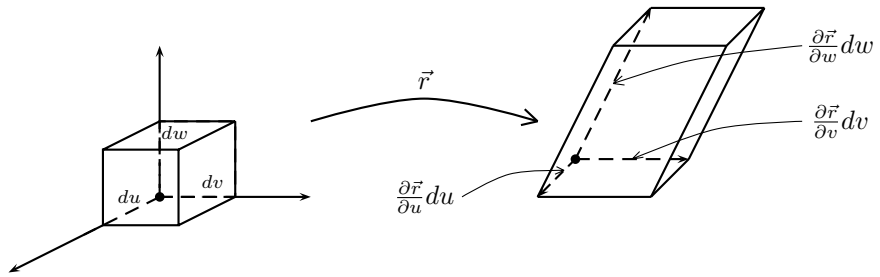
Aplicando lo anterior a la función constante $f \equiv 1$ obtenemos que

$$\text{Vol}(\Omega) = \iiint_D \left| \det\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right) \right| dudvdw = \iiint_D \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \right| dudvdw.$$

Concluyendo que en este caso

$$dV = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\right| dudvdw, \tag{1.27}$$

el cual se interpreta como el volumen infinitesimal que corresponde al paralelepípedo definido por lo lados $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$, y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$.



Cuando $\vec{r}(u, v, w)$ define un sistema ortogonal, entonces

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \cdot \hat{u} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \cdot \hat{v} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \cdot \hat{w},$$

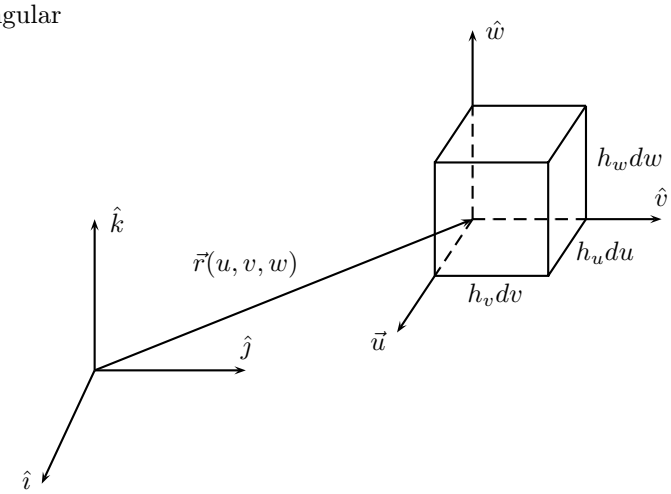
donde $\hat{u}, \hat{v}$, *y* $\hat{w}$ son mutuamente ortogonales y unitarios. Es directo entonces ver que

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right| = h_u h_v h_w,$$

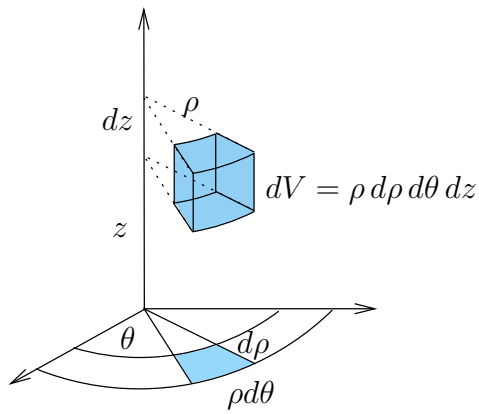
y por lo tanto, se concluye de (1.27) que en este caso se tiene

$$dV = h_u h_v h_w \, du dv dw. \tag{1.28}$$

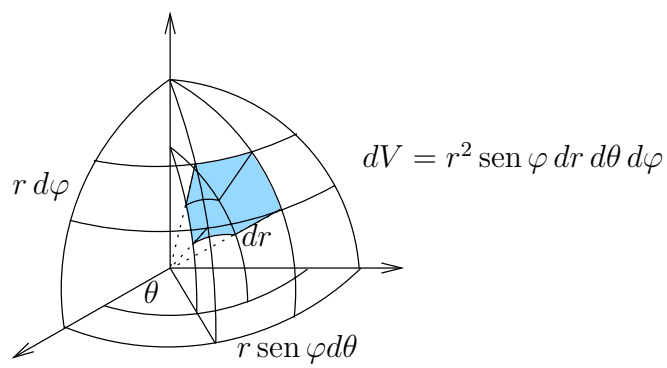
En otras palabras, para calcular el volumen de Ω se suma sobre todo $(u, v, w) \in D$ el volumen del correspondiente paralelepípedo rectangular



Ejemplo 1.2.3. *Calculemos el diferencial de volumen para el sistema de coordenadas cilíndricas y esféricas:*
Coordenadas cilíndricas: (ρ, θ, z)**.**
Tenemos que $h_\rho = 1\,, h_\theta = \rho\,, h_z = 1$*, por lo tanto* $dV = \rho d\rho d\theta dz$*.*



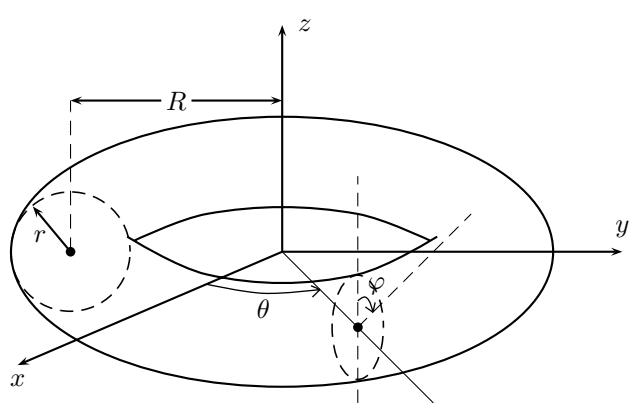
Coordenadas esféricas (r, θ, φ)**.**
Tenemos que $h_r = 1\,, h_\theta = r \operatorname{sen}\varphi\,, h_\varphi = r$*, entonces* $dV = r^2 \operatorname{sen}(\varphi) dr d\theta d\varphi$*.*



Finalmente, aplicamos lo anterior a las coordenadas toroidales.

Coordenadas Toroidales:

Hemos visto que para el sistema de coordenadas toroidales:



la posición de un punto viene dado por

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = ((R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\cos\theta), (R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\varphi), \quad r \in [0,R],\ \theta \in [0,2\pi),\ \varphi \in [0,\pi].$$

De este modo, como para una función $f = f(r,\theta,\varphi)$ sabemos que (ref. (1.24))

$$\nabla f = \frac{1}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi},$$

se obtiene la expresión

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}. \tag{1.29}$$

Por otro lado, el diferencial de volumen

$$dV = h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi$$

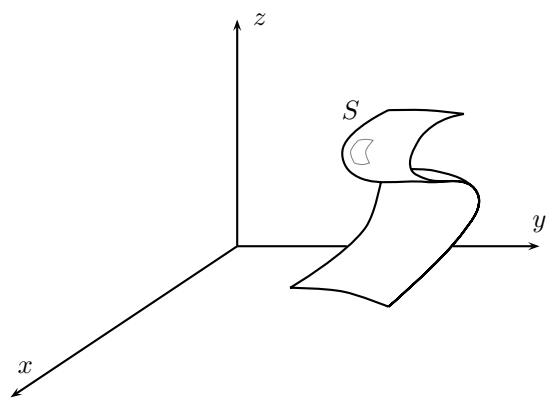
se calcula como sigue

$$dV = r(R + r\,\mathrm{sen}\,\varphi) dr d\theta d\varphi. \tag{1.30}$$

1.3. Superficies

1.3.1. La noción de superficie

Intuitivamente una superficie es un conjunto $S \in \mathbb{R}^3$ que localmente se asemeja a un plano. El fenómeno físico más cercano podría ser el de una membrana delgada, donde una de las dimensiones (espesor) es despreciable frente a las otras.



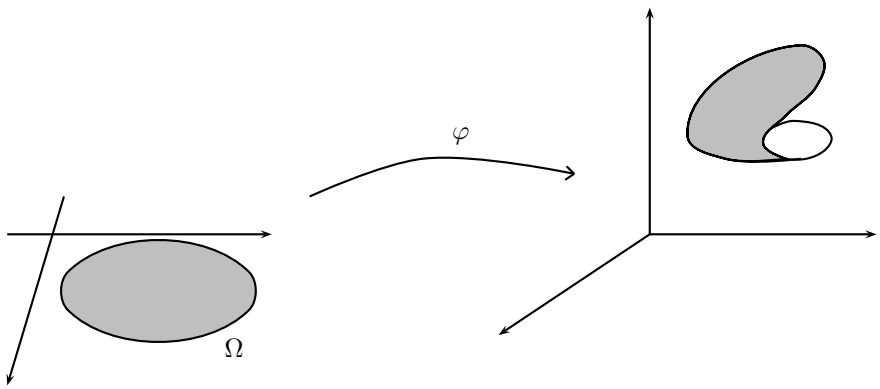
Así, las superficies aparecen en los modelos como los conjuntos frontera que separan dos medios o dos fases dentro de un fluido.

Definición 1.3.1. *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama* superficie *(o* variedad bi-dimensional*) si existe una función contínua $\vec{r} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

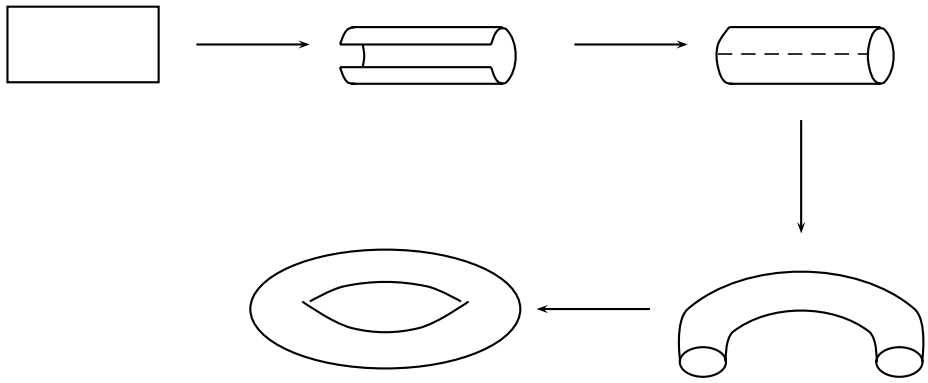
$$S = \{\vec{r}(u,v)\ :\ (u,v) \in \Omega\},$$

donde Ω es un conjunto conexo en $\mathbb{R}^2$. La función $\vec{r}$ se llama parametrización de la superficie.

Podemos pensar en la parametrización $\vec{r}$ como una función que "tuerce" el conjunto plano S en $\mathbb{R}^3$.

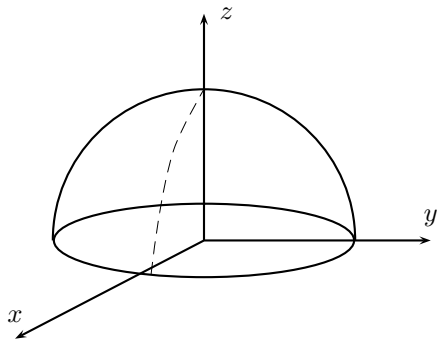


Ilustremos esta idea con una superficie toroidal de radios (R, a)



En el siguiente ejemplo veremos ciertas parametrizaciones asociadas a figuras geométricas conocidas.

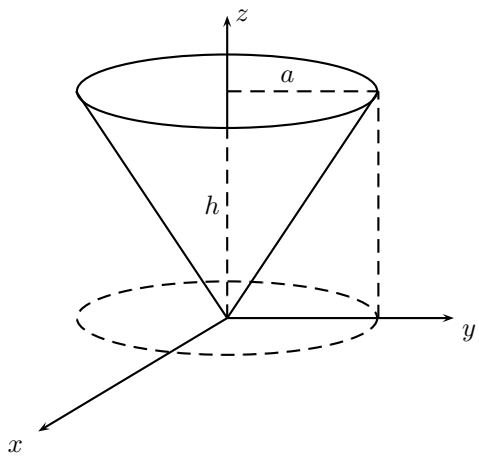
Ejemplos 1.3.2. *El hemisferio superior del casquete esférico de radio R y centro en el origen*



se puede parametrizar como sigue:

$$\vec{r}_1(\theta, \phi) = (R \operatorname{sen} \phi \cos \theta, R \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, R \cos \phi),\ \theta \in [0, 2\pi),\ \phi \in [0, \pi/2],$$
$$\vec{r}_2(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}),\ (x, y) \in \bar{B}(0, R).$$

Consideremos también el siguiente manto de un cono

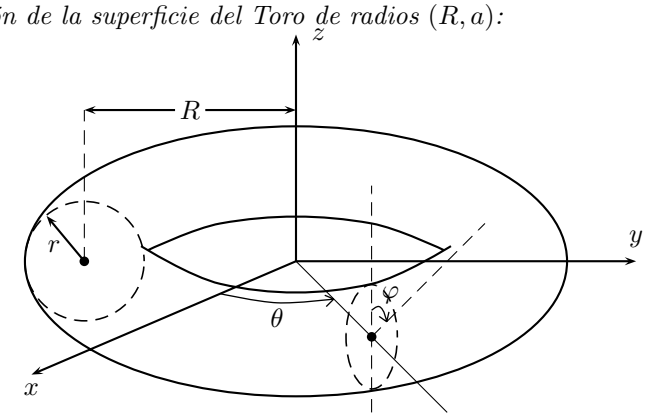


Para esta figura, algunas posibles parametrizaciones son:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1(x,y) &= (x, y, \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}),\ (x,y) \in \bar{B}(0,a),\\
\vec{r}_2(r,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}(ra\cos\theta, ra\operatorname{sen}\theta, rh),\ r \in [0, \sqrt{h^2+a^2}],\ \theta \in [0, 2\pi),\\
\vec{r}_3(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, rh/a),\ r \in [0,a],\ \ \theta \in [0, 2\pi).
\end{aligned}$$

Estas tres parametrizaciones se obtienen usando coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas, respectivamente. Notemos $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ son suaves incluso en el vértice del cono, mientras que $\vec{r}_1$ presenta problemas de diferenciabilidad en este punto.

Finalmente, la parametrización de la superficie del Toro de radios (R, a):



viene dada por:

$$\vec{r}_1(\theta,\varphi) = ((R + a\operatorname{sen}\varphi)\cos\theta, (R + a\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\theta, a\cos\varphi),\ \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

En los ejemplos anteriores hemos podido notar que al igual que para las curvas, existen varias parametrizaciones asociadas a una misma superficie.

Terminamos esta sección haciendo las siguientes definiciones.

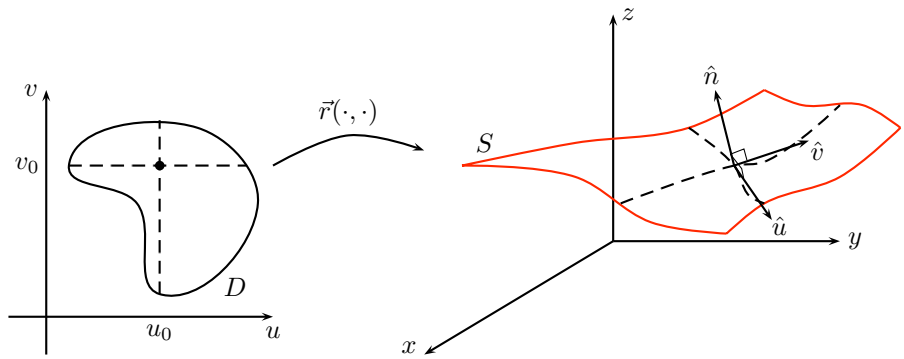
Definición 1.3.3. *Diremos que una superficie es* suave *si admite una parametrización continuamente diferenciable ($\mathcal{C}^1$). Una superficie se dirá* suave por pedazos *si es una unión finita de superficies suaves.*

Diremos también que una superficie es simple *si admite una parametrización inyectiva.*

El concepto de superficies regulares lo introduciremos más adelante.

1.3.2. Vectores tangente y normal a una superficie

Consideremos una superficie suave $S \subseteq \mathbb{R}^3$, cuya parametrización $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es suave y simple. Para un punto $(u_0, v_0) \in \operatorname{int}(D)$ dado, las funciones $\vec{r}(\cdot, v_0)$ y $\vec{r}(u_0, \cdot)$ definen curvas sobre S en una vecindad de u_0 y v_0, respectivamente.



Definimos entonces los vectores tangentes a S en $\vec{r}(u_0, v_0)$ de la manera siguiente:

Definición 1.3.4. *Supongamos que* $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \neq 0$ *y* $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0$ *en el punto* (u_0, v_0)*. Definimos los* vectores tangentes *a* S *en* $\vec{r}(u_0, v_0)$ *mediante*

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \|; \quad \hat{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \|, \tag{1.31}$$

donde cada una de estas funciones está evaluada en (u_0, v_0)*. Estos vectores también serán denotados por* $\hat{t}_u$ *y* $\hat{t}_v$*, respectivamente.*

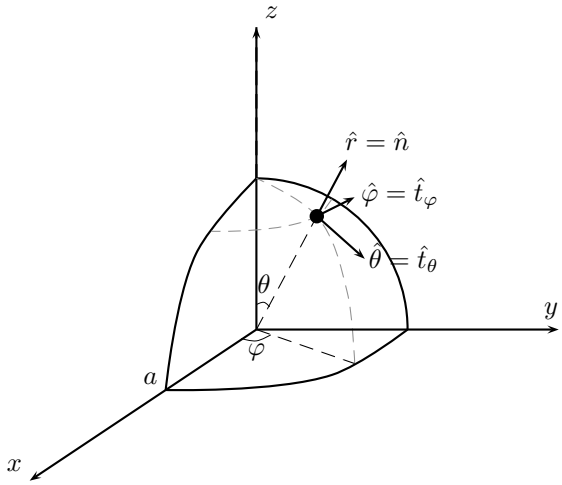
Diremos que la parametrización $\vec{r}$ *asociada a la superficie* S *es* regular *si los vectores tangentes* $\hat{u}$ *y* $\hat{v}$ *son linealmente independientes. En tal caso, llamaremos* plano tangente *al plano generado por* $\hat{u}$ *y* $\hat{v}$*, y definiremos el* vector normal *a* S *en* $\vec{r}(u_0, v_0)$ *como*

$$\hat{n} = \hat{u} \times \hat{v} / \|\hat{u} \times \hat{v}\|. \tag{1.32}$$

Finalmente, diremos que una superficie S *es* regular *si admite una parametrización regular, y que es* regular por trozos *si está compuesta por una unión finita de superficies regulares.*

En general, los vectores tangentes $\hat{u}$ y $\hat{v}$ dependen de la parametrización. Sin embargo, el plano tangente y el vector normal son únicos, este último salvo por el signo.

Ejemplo 1.3.5. *Consideremos la esfera de radio* R*:*



cuya parametrización viene dada por

$$\vec{r}(\theta,\phi) = (R\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, R\cos\phi),\ \theta\in[0,2\pi),\ \phi\in[0,\pi).$$

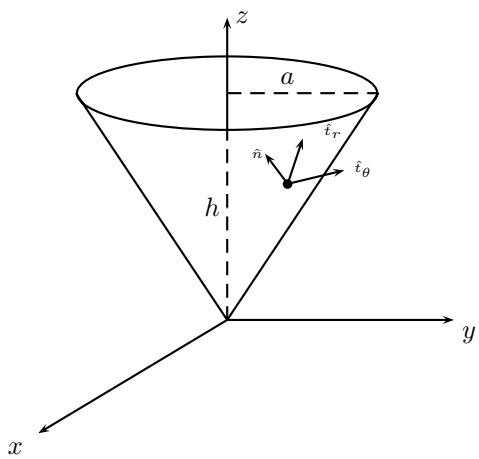
Luego, los vectores tangentes son

$$\hat{\theta} = (-\,\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, 0) \quad y \quad \hat{\phi} = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, -\,\mathrm{sen}\,\phi),$$

y el vector normal es

$$\hat{r} = (\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \cos\phi) = \hat{\phi}\times\hat{\theta}.$$

Para el manto de un cono de radio a y altura h:



se tiene la siguiente parametrización

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, rh/a),\ r\in[0,a],\ \theta\in[0,2\pi).$$

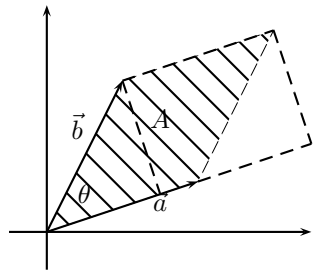
Entonces, los vectores tangentes son:

$$(\hat{r} + \frac{h}{a}\hat{k})/\sqrt{1+(h/a)^2} \quad y \quad \hat{\theta},$$

donde $\hat{\theta}$ corresponde al vector unitario polar (descrito anteriormente para la esfera), $\hat{k} = (0,0,1)$, y ahora $\hat{r} = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)$. Finalmente, el vector normal asociado es $\hat{n} = (\hat{k} - \frac{h}{a}\hat{r})/\sqrt{1+(h/a)^2}$.

1.3.3. Area e integral de superficie

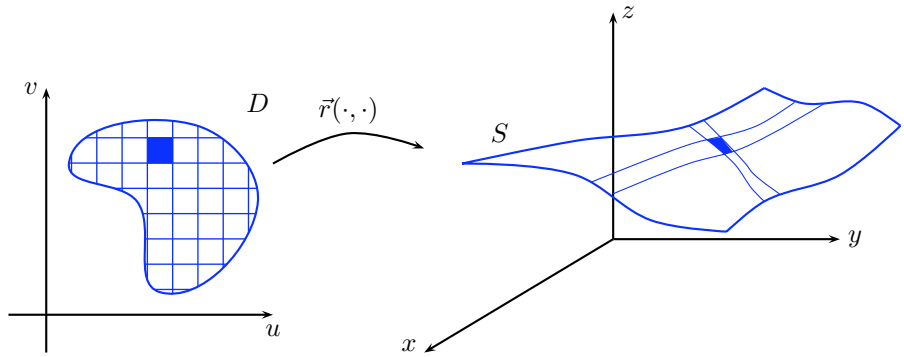
El área de un paralelógramo definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ está dada por $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$, lo cual se desprende de la siguiente figura:



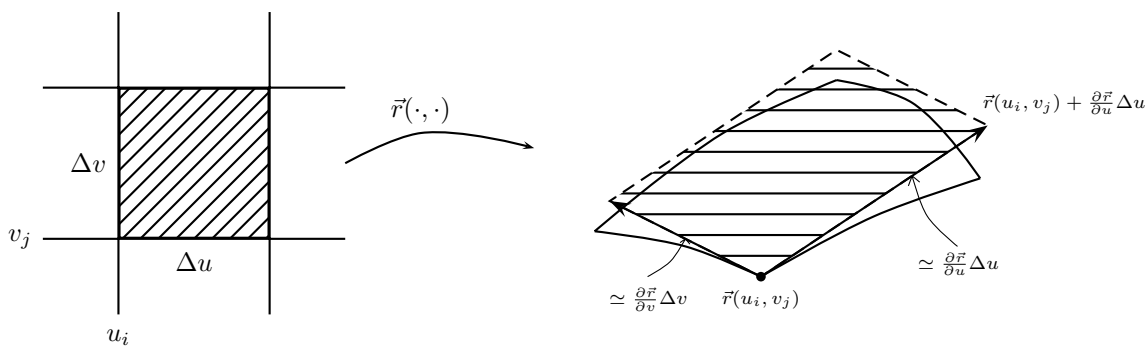
En resumen

$$A = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\operatorname{sen}\theta| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \tag{1.33}$$

Luego, para aproximar el área de una superficie procedemos a subdividir en pequeñas celdas como se indica en la siguiente figura:



Ampliamos la región ennegrecida:



De esta manera, podemos estimar el area $(\Delta A)_{ij}$ de la región ennegrecida como sigue

$$(\Delta A)_{ij} \simeq \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i,v_j)\Delta u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i,v_j)\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Sumando se tiene

$$A(S) = \sum_{i,j} (\Delta A)_{ij} \simeq \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Pasando al límite, se demuestra que la suma converge a la integral doble

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv,$$

lo cual motiva las siguientes definiciones.

Definición 1.3.6. *Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Definimos el área de S mediante:*

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Definición 1.3.7. *Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Si $\rho : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar continua definida en un abierto Ω que contiene a S, definimos la integral de superficie de ρ sobre S mediante:*

$$\iint_S \rho dA = \iint_D \rho(\vec{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Notemos que los conceptos antes definidos no dependen de la parametrización regular elegida, es decir, si $\vec{r}_1 = \vec{r} \circ \theta$ es una reparametrización de la superficie S, donde $\theta : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to D$ es un difeomorfismo (θ y θ^{-1} de clase $\mathcal{C}^1$), entonces

$$\iint_{D_1} \rho(\vec{r}_1(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t}(s,t) \right\| dsdt = \iint_D \rho(\vec{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv,$$

con lo cual la integral $\iint_D \rho dA$ no cambia bajo reparametrización. La demostración es una simple aplicación del teorema de cambio de variables para integrales dobles. En efecto, sabemos de la regla de la cadena que las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \theta_u}{\partial s} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial \theta_v}{\partial s}; \qquad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{\partial \theta_u}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{\partial \theta_v}{\partial t}.$$

Por lo que se tiene

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\left(\frac{\partial \theta_u}{\partial s}\frac{\partial \theta_v}{\partial t} - \frac{\partial \theta_v}{\partial s}\frac{\partial \theta_u}{\partial t} \right).$$

Finalmente, aplicando el teorema de cambio de variables se deduce

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} \rho(\vec{r}_1(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} \right\| dsdt &= \iint_{D_1} \rho(\vec{r}(\theta(s,t))) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \underbrace{\left| \frac{\partial \theta_u}{\partial s}\frac{\partial \theta_v}{\partial t} - \frac{\partial \theta_v}{\partial s}\frac{\partial \theta_u}{\partial t} \right|}_{|\det J_\theta|} dsdt, \\ &= \iint_D \rho(\vec{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv.\end{aligned}$$

Observación. Es importante que la parametrización $\vec{r}(\cdot)$ usada para calcular $\iint_S \rho dA$ sea simple y regular con el fin de evitar el sumar dos veces la misma región. El análogo en curvas es que la parametrización no debe devolverse y pasar dos veces por el mismo segmento de la curva.

Notemos que si ρ representa densidad superficial de masa o carga eléctrica, la integral $\iint_S \rho dA$ representa la masa total o la carga eléctrica total contenida en la superficie S, respectivamente. La noción de centro de masa se extiende entonces naturalmente al caso de superficies de la siguiente manera:

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_S x\rho\, dA; \quad y_G = \frac{1}{M}\iint_S y\rho\, dA; \quad z_G = \frac{1}{M}\iint_S z\rho\, dA, \tag{1.34}$$

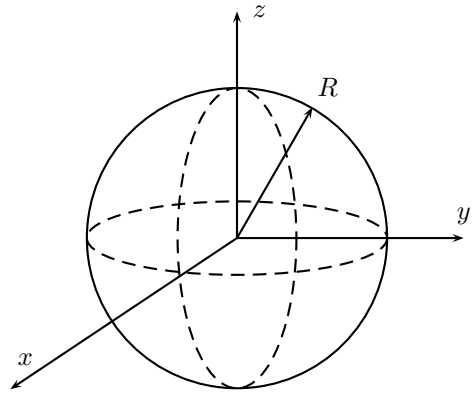
donde $M = \iint_S \rho\, dA$ y $dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv$. Podemos resumir lo anterior con la siguiente notación vectorial

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M}\iint_S \vec{r}\rho\, dA, \quad \text{con} \quad \vec{r} = (x,y,z). \tag{1.35}$$

En otras palabras, intuitivamente se tiene que el diferencial de masa está dado por $dm = \rho\, dA$.

Observación. Las definiciones establecidas en esta sección pueden extenderse trivialmente al caso de una superficie S regular por trozos.

Ejemplo 1.3.8. *Calculemos el area la superficie de una esfera*



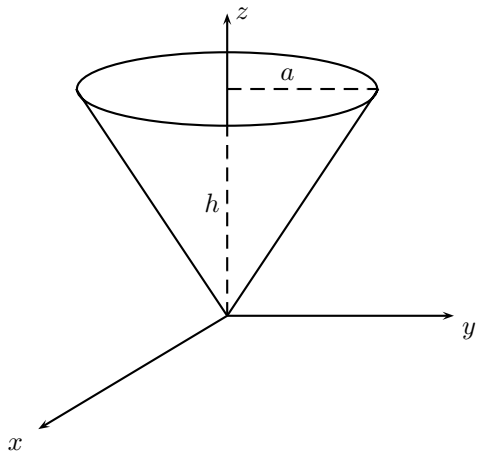
cuya parametrización sabemos que esta dada por

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = R(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi), \qquad \theta \in [0,2\pi),\ \varphi \in [0,\pi].$$

Aplicando las fórmulas definidas en esta sección se obtiene

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\| R \operatorname{sen}\varphi\, \hat{\theta} \times R\hat{\varphi} \right\| d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2 |\operatorname{sen}\varphi|\, d\theta d\varphi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.9. *El area de la superficie del cono, que se ve en la siguiente figura*



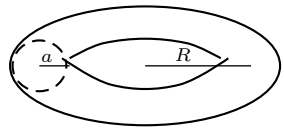
y cuya parametrización es

$$\vec{r}(\rho,\theta) = \left(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \frac{\rho h}{a}\right), \qquad \rho \in [0,a],\ \theta \in [0,2\pi),$$

viene dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{a}\int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| d\theta d\rho = \int_0^{a}\int_0^{2\pi} \left\| \left(\hat{\rho} + \frac{h}{a}\hat{k}\right) \times \rho\hat{\theta} \right\| d\theta d\rho \\ &= \int_0^{a}\int_0^{2\pi} \rho \left\| \hat{k} - \frac{h}{a}\hat{\rho} \right\| d\theta d\rho = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} \cdot 2\pi \int_0^{a} \rho d\rho = \pi\sqrt{a^2+h^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.10. *Calculemos finalmente el area de la superficie de un Toro de radios (R, a), donde $a < R$.*



Recordemos que la parametrización del Toro viene dada por

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = ((R + a \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta, (R + a \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi), \qquad \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Luego, el area queda determinada como sigue

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| (R + a \operatorname{sen} \varphi)\hat{\theta} \times a\hat{\varphi} \right\| d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a|R + a \operatorname{sen} \varphi| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(R + a \operatorname{sen} \varphi) d\varphi d\theta = 4\pi^2 aR. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.11. *Calculemos el área del Helicoide*

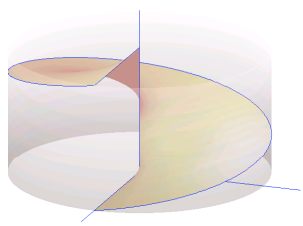


Figura 1.7: helicoide de radio 1 y altura 1

Para esto parametrizamos en cilíndricas $\vec{r}(\rho, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \frac{r\theta}{2\pi})$. De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| d\theta dr = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| \hat{r} \times \left(r\hat{\theta} + \frac{h}{2\pi}\hat{k} \right) \right\| d\theta dr \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\| r\hat{k} - \frac{h}{2\pi}\hat{\theta} \right\| d\theta dr = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} d\theta dr \\ &= h \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{h} \right)^2} dr = \frac{h^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi a}{h}} \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{h^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[u\sqrt{1 + u^2} + \ln\left(u + \sqrt{u^2 + 1} \right) \right] \Big|_0^{\frac{2\pi a}{h}} \\ &= \frac{h^2}{4\pi} \left[\frac{2\pi a}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi a}{h} \right)^2} + \ln\left(\frac{2\pi a}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi a}{h} \right)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por ejemplo, para $a = 1$ y $h = 2\pi$ se tiene que

$$A(S) = \pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

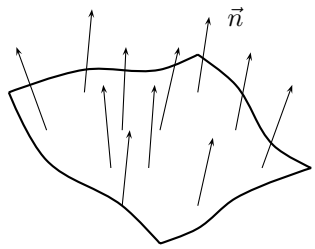
Finalmente, la masa del anterior helicoide cuando la densidad es $\rho(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2}$, *y* $h = 2\pi$ *viene dada por*

$$m = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} \cdot \sqrt{1+r^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^a (1+r^2) dr = 2\pi \left(a + \frac{a^3}{3} \right).$$

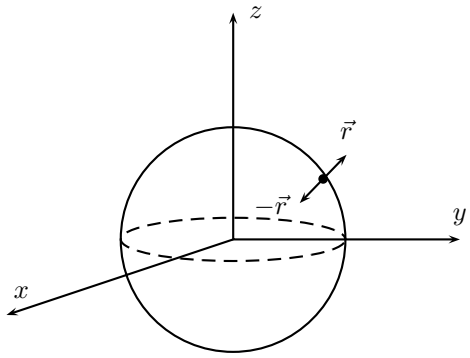
1.3.4. Superficies Orientables

Terminaremos este capítulo haciendo una definición que será se importante en el proximo capítulo.

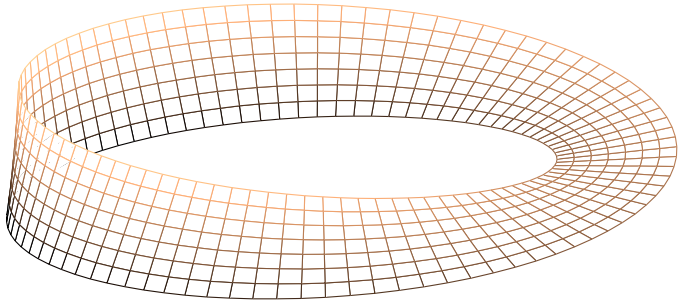
Definición 1.3.12 (Informal)**.** *Diremos que una superficie* S *es* orientable *si podemos decidir sin ambigüedad cual es cada uno de los lados de al superficie. En el caso que el vector normal* $\hat{n}$ *exista en todo punto de la superficie (lo que ocurre, por ejemplo, para una superficie* S *regular), diremos que es orientable si el vector normal puede ser definido como una función continua* $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$.



Ejemplo 1.3.13. *La esfera unitaria puede orientarse según* $\hat{r}$ *o según* $-\hat{r}$.



Ejemplo 1.3.14. *La* banda de Möbieus, *que se muestra en al siguiente figura, no es orientable ya que se puede pintar toda la banda sin cambiar de lado. En otras palabras, ambos lados de la banda se confunden.*



Cuando S sea una superficie cerrada y orientable, diremos que S está orientada según la normal *exterior* si la normal apunta, para todo punto de la superficie, en dirección contraria al volumen encerrado por la superficie, y diremos que está orientada según la normal *interior* en caso contrario.

Observación. Si S es regular y $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S podemos definir el campo de normales como

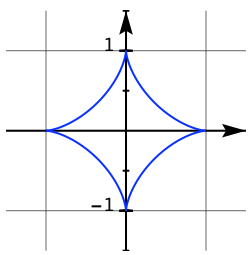
$$\hat{n} = \hat{n}(\vec{\varphi}(u,v)) := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u,v) / \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right\|.$$

Notemos además que cambiando el orden de las variables obtenemos la orientación opuesta.

1.4. Ejercicios

Ejercicios Resueltos

1. Considere la parametrización $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 0)$. La curva $\vec{r}([0, 2\pi])$ recibe el nombre de astroide.



   (i) Calcule el vector tangente, normal y binormal, la curvatura y la torsion a la curva en los puntos donde tenga sentido. Justifique brevemente en cuales puntos estas nociones están bien definidas.

   (ii) Calcule además la parametrización en longitud de arco y el largo total de la curva.

   Solución.

   El vector tangente viene dado por:

$$T(\theta) = \begin{cases} (-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \vee \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0) & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \vee \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

   Notemos que este vector no esta definido en $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{\vec{r}(0+h) - \vec{r}(0)}{h} &= (-1, 0, 0) \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{\vec{r}(2\pi+h) - \vec{r}(\pi)}{h} &= (1, 0, 0), \end{aligned}$$

   entonces $\vec{r}$ no es diferenciable en 0 y 2π. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{\vec{r}(\frac{\pi}{2}+h) - \vec{r}(\frac{\pi}{2})}{h} &= (0, 1, 0) \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{\vec{r}(\frac{\pi}{2}+h) - \vec{r}(\frac{\pi}{2})}{h} &= (0, -1, 0), \end{aligned}$$

lo cual implica que $\vec{r}$ no es diferenciable en $\frac{\pi}{2}$. Así también

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{\vec{r}(\pi+h)-\vec{r}(\pi)}{h} &= (1,0,0)\\ \lim_{h\to 0^-}\frac{\vec{r}(\pi+h)-\vec{r}(\pi)}{h} &= (-1,0,0)\end{aligned}$$

implica que $\vec{r}$ no es diferenciable en π. Finalmente,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{\vec{r}(\frac{3\pi}{2}+h)-\vec{r}(\frac{3\pi}{2})}{h} &= (0,-1,0)\\ \lim_{h\to 0^-}\frac{\vec{r}(\frac{3\pi}{2}+h)-\vec{r}(\frac{3\pi}{2})}{h} &= (0,1,0)\end{aligned}$$

implica que $\vec{r}$ no es diferenciable en $\frac{3\pi}{2}$.
El vector normal está dado por:

$$N(\theta) = \begin{cases}(\operatorname{sen}\theta,\cos\theta,0) & 0<\theta<\frac{\pi}{2}\vee\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}\\ (-\operatorname{sen}\theta,-\cos\theta,0) & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\vee\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi.\end{cases}$$

El vector binormal es determinado como sigue:
Para $0<\theta<\frac{\pi}{2}\vee\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$,

$$B(\theta)=T\times N=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\end{vmatrix}=(0,0,-1).$$

Y para $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\vee\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$:

$$B(\theta) = T\times N=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0\end{vmatrix}=(0,0,-1).$$

La curvatura de esta figura viene dada por:
Para $0<\theta<\frac{\pi}{2}\vee\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\vee\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$:

$$k(\theta)=\left\|\frac{dT}{d\theta}\right\|/\left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\|=1.$$

La torsión se calcula para $0<\theta<\frac{\pi}{2}\vee\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ como:

$$k(\theta)=\frac{\frac{dB}{d\theta}\cdot N(\theta)}{|||\frac{d\vec{r}}{d\theta}|||}=0\cdot N(\theta)=0.$$

Finalmente, la parametrización en longitud de arco es la siguiente

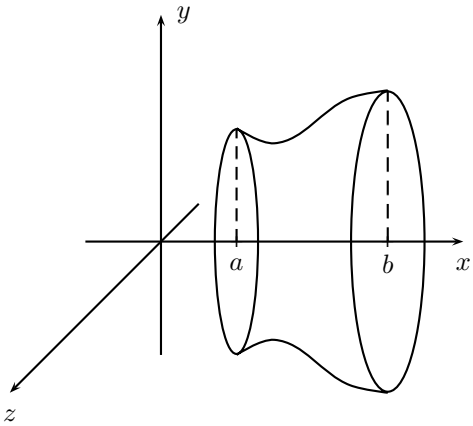
$$s(t)=\int_0^t |||\frac{d\vec{r}}{d\theta}|||d\theta=\frac{3}{2}\int_0^t \operatorname{sen}2\theta d\theta=\frac{3}{4}(1-\cos(2t)),$$

lo cual implica que $t(s)=\frac{1}{2}\arccos(1-\frac{4s}{3})$. Obteniendo

$$\vec{r}(t(s))=(\cos^3(\frac{1}{2}\arccos(1-\frac{4s}{3})),\operatorname{sen}^3(\frac{1}{2}\arccos(1-\frac{4s}{3})),0).$$

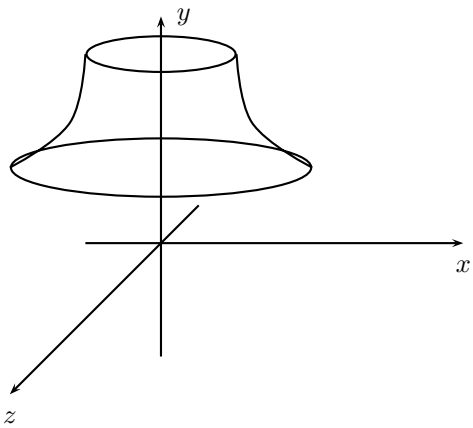
Por lo tanto, el largo de la curva es $l(\Gamma)=6$.

2. Demuestre que las fórmulas:



$$A(R_f) = \int_a^b 2\pi\sqrt{1+f'(x)^2}f(x)dx$$

y



$$A(S_f) = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

usadas para las áreas de revolución de una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en torno al eje x e y respectivamente, son consistentes con la definición de área dada en este capítulo.

Demostración.

Para el eje x: Si "intercambiamos" mentalmente el eje x con el eje z y utilizamos coordenadas cilíndricas, podemos escribir la superficie de revolución de f en torno a x (ahora z) como:

$$\overrightarrow{S}(z,\theta) = f(z)\widehat{\rho} + z\widehat{k}, \quad (z,\theta) \in [a,b] \times [0,2\pi]$$

Recordamos la definición de área

$$A(S) = \iint_S \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v} \right\| dudv.$$

Así, calculamos lo siguiente:

$$\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial \theta} = f(z)\widehat{\theta}, \qquad \frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial z} = f^{'}(z)\widehat{\rho} + \widehat{k}.$$

Luego

$$\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial z} = f^{'}(z)f(z)\widehat{\theta} \times \widehat{\rho} + f(z)\widehat{\theta} \times \widehat{k} = f(z)[f^{'}(z)\widehat{k} + \widehat{\rho}].$$

Concluyendo que

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial z} \right\| \partial\theta\partial z = \int_a^b 2\pi f(z)\sqrt{1+f^{'}(z)^2}dz$$

y como consideramos intercambiamos los roles de x con z, recuperamos la fórmula deseada.

Para el eje y: Ahora intercambiemos y con z, de este modo, la parametrizaci'on es:

$$\overrightarrow{S}(x,\theta) = x\widehat{\rho} + f(x)\widehat{k}, \quad (x,\theta) \in [a,b] \times [0,2\pi].$$

Igual que antes:

$$\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial x} = \widehat{\rho} + f^{'}(x)\widehat{k} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial \theta} = x\widehat{\theta}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial x} \times \frac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial \theta} = x\widehat{k} + xf^{'}(x)(-\widehat{\rho}),$$

cuya norma es igual a $|x|\sqrt{1+f'(x)^2}$, concluyendo que

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} x\sqrt{1+f'(x)^2}\partial\theta\partial x = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

3. Calcule el área de la intersección entre $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+z^2=a^2$.

   Solución. Manipulando apropiadamente las ecuaciones que definen la superficie a estudiar, se obtiene

$$x^2+y^2-x^2-z^2=0 \quad \Rightarrow \quad (y+z)(y-z)=0 \quad \Rightarrow \quad y=\pm z,$$

   de este modo la parametrización de la superficie está dada por

$$\overrightarrow{\sigma}(\theta,z) = a\widehat{\rho} + z\widehat{k}, \quad (\theta,z) \in [0,2\pi] \times [-a\cos(\theta), a\cos(\theta)].$$

   Observamos que el rango al que pertenece z esta limitado por y, que vale $a\cos(\theta)$, y como la superficie es simétrica, podemos considerar $z>0$ y $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, para después multiplicar el resultado obtenido por 8 (número de caras de la superficie). Así, dado que $\frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial\theta} = a\widehat{\theta}$ y $\frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial z} = \widehat{k}$, se obtiene

$$\frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\overrightarrow{\sigma}}{\partial z} = a\widehat{\rho}$$

   cuya norma es igual a a. Por lo tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos(\theta)} a\delta z\delta\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos(\theta)\delta\theta = a^2\operatorname{sen}(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2$$

   Deducimos entonces que el valor del área requerida es $8a^2$.

Ejercicios Propuestos

1. Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente : el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(A,0)$ y $(-A,0)$ es constante e igual a $B>0$. (Lemniscata)

2. (a) Sea Γ la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio R_0, la cual rueda sin resbalar sobre otra circunferencia de radio mayor $R>R_0$. Parametrice la curva resultante y determine la función de longitud de arco. Estudie la curvatura y la torsión donde tenga sentido.

   (b) Parametrizar la circunferencia que pasa por los puntos $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

   Indicación: Note que el vector $(1,1,1)$ es normal al plano que contiene a la circunferencia.

3. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que $z = z(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\theta^2} &= z \\ z(0) = 1 \quad &, \quad \frac{dz}{d\theta}(0) = 0, \end{aligned}$$

donde (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas.

   (a) Encuentre una parametrización de la curva γ descrita por la partícula (use a θ como parámetro).

   (b) Calcule la longitud de γ si $\theta \in [0, 2\pi]$.

   (c) Calcule el vector tangente, el normal y el binormal asociado a γ, así como su curvatura y su torsión.

4. Calcular la masa del alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con el plano $x+y+z = 0$ y cuya densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z) = x^2$.

5. Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad : existe un punto $\vec{P}_0$ por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (note que todo arco de circunferencia satisface esta propiedad). Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de Γ en longitud de arco.

   (a) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que

   $$\vec{P}_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

   donde $\vec{N}(s)$ denota el vector normal.

   (b) Demuestre que se cumplen las siguientes igualdades

   $$\begin{aligned} 1 - \kappa(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0, \end{aligned}$$

   donde $\kappa(s), \tau(s)$ son la curvatura y la torsión de Γ, respectivamente.

   (c) Concluya que Γ es una curva plana.

   (d) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

6. Calcule el área de la intersección entre $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$ donde a es una constante.

7. Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ con $R > 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$. Calcule el área de la superficie definida por la porción del cilindro que queda fuera del paraboloide.

8. Calcular la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$, cuando la densidad de masa es igual a la distancia de (x, y, z) a un punto fijo (x_0, y_0, z_0).

9. Sea S el grafo de la función $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Calcular el vector normal y probar que:

$$A(S) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Capítulo 2

Integración de campos vectoriales

2.1. Integral de Trabajo

En general se define el *trabajo realizado* por una fuerza $\vec{F}$ en un desplazamiento $\vec{d}$ como

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre estos vectores.

Este representa el trabajo que realiza la fuerza constante $\vec{F}$, la cual se encuentra presente en el medio, sobre una partícula que se desplaza en línea recta y cuyo movimiento está dado por $\vec{d}$.

En el caso de un desplazamiento curvilíneo $\vec{r}(t)$, sometido a un campo de fuerzas $\vec{F}$ no constante, el trabajo se puede aproximar por la suma

$$W \simeq \sum_{i=0}^{k-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot (\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)). \tag{2.1}$$

Siguiendo el mismo argumento dado para la longitud de arco, se puede demostrar que si la parametrización $\vec{r}$ es suave y si el campo de fuerzas $\vec{F}$ es contínuo, entonces la suma anterior converge hacia la integral

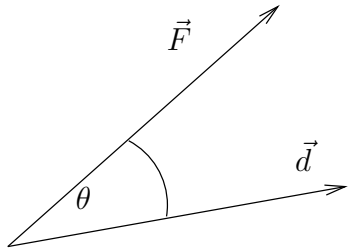
$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt.$$

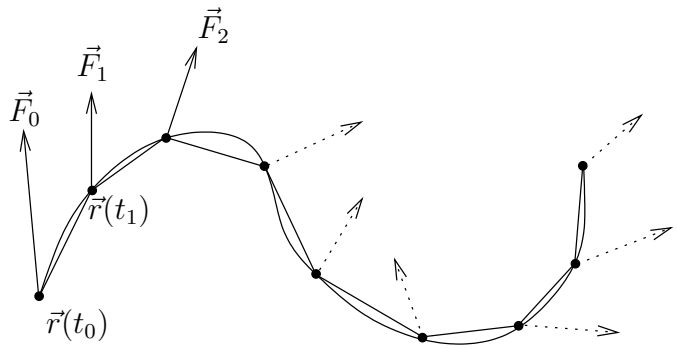
Esto nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 2.1.1. *Sea Γ una curva simple y regular, y sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial contínuo. Definimos la* integral de trabajo *de $\vec{F}$ sobre la curva $\Gamma \subseteq \Omega$ como la integral*

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt,$$

donde $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ.





Es fácil verificar que esta integral no depende de la parametrización regular $\vec{r}$ elegida, salvo por el cambio de signo que se produce cuando se trabaja con una parametrización que invierta la orientación de la curva Γ. Esto implica que la integral de trabajo esta bien definida sólo si la orientación de la curva Γ está claramente establecida.

Ejemplo 2.1.2. *Calculemos la integral del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $\vec{F}(x, y) = (3x + 4y, 2x + 3y^2)$, a lo largo de la curva*

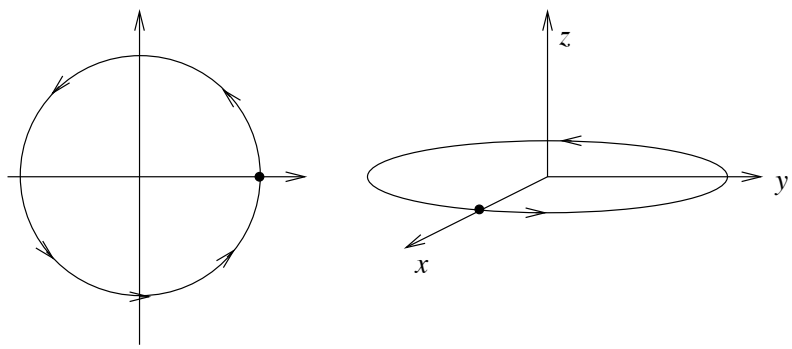


Figura 2.1: circulo de radio 2 con orientación positiva (anti-horario)

Una parametrización posible es $\vec{r} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t).$$

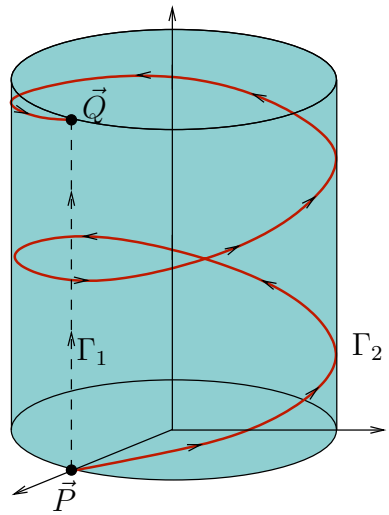
Se obtiene que el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} (6\cos t + 8\operatorname{sen} t, 4\cos t + 12\operatorname{sen}^2 t) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-16\operatorname{sen}^2 t + 8\cos^2 t)\mathrm{d}t = -16\pi + 8\pi = -8\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.3. *Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo dado por $\vec{F}(x, y, z) = (x, -y, z)$. Considere además la curva dada en el ejemplo anterior (extendiendo por 0 la tercera coordenada). El trabajo resulta ser:*

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} (2\cos t, -2\operatorname{sen} t, 0) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -8\operatorname{sen} t \cos t\, \mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

Consideremos ahora los dos caminos Γ_1 y Γ_2 dados por la figura que van desde $P = (1, 0, 0)$ hasta $Q = (1, 0, 4)$:



Sus parametrizaciones están dadas por

$$\vec{r}_1(t) = P + t(Q - P) = (1, 0, 4t),\ t \in [0, 1], \qquad y$$
$$\vec{r}_2(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 4t),\ t \in [0, 1].$$

Los trabajos realizados son:

$$W_1(t) = \int_0^1 (1, 0, 4t) \cdot (0, 0, 4)\, dt = \int_0^1 16t\, dt = 8, \qquad y$$
$$W_2(t) = \int_0^1 (\cos(2\pi t), -\operatorname{sen}(2\pi t), 4t) \cdot (-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 4)\, dt$$
$$= \int_0^1 (-4\pi \operatorname{sen}(2\pi t) \cos(2\pi t) + 16t)\, dt = \int_0^1 16t\, dt = 8.$$

Notemos que en el ejemplo anterior la integral de trabajo es igual a 0 en el caso de la primera curva que es cerrada, y para la helicoide, el trabajo sobre la curva Γ_1 es el mismo que sobre la curva Γ_2. De hecho, se puede mostrar que para cualquier curva que una P y Q, esta integral tendrá el mismo valor. Esto se debe a que $\vec{F} = -\nabla g$, donde $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está dada por $g(x, y, z) = (-x^2 + y^2 - z^2)/2$. En efecto

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt = -\int_a^b \nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt$$
$$= -\int_a^b \frac{d}{dt}[g(\vec{r}(t))]\, dt = g(\vec{r}(a)) - g(\vec{r}(b)),$$

y esta última cantidad depende solamente de los puntos extremos de la curva Γ y no de la forma que esta tenga. De esta manera motivamos el estudio de la siguiente sección.

2.1.1. Campos Conservativos

Definición 2.1.4. *Se dirá que un campo $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es* conservativo *si existe una función diferenciable $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

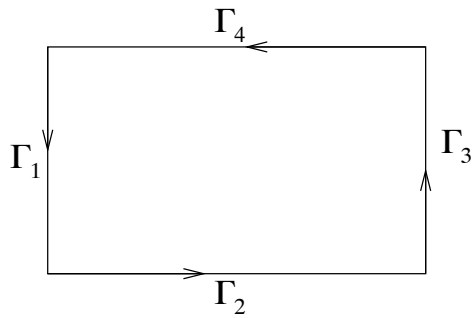
$$\vec{F} = -\nabla g.$$

En este caso la función g se conoce como el potencial *de la función $\vec{F}$.*

Así en el ejemplo 2.1.3, la función $g(x,y,z) = (-x^2+y^2-z^2)/2$ corresponde al potencial de la función $\vec{F}(x,y,z) = (x,-y,z)$.

Antes de caracterizar la existencia de campos conservativos, consideremos una curva Γ formada por la unión de finitas curvas regulares Γ_i, $i = 1,...,k$. Una curva Γ de este tipo se dirá entonces *regular por trozos* (o por pedazos), y se denotará por $\Gamma = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$, o por $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2...\Gamma_k$.

Ejemplo 2.1.5. *Consideramos la curva dada por el borde de un rectángulo como se muestra en la figura:*



Notemos que tanto una integral de línea, como una de trabajo, pueden ser trivialmente definidas para una curva $\Gamma = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$ regular por trozos, de la manera siguiente:

$$\int_\Gamma f\,dl = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f\,dl \quad \text{y} \quad \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{2.2}$$

Advertamos que cada segmento Γ_i debe ser recorrido de manera consistente con la orientación de la curva para no producir problemas de indefinición de estas integrales.

Finalmente, para una curva Γ con una orientación dad, denotemos por Γ^- la misma curva con la orientación inversa. Es directo verificar las siguientes relaciones:

$$\int_{\Gamma^-} f\,dl = -\int_\Gamma f\,dl \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma^-} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{2.3}$$

Teorema 2.1.6. *Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial contínuo, y Ω una abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *El campo $\vec{F}$ es conservativo.*
2. *Para toda curva Γ regular por trozos, y cerrada: es decir, la parametrización $\vec{r}$ asociada satisface que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, se tiene*
$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$
3. *Para cualquier par de curvas, Γ_1 y Γ_2, con igual punto inicial y final, se tiene*
$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Demostración.

- **1 implica 2:** Sea $h(t) = -g(\vec{r}(t))$. Se tiene
$$\frac{dh}{dt}(t) = -\nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t),$$

de donde se obtiene que

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^t \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\,dt = h(b)-h(a) = g(\vec{r}(a)) - g(\vec{r}(b)) = 0.$$

- **2 implica 3:** Basta considerar la curva cerrada $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_1^-$.
- **3 implica 1:** Definamos $g(p) = -\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde Γ es una curva regular cualquiera cuyo origen es un punto x_0 dado, y cuyo punto final es p. De la hipótesis 3 sabemos que g no depende de la forma de Γ por lo que esta función esta bien definida. Mediante un cálculo simple verificamos que $\nabla g = -\vec{F}$.

■

Ejemplo 2.1.7. *Algunos campos conservativos son:*

Campo constante $\vec{F} \equiv \vec{F}_0$*, obteniendo que* $g(\vec{x}) = -\vec{F}_0\cdot\vec{x}$*, para todo* $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$*.*

Campo de fuerza radial *cuyo módulo sólo depende de la distancia al origen:*

$$\vec{F}(\vec{x}) = \phi(x^2)\vec{x},$$

donde $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$*, y* x *es la magnitud de* $\vec{x}$*. Esta función sólo será definida para* $\vec{x}\neq 0$*.*

En efecto, considerando $\Phi(\tau) = \int_a^\tau \phi(s)\,ds$ *y* $g(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\Phi(x^2)$*, para todo* $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$*, se concluye que* $\vec{F} = -\nabla g$*.*

Una aplicación del último caso es el campo gravitacional *entre dos objetos de masa* M *y* m*:*

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{GMm}{x^2}\hat{x},$$

donde $\hat{x} := \vec{x}/x$ *si* $\vec{x}\neq 0$*, y* G *es la constante gravitacional universal. Obteniéndose* $g(\vec{x}) = \frac{GMm}{x}$*.*

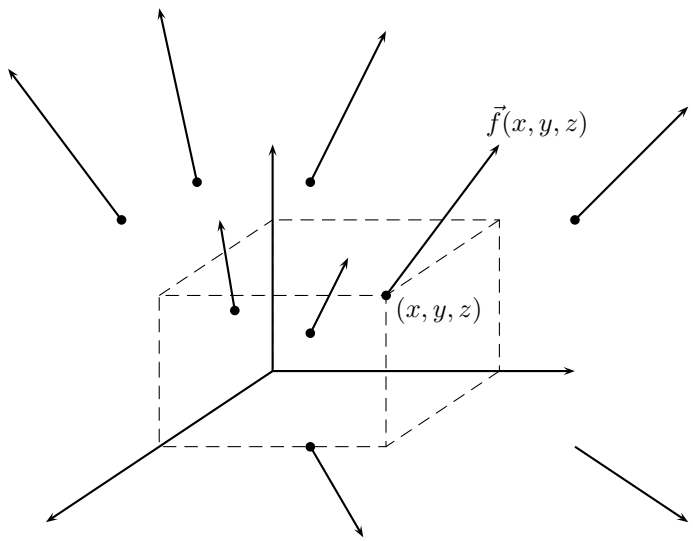
2.2. Integral de flujo

2.2.1. Líneas de flujo de un campo vectorial

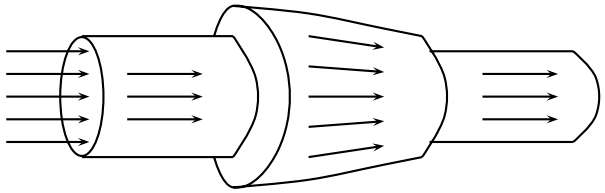
Llamaremos campo escalar a toda función $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y campo vectorial a toda función $\vec{f}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Nos concentraremos en los casos $n=2$ y $n=3$, y en general supondremos que los campos son de clase $\mathcal{C}^1$. De esta forma se obtiene

$$\vec{f}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)).$$

Representación gráfica



Ejemplo 2.2.1. *Consideremos un fluido moviéndose en una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Si a cada punto $(x,y,z) \in \Omega$ le asociamos la velocidad de las partículas en dicho punto $\vec{v}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ obtenemos el campo vectorial de velocidades del fluido.*

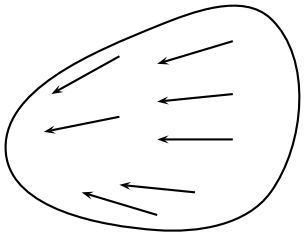


Ejemplo 2.2.2. *Una pieza metálica se calienta por un lado y se enfría por el otro. El calor fluye de regiones calientes a regiones frías con una velocidad proporcional al gradiente de temperaturas:*

$$\vec{J} = -k\nabla T(x,y,z),$$

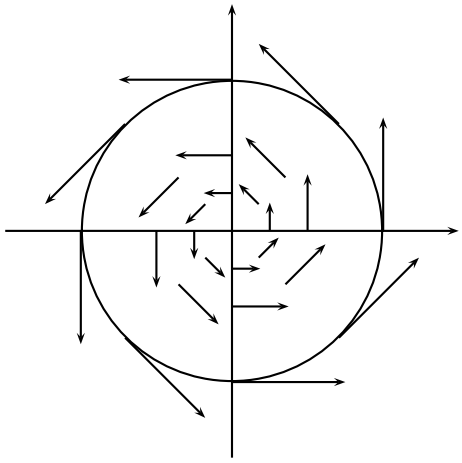
donde la constante $k > 0$ se llama conductividad térmica. Ilustremos este fenómeno con

$$\vec{J} = -k\nabla T, \qquad T(x,y,z) = t^a \text{ en el punto } (x,y,z).$$



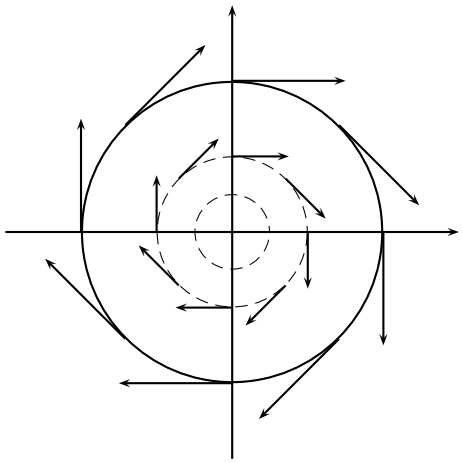
Ejemplo 2.2.3. *Las partículas de un disco que gira con velocidad angular constante ω están sujetas al campo de velocidades $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

$$\vec{v}(x, y) = \omega(-y, x).$$



Ejemplo 2.2.4. *La velocidad de las partículas de un fluido con movimiento circular (como cuando quitamos el tapón del lavamanos) puede aproximarse por*

$$\vec{v}(x, y) = \omega \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

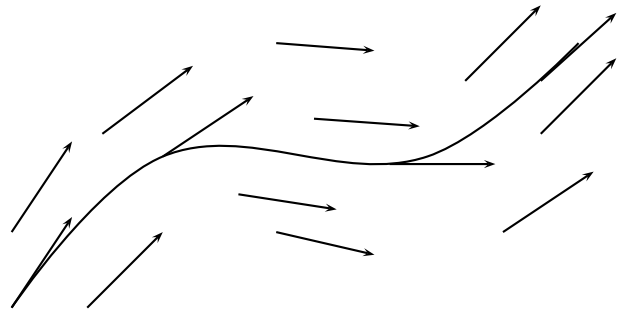


Líneas de Flujo

Sea $\vec{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Si interpretamos $\vec{f}$ como el campo de velocidades de un fluido que ocupa cierta región Ω, y dejamos una partícula suspendida en el fluido en una posición dada, la trayectoria descrita por dicha partícula se llama *línea de flujo*. Matemáticamente, las líneas de flujo son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{f}(r(\vec{t})). \tag{2.4}$$

Geométricamente, "ensartamos" una curva de manera que el vector velocidad coincida con el campo vectorial, como se ve en la próxima figura



Consideremos la línea de flujo que pasa por $\vec{r}_0$ en el instante $t = 0$, y definamos la función $\Phi(t, \vec{r}_0) =$ como la posición de la partícula suspendida en esta línea de flujo una vez trascurrido un tiempo t. Esta función se llama *flujo asociado* al campo $\vec{f}$ y está definida por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt}(t, \vec{r}_0) = \vec{f}(\Phi(t, \vec{r}_0)) \\ \Phi(0, \vec{r}_0) = \vec{r}_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Ejercicio 2.2.5. *Describir la líneas de flujo del campo gravitacional*

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3},$$

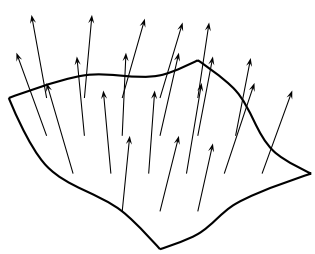
y más generalmente las líneas del flujo de un campo radial

$$\vec{f}(\vec{r}) = g(\|\vec{r}\|)\hat{r}.$$

Ejercicio 2.2.6. *Encontrar las líneas de flujo de los campos* $(-y, x)$ *y* $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$.

2.2.2. Integral de flujo de un campo vectorial

Consideremos a un fluido sometido a un campo de velocidades $\vec{f}$ y una superficie S inmersa en este fluido como se muestra en la siguiente figura:



En el resto de esta sección supondremos que S es una superficie regular *orientable* (ver Definición 1.3.12), cuyo campo de vectores normales es denotado por $\hat{n}$. Sea además $\vec{\varphi}$ una parametrización regular asociada a esta superficie S, entonces la cantidad $\vec{f}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \hat{n}(u, v)$ representa la velocidad ortogonal a S de las partículas que pasan por el punto $\vec{\varphi}(u, v) \in S$. Así, en un pequeño lapso de tiempo Δt, la cantidad de volumen de líquido que atraviesa un elemento de área (o de superficie), dado por ΔA, es aproximadamente igual a

$$\Delta V \simeq [\vec{f}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \hat{n}]\Delta A \Delta t.$$

Como $\Delta A \simeq \|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\|\Delta u \Delta v$, de la definición del campo normal $\hat{n}$ obtenemos que

$$\Delta V \simeq \vec{f}(\vec{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right] \Delta u \Delta v \Delta t,$$

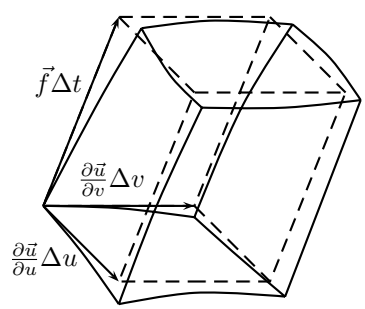
e integrando sobre la superficie se deduce la expresión

$$\Delta V_{TOTAL} \simeq \left\{ \iint_D \vec{f}(\vec{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right] dudv \right\} \Delta t.$$

En consecuencia, el *caudal* (volumen por unidad de tiempo) que atraviesa la pared S puede estimarse como

$$Q := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_{TOTAL}}{\Delta t} = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{n}\, dA. \tag{2.6}$$

Esta última expresión se pude obtener alternativamente como sigue. Notemos que el volumen que atraviesa un elemento de superficie ΔS en un intervalo de tiempo Δt puede aproximarse por el volumen del paralelepípedo descrito por los vectores $\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\Delta u$, $\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\Delta v$, $\vec{f}\Delta t$:



Luego, dado que el volumen de un paralelepípedo definido por tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ viene dado por

$$\mathrm{Vol}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

se obtiene

$$\Delta V = \vec{f}\Delta t \cdot \left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\Delta v\right].$$

Deduciendo para el caudal Q la expresión

$$Q = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{n}\, dA.$$

Definición 2.2.7. *Sean S una superficie orientada según el campo de normales $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$, y $\vec{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Definimos la* integral de flujo *del campo $\vec{f}$ sobre la superficie S como*

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} := \iint_S \vec{f} \cdot \hat{n}\, dA \tag{2.7}$$

Si $\vec{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S tal que

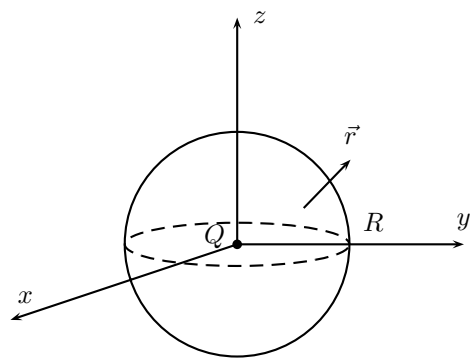
$$\hat{n} = \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} \left\| \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} \right\|,$$

entonces

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_D \vec{f}(\vec{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\vec{u}}(u,v) \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right] dudv.$$

Observación. Notemos que para dar sentido a la anterior integral de flujo fue necesario especificar el campo de normales $\hat{n}$. Así por ejemplo, si usamos $\hat{n} = \hat{r}$ como normal para la esfera, la integral es negativa cuando se trata de un caudal que entra y viceversa. Si en cambio usamos la normal $\hat{n} = -\hat{r}$ la interpretación es la opuesta.

Ejemplo 2.2.8. *Procederemos a calcular el flujo del campo eléctrico generado por una carga Q en el origen, a través del manto de le esfera $S(0, R)$ orientado según la normal exterior.*



Recordemos que el campo eléctrico producido por la carga Q viene dado por

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

De esta forma se obtiene el siguiente flujo eléctrico ϕ:

$$\phi = \iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_S \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}R^2 sen\theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Ejemplo 2.2.9. *Procederemos a calcular el flujo del campo eléctrico generado por una carga Q en el origen, sobre el plano infinito $h = 2$.*

DIBUJO

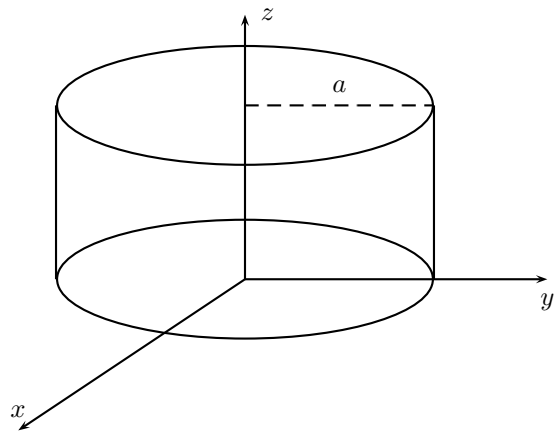
En este caso la normal es constante $\hat{n} = \hat{k}$. Dado que $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$, obtenemos que el flujo eléctrico ϕ viene dado por

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}\cdot\hat{k}dxdy = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}^3}dxdy = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}^3}rd\theta dr,$$

y vía un cambio de variables a coordenadas polares se deduce que

$$\phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\int_0^{\alpha}(h^2+r^2)^{-3/2}rdr = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left[-(h^2+r^2)^{-1/2}\right]\Big|_0^{\infty} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 h}.$$

Ejemplo 2.2.10. *Repitamos el ejemplo anterior pero ahora sobre el manto del cilindro infinito* $x^3 + y^2 = a^2$.



Usaremos coordenadas cilíndricas, de esta forma se tiene que $\hat{n} = \hat{r} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ *y*

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{z^2 + r^2}^3}.$$

Por lo tanto el flujo eléctrico ϕ *se calcula como sigue:*

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\hat{r} + z\hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}^3}\cdot\hat{r}\right)a\,d\theta\,dz = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{z}{a})^2}^3}dz \\
&= \frac{Qa}{2\varepsilon_0}\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}^3}du = \frac{Qa}{2\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cos h^2(\tau)}d\tau = \frac{Qa}{2\varepsilon_0}\operatorname{tgh}(\tau)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{Qa}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Notemos que el último cambio de variables fue $u = \operatorname{senh}\tau$, *obteniendo* $du = \cosh\tau d\tau$.

2.3. Ejercicios

1. Calcular la integral de flujo del campo $\vec{f} = 2x\hat{\imath} + yx\hat{\jmath} + zx\hat{k}$ a través del triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$. Defina ud. la orientación.

   Posible Respuesta: $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{A} = 1$.

2. Calcular la integral de flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (0,0,-1) = -\hat{k}$ a través del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Defina ud. la orientación.

   Posible Respuesta: $\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{A} = \pi$.

3. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (2x + y^2)\hat{\imath} + (3y - 4x)\hat{\jmath}$. Calcular la integral de trabajo $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\sigma}$ donde γ es la *lenteja* formada por las ecuaciones $x = y^2$; $y = x^2$; $x, y \geq 0$ recorrida en sentido anti-horario.

4. Considere la curva plana Γ descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a\,(1 - \cos(\theta)) \quad a > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$$

(i) Encuentre una parametrización para Γ. Gráfique esta parametrización detalladamente y encuentre sus posibles irregularidades.

(ii) Calcule el largo de Γ.

(iii) Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F} = \left(2xy^2\cos\left(x^2y^2\right) + \frac{2x}{x^2+y^2+1}, 2x^2y\cos\left(x^2y^2\right) + \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$$

al dar una vuelta completa a la curva en el sentido anti-horario.

5. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria γ sobre el manto del paraboloide invertido de ecuación $x^2+y^2=-z$ de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta)=-e^{-2\theta}$, $\theta\geq 0$. Considere el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} + x\sin(x^2), \frac{-2xy}{x^2+y^2} - y^2\cos(y^3), e^z\right)$$

Calcule el trabajo del campo a través de γ.

Indicación: $\int_0^\infty e^{-x}\cos^3(x)dx = \frac{2}{5}$.

6. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2+y^2 = \frac{z^2}{h^2}\ ,\ h>0$$

de forma tal que la altura $z=z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\theta} &= z\\ z(0) &= h\end{aligned}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

i) Bosqueje la curva y demuestre que $\tau/k = h\sqrt{2}$, donde τ y k corresponden a la torsión y curvatura de Γ, respectivamente.

ii) Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2}\right)$. Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3},\right]$. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0.

7. Calcular el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ a través del disco definido por las ecuaciones

$$x^2+y^2\leq 25, \quad z=12,$$

y orientado según la normal superior $\hat{k}$.

8. (a) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z)=(x-y\cos z, y-x, z-e^y)$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z, centrado en el origen y de radios R_0 y r_0 ($R_0>r_0$).

(b) Calcular la integral de superficie $\iint\limits_{\Sigma}\nabla\phi\cdot d\vec{S}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ orientado según la normal interior y ϕ es el campo escalar $\phi(x,y,z)=(x+1)^2+2(y-1)^2+z^2$.

9. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria Γ definida sobre el casquete de una esfera unitaria, de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta)=e^{-\theta}$, donde $\theta\geq 0$.

Considere el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + x\,\mathrm{sen}(x^2), \frac{-2y}{x^2+y^2+z^2} - y^2\cos(y^3), e^z\right).$$

(a) Demostrar que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a través de Γ es acotado superiormente por 3. Puede dar una cota más fina?.

(b) Demuestre que el trabajo realizado es acotado inferiormente por $-1/3 - e^{-1}$.

Indicación: En el desarrollo de esta pregunta deberá acotar expresiones que dependen de las funciones seno y coseno, así como ciertas integrales del tipo $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} u \, du$ cuyo valor es indefinido. Esto se logra de manera directa usando propiedades de acotamiento de las funciones seno y coseno.

Capítulo 3

Divergencia y rotor

3.1. El teorema de la divergencia.

El teorema de la divergencia es un resultado fundamental del cálculo vectorial. Formalmente, consiste en una expresión del tipo

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV \tag{3.1}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\partial\Omega$ es una superficie cerrada regular por trozos orientada según la normal exterior a la región Ω. El término $\operatorname{div}(\vec{F})$ corresponde a la divergencia de la función vectorial $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ de clase C^1, e involucra derivadas parciales de $\vec{F}$. Su expresión en el sistema de coordenadas cartesianas es la siguiente:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \tag{3.2}$$

Resulta también útil la notación

$$\vec{\nabla} := \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.3}$$

obteniendo de esta forma la relación

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}. \tag{3.4}$$

En la sección 3.2 daremos una expresión general para calcular la divergencia para un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal arbitrario.

En cierta forma, la fórmula (3.1) extiende al caso vectorial el *teorema fundamental del cálculo* para funciones de una variable, el cual establece que para una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene

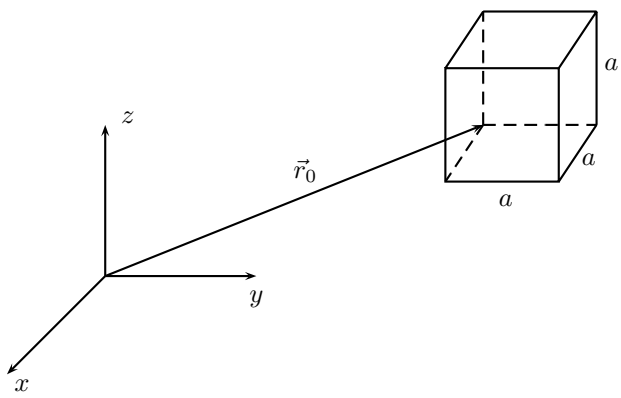
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

La expresión (3.1) coincide con la fórmula anterior cuando $\vec{F} = f$, $\Omega = [a, b]$ y $\partial\Omega = \{a, b\}$.

Antes de enunciar el teorema principal de esta sección, motivemos la obtención de la expresión dada en (3.1) para un caso simple. Supongamos que el conjunto Ω viene dado por el cubo de lado $a > 0$ y vértice $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\Omega = \Omega_a = [x_0, x_0 + a] \times [y_0, y_0 + a] \times [z_0, z_0 + a], \tag{3.5}$$

como se ve en la siguiente figura



Llamemos S_i a las 6 superficies regulares asociadas a las caras de este cubo, caracterizando cada superficie S_i mediante la normal exterior a cada una de ellas como sigue:

$$S_1 : \hat{n} = \hat{\imath}; \quad S_2 : \hat{n} = \hat{\jmath}; \quad S_3 : \hat{n} = \hat{k}; \quad S_4 : \hat{n} = -\hat{\imath}; \quad S_5 : \hat{n} = -\hat{\jmath}; \quad S_6 : \hat{n} = -\hat{k}. \tag{3.6}$$

Definamos la superficie cerrada y regular por trozos siguiente:

$$S = \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} S_i, \tag{3.7}$$

a la cual asignaremos la orientación dada por la normal exterior. Así, para todo campo $\vec{F}$ se tiene

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \tag{3.8}$$

Analicemos la integral anterior, para el campo continuamente diferenciable $\vec{F}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\hat{\imath} + f_2(x,y,z)\hat{\jmath} + f_3(x,y,z)\hat{k}$, sobre las superficies S_3 y S_6

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_6} \vec{F} \cdot \hat{k}\, dA = \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} f_3(x,y,z_0+a)dydx, \\
\iint_{S_6} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_3} \vec{F} \cdot (-\hat{k})\, dA = -\int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} f_3(x,y,z_0)dydx.
\end{aligned}$$

Sumando ambas integrales se obtiene:

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_6} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} \left[f_3(x,y,z_0+a) - f_3(x,y,z_0)\right] dydx = \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} \int_{z_0}^{z_0+a} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)\, dzdydz.$$

Repitiendo el procedimiento anterior para el resto de las superficies S_i se obtiene

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dV = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV,$$

que coincide con la expresión (3.1). Si bien esta relación fue obtenida en un caso muy simple, como lo es la frontera de un cubo, podemos ya inferir lo siguiente:

$$\operatorname{div}(\vec{F})(\vec{r}_0) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(\Omega_a)} \iint_{\partial\Omega_a} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \lim_{a\to 0} \frac{\text{flujo de } \vec{F} \text{ a través de } \Omega_a}{\text{volumen de } \Omega_a}. \tag{3.9}$$

Para probar (3.9) basta notar que el volumen del cubo Ω_a es simplemente $\operatorname{Vol}(\Omega_a) = a^3$, y usar la expresión (3.1) y la igualdad de límites

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_t^{t+a} g(\tau)\,d\tau = g(t),$$

valida para toda función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, y $t \in \operatorname{dom} g$.

La ecuación (3.9) nos da una nueva expresión para la divergencia de un campo $\vec{F}$ que no depende del sistema de coordenadas que se este utilizando, y que por lo tanto puede considerarse como una definición de este operador.

Definición 3.1.1. *Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuamente diferenciable (C^1) en $\mathbb{R}^3$, con Ω abierto. Sea también un punto arbitrario dado $\vec{r}_0 \in \Omega$. Consideremos una familia $\{\Omega_a\}_{a>0}$ de abiertos acotados contenidos en Ω cuyas fronteras $\{\partial\Omega_a\}_{a>0}$ son superficies regulares por trozos y orientadas según la normal exterior, que satisfacen:*

(i) $\forall a > 0,\ \vec{r}_0 \in \overline{\Omega}_a$; (ii) $\operatorname{Vol}(\Omega_a) \to 0$ *y* $\operatorname{diam}(\Omega_a) := \sup\{\|x-y\| : x, y \in \Omega_a\} \to 0$ *cuando* $a \to 0$.

Entonces, definimos la función divergencia *para la función $\vec{F}$, denotada por* $\operatorname{div}\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *como la función que para cada punto $\vec{r}_0 \in \Omega$ le asocia el valor del límite dado en* (3.9).

Observación. Dado que los superficies frontera $\partial\Omega_a$ son regulares, en la definición anterior se pueden sustituir los volúmenes Ω_a por su adherencia $\overline{\Omega}_a$, en otras palabras, la familia de conjuntos $\{\Omega_a\}_{a>0}$ puede estar compuesta tanto por abiertos como por cerrados.

Observación. Se puede demostrar que el valor de la función divergencia no depende de los volúmenes Ω_a elegidos. Sin embargo, la expresión para para la divergencia si. Por ejemplo, hemos visto en el desarrollo anterior que al elegir Ω_a como cubos de lado a, dados por (3.5), se deduce la conocida expresión de la divergencia en coordenadas cartesianas dada en (3.2).

La relación (3.9) nos permite además interpretar físicamente este operador como el *flujo neto por unidad de volumen*. Luego, si $\operatorname{div}(\vec{F}) > 0$ se considera que el fluido se expande, y si $\operatorname{div}(\vec{F}) < 0$ se considera que el fluido se contrae.

A continuación probaremos el resultado principal de esta sección, estableciendo la relación (3.1) para el caso de una volumen Ω general.

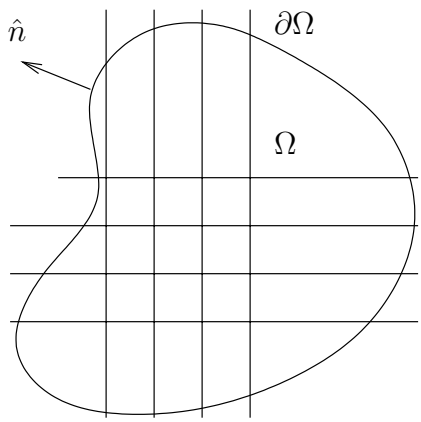
Teorema 3.1.2 (Teorema de Gauss de la divergencia). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre el abierto $\Omega' \supseteq \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})dV.$$

Demostración. Dividimos Ω en una unión finita de cubos, con la excepción que se da en la frontera de Ω, donde los pequeños volúmenes colindantes a esta tienen algún lado que no es vertical. Llamemos $\{Q_i\}_{i=1}^n$ a esta división.

Notemos que

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\partial Q_i} \vec{F}\cdot d\vec{S},$$



ya que las integrales sobre las caras interiores se anulan mutuamente cuando Q_i es un cubo. Gracias a la relación (3.9) que es valida para para todo Q_i que sea cubo, se obtiene lo siguiente:

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{Q_i} (\operatorname{div} \vec{F}) dV, \quad \text{para todo } Q_i \text{ cubo.} \tag{3.10}$$

En el caso que el volumen Q_i no sea exactamente un cubo, ya que intersecte la frontera, podemos usar la definición 3.1.1 de la función divergencia para aproximar la integral $\iint_{\partial Q_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ por

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} \simeq (\operatorname{div} \vec{F})(\vec{r}_i)\ \operatorname{Vol}(Q_i), \quad \text{para cierto } \vec{r}_i \in Q_i, \tag{3.11}$$

siempre cuando $\operatorname{Vol}(Q_i)$ y $\operatorname{diam}(Q_i)$ sean suficientemente pequeños. Denotando por $\hat{Q}_i$ los volúmenes que intersectan la frontera y por $\bar{Q}_i$ los cubos que no la intersectan, de las relaciones (3.10) y (3.11) deducimos

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_i \iint\limits_{\partial \bar{Q}_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \sum_i \iint\limits_{\partial \hat{Q}_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} \simeq \sum_i \iiint\limits_{\bar{Q}_i} (\operatorname{div} \vec{F}) dV + \sum_i (\operatorname{div} \vec{F})(\vec{r}_i)\ \operatorname{Vol}(Q_i).$$

Concluimos notando que el lado derecho de la anterior ecuación converge a $\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{F}) dV$ cuando las cantidades $\operatorname{Vol}(Q_i)$ y $\operatorname{diam}(Q_i)$ tienden a 0 para todo i (es decir, la división $\{Q_i\}$ se hace cada vez más fina), y que la aproximación anterior se transforma en igualdad en el límite. ■

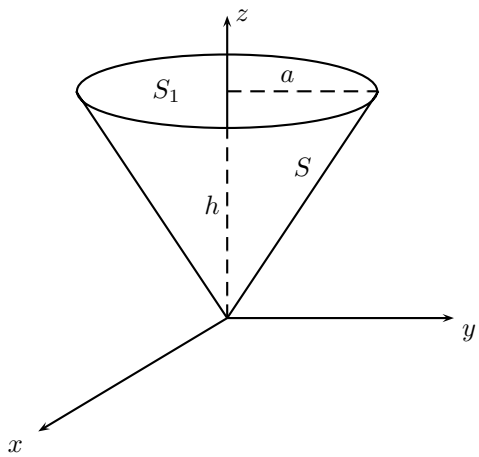
Observación. El Teorema de la divergencia es también válido en dominios no acotados siempre que las integrales sean convergentes.

Ejemplo 3.1.3. *Para el campo vectorial $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$, se tiene que*

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{A} = 3 \operatorname{Vol}(\Omega),$$

independiente de la forma de la región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.1.4. *Para el campo vectorial $\vec{f} = -\vec{k}$, el flujo a través del cono de radio a y altura h, cuyo manto es denotado por S y base por S_1, como muestra la figura:*



viene dado por

$$\iint_{S\cup S_1} \vec{f}\cdot d\vec{A} = \iiint_{cono} \operatorname{div}(\vec{f})dv = 0,$$

y por lo tanto, para el manto S se tiene

$$\iint_{S} \vec{f}\cdot d\vec{A} = -\iint_{S_1} \vec{f}\cdot d\vec{A} = \pi a^2.$$

Ejemplo 3.1.5. *La temperatura de una región de $\mathbb{R}^3$ está dada por*

$$T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2.$$

Calculemos el flujo de calor, sobre la esfera de radio R (denotada por Ω), en función de la conductividad térmica k del material. Para este caso se tiene que el campo de temperaturas (instantáneo) asociado a este potencial queda definido como

$$\vec{f} = -k\nabla T.$$

Entonces, el flujo de calor asociado es

$$\Phi = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{f})\, dV = -\iiint_{\Omega} k\operatorname{div}(\nabla T)\, dV = -6k\iiint_{\Omega} dV = -8k\pi R^3.$$

3.1.1. Divergencia de un campo radial

Consideremos un campo $\vec{f}(x,y,z) = g(r)\vec{r}$, con $\vec{r} = (x,y,z)$ y $r = \|\vec{r}\|$, para cierta función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^1. Esto último llevado a coordenadas cartesianas nos dice lo siguiente

$$f(x,y,z) = \left(xg\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), yg\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), zg\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right).$$

Entonces, la divergencia de $\vec{f}$ viene dada por

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{f}) =& \left[g(r)+\frac{xg'(r)}{2r}2x\right]+\left[g(r)+\frac{yg'(r)}{2r}2y\right]+\left[g(r)+\frac{zg'(r)}{2r}2z\right]\\ =&3g(r)+rg'(r).\end{aligned}$$

Luego, $\vec{f}$ es a divergencia nula, es decir $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$, si y sólo si $\frac{g'}{g} = -\frac{3}{r}$, que equivale a decir $\ln g = -3\ln r + cte$ concluyendo que

$$g(r) = \frac{\alpha}{r^3}, \qquad \text{para cierta constante } \alpha.$$

Deducimos de esta forma la siguiente proposición.

Proposición 3.1.6. *Un campo radial $\vec{f} = g(r)\vec{r}$ es a divergencia nula ssi $g(r) = \frac{\alpha}{r^3}$ para alguna constante α (eventualmente $\alpha = 0$).*

Ejemplo 3.1.7. *El campo eléctrico y el campo gravitacional son a divergencia nula, salvo en el orígen!.*

3.1.2. Flujo eléctrico - Ley de Gauss

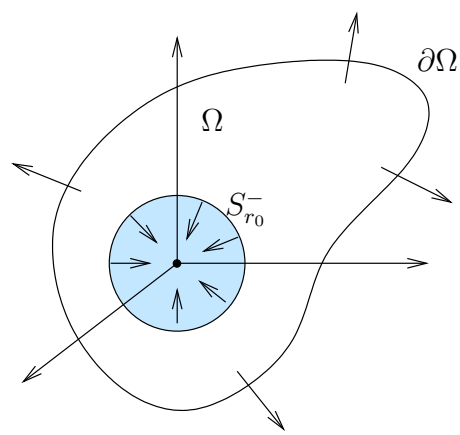
Consideremos $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ el campo eléctrico generado por una carga puntual Q situada en el orígen. Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^3$ de frontera regular $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior. Calcularemos el flujo $\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{A}$.

Si $0 \notin \Omega \cup \partial\Omega$ entonces $\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E})dV = 0$, debido a la proposición 3.1.6.

Consideremos entonces el caso $0 \in \Omega$. Tomemos $r_0 > 0$ pequeño tal que $B(0, r_0) \subseteq \Omega$, y definamos $\Omega' = \Omega \setminus B(0, r_0)$, de modo tal que $0 \notin \Omega' \cup \partial\Omega'$ y en consecuencia el flujo para $\partial\Omega'$ es 0, es decir $\iint_{\partial\Omega'} \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$. Esto implica que

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iint_{\partial B(0,r_0)^+} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r_0^2}\cdot\hat{r}\; r_0^2 sen\theta d\varphi d\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

donde $\partial B(0, r_0)^+$ el la frontera de la bola $B(0, r_0)$ orientada según la normal exterior.



Supongamos ahora que en Ω hay n cargas $q_1, ..., q_n$ en las posiciones $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n \in \Omega$. Entonces, los campos eléctricos de cada carga se superponen, es decir, $\vec{E} = \vec{E}_1 + ... + \vec{E}_n$, obteniendo

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\partial\Omega} \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + ... + \frac{q_n}{\varepsilon_0}. \tag{3.12}$$

Teorema 3.1.8. *Sea $\vec{E}$ el campo eléctrico generado por un conjunto de cargas puntuales repartidas en el espacio. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^3$ tal que ninguna carga cae sobre $\partial\Omega$. Entonces*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

donde Q es la carga total encerrada por $\partial\Omega$.

Observación. Análogamente, para el campo gravitacional se tiene

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{A} = -4\pi GM, \tag{3.13}$$

donde M es la masa encerrada por $\partial\Omega$.

3.2. Divergencia en coordenadas curvilíneas

Sea $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un sistema de coordenadas ortogonales. Consideremos el vector $\vec{r_0} = \vec{r}(u_0, v_0, w_0)$. y el volumen acotado

$$\Omega_\varepsilon = \{\vec{r}(u, v, w) : u_0 \leq u \leq u_0 + \varepsilon, v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon, w_0 \leq w \leq w_0 + \varepsilon\}.$$

Notemos que el volumen Ω_ε puede verse como un cubo de lado ε en el sistema de coordenadas dado por $\vec{r}$.

Sea también $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 en el abierto Ω con $\vec{r_0} \in \Omega$. Definamos

$$\begin{aligned}
F_u &= F_u(u, v, w) = \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{u}(u, v, w),\\
F_v &= F_v(u, v, w) = \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{v}(u, v, w),\\
F_w &= F_w(u, v, w) = \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{w}(u, v, w).
\end{aligned}$$

Podemos entonces reescribir $\vec{F} \circ \vec{r}$ como $\vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$, deduciendo el siguiente calculo

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} [F_w h_u h_v(u, v, w_0 + \epsilon) - F_w h_u h_v(u, v, w_0)] dv du\\
&+ \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} [F_v h_u h_w(u, v_0 + \epsilon, w) - F_v h_u h_v(u, v_0, w)] dw du\\
&+ \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} [F_u h_v h_w(u_0 + \epsilon, v, w) - F_v h_u h_w(u_0, v, w)] dw dv\\
&= \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} \frac{[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)]}{h_u h_v h_w} h_u h_v h_w dw dv du,
\end{aligned}$$

donde $h_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|$, $h_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$, y $h_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} / \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\|$ son los factores escalares asociados a cada componente del sistema de coordenadas $\vec{r}$.

Denotando

$$\Gamma(u, v, w) = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)}{h_u h_v h_w},$$

y usando la expresión de diferencial de volumen $dV = h_u h_v h_w dw dv du$ y el *teorema del valor medio* para integrales multiples se obtiene

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \Gamma(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon) \int_{u_0}^{u_0+\varepsilon} \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon} \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon} dV = \Gamma(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon) \operatorname{Vol}(\omega_\varepsilon),$$

donde $u_\varepsilon \in [u_0, u_0 + \varepsilon]$, $v_\varepsilon \in [v_0, v_0 + \varepsilon]$, y $w_\varepsilon \in [w_0, w_0 + \varepsilon]$. Esta última igualdad junto con la definición 3.1.1 de divergencia implica que

$$\operatorname{div}(\vec{F})(\vec{r_0}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\iint_{\partial\omega_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\operatorname{Vol}(\omega_\varepsilon)} = \Gamma(u_0, v_0, w_0).$$

Es decir,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} [\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)] \tag{3.14}$$

Reescribamos la función divergencia en los sistemas de coordenadas más usuales:

(I) Coordenadas cartesianas: $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$, se obtiene

$$h_x = h_y = h_z = 1; \quad \vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k},$$
$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z.$$

(II) Coordenadas esféricas: $\vec{r}(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi)$, se obtiene

$$h_r = 1, h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi, h_\varphi = r; \quad \vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\varphi\hat{\varphi},$$
$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\varphi}[\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2\operatorname{sen}\varphi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi r\operatorname{sen}\varphi)].$$

(III) Coordenadas cilíndricas: $\vec{r}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$, se obtiene

$$h_\rho = 1, h_\theta = \rho, h_z = 1; \quad \vec{F} = F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{k},$$
$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial\rho}(F_\rho\rho) + \frac{\partial}{\partial\theta}F_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(F_z\rho)].$$

3.3. El teorema de Stokes

De la misma forma que definimos la divergencia (ver definición 3.1.1) podemos definir el *rotor* asociado a un campo $\vec{F}$ como sigue.

Definición 3.3.1. *Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuamente diferenciable (C^1), con Ω abierto en $\mathbb{R}^3$. Sea también un punto arbitrario $\vec{r}_0 \in \Omega$, y consideremos una familia $\{\Omega_a\}_{a>0}$ de abiertos acotados contenidos en Ω cuyas fronteras $\{\partial\Omega_a\}_{a>0}$ son superficies regulares por trozos y orientadas según la normal exterior, que satisfacen las propiedades* (i) *y* (ii) *de la definición 3.1.1. Entonces, definimos la* función rotor *para la función $\vec{F}$, denotada por* $\operatorname{rot}\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, como la función que para cada punto $\vec{r}_0 \in \Omega$ le asocia el valor del límite (si existe):*

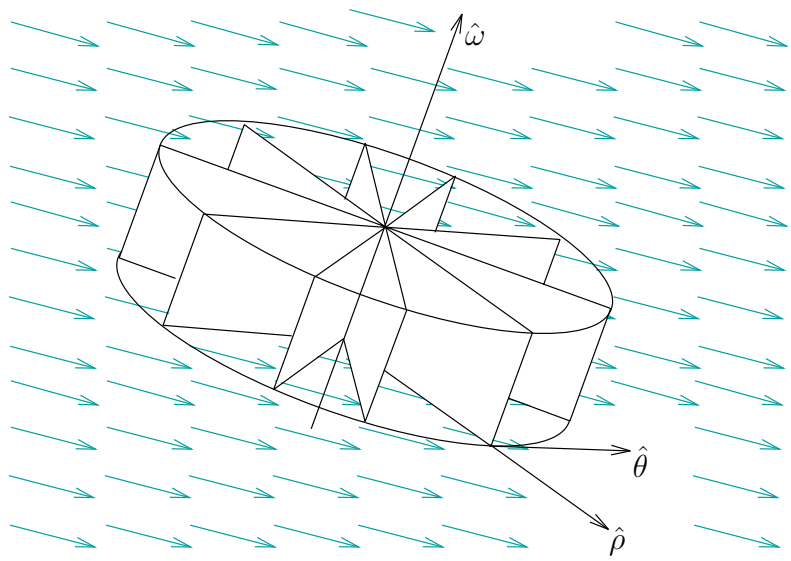
$$\operatorname{rot}(\vec{F})(\vec{r}_0) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\operatorname{Vol}(\Omega_a)}\iint_{\partial\Omega_a}\hat{n}\times\vec{F}\,dA, \tag{3.15}$$

donde $\hat{n}$ es la normal (exterior) a cada superficie $\partial\Omega_a$, y la operación $\times$ denota el producto cruz en $\mathbb{R}^3$.

Observación. Al igual que en el caso de la divergencia, dado que las superficies frontera $\partial\Omega_a$ son regulares, en la definición anterior la familia de conjuntos $\{\Omega_a\}_{a>0}$ puede estar compuesta tanto de abiertos como de cerrados.

La interpretación física que se le da al rotor asociado a un campo $\vec{F}$ es la de representar la *velocidad angular* local de este, la cual se produce cuando el fluido en el punto estudiado "rota" sobre sí mismo. De ahí el nombre de rotor o rotacional de $\vec{F}$. Veamos esto mediante el siguiente ejemplo.

Consideremos una rueda de altura h y aspas de radio r, y cuyo centro esta ubicado en el punto (x,y,z). Esta se sumerge en un flujo dado por $\vec{F}$ como muestra la figura:



La velocidad tangencial de los puntos ubicados en el borde de la rueda es $\vec{F}\cdot\hat{\theta}$, de modo que la rapidez angular media $\bar{w}$ se puede estimar de la siguiente manera

$$r\bar{w} = \bar{v}_T = \frac{1}{2\pi rh}\int_0^h\int_0^{2\pi}(\vec{F}\cdot\hat{\theta})r\,d\theta dz = \frac{1}{2\pi rh}\iint_S(\vec{F}\cdot\hat{\theta})\,dS,$$

donde S denota el borde de la rueda (o manto del cilindro que esta forma), y $\bar{v}_T$ denota la rapidez tangencial media. Usando propiedades del producto cruz y el hecho que $\hat{\theta} = \hat{w}\times\hat{r}$ se obtiene que $\vec{F}\cdot\hat{\theta} = \vec{F}\cdot(\hat{w}\times\hat{r}) = \hat{w}\cdot(\hat{r}\times\vec{F})$, lo que implica

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi r^2h}\,\hat{w}\cdot\iint_S(\hat{r}\times\vec{F})\,dS = \frac{1}{2\pi r^2h}\,\hat{w}\cdot\iint_S(\hat{n}\times\vec{F})\,dS,$$

ya que la normal exterior a la superficie S es $\hat{n} = \hat{r}$. Ahora, la normal exterior a las tapas del cilindro que forma la rueda es un factor de $\hat{w}$, entonces la integral de flujo anterior se anula en estas tapas. De esta forma obtenemos

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi r^2h}\,\hat{w}\cdot\iint_{C_{h,r}}(\hat{n}\times\vec{F})\,dS = \frac{1}{2}\hat{w}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(C_{h,r})}\iint_{C_{h,r}}(\hat{n}\times\vec{F})\,dS\right),$$

donde $C_{h,r}$ denota el cilindro de radio r y altura h formado por la rueda. Haciendo tender h y r a cero, se obtiene en el limite que

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2}\hat{w}\cdot\mathrm{rot}(\vec{F})(x,y,z). \tag{3.16}$$

Es decir, el rotor $\mathrm{rot}(\vec{F})$ coincide con la velocidad angular del flujo $\vec{F}$ en el punto (x,y,z), salvo por el factor $\frac{1}{2}$, tal como lo habíamos anunciado.

La definición 3.3.1 dada para la función rotor de un campo vectorial no es fácil de utilizar en la práctica, es por esto que en lo que sigue, daremos una expresión analítica para el rotor al menos en coordenadas cartesianas. En la sección 3.4 se vera como calcular el rotor de un campo para un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal arbitrario.

Consideremos a continuación que $\vec{F}$ es un campo vectorial de clase C^1, y $\{\Omega_a\}$ una familia de abiertos, acotados de $\mathbb{R}^3$ con las mismas propiedades que en la definición 3.3.1. Para todo vector $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\vec{v}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega_a)}\iint_{\partial\Omega_a}(\hat{n}\times\vec{F})\,dS\right) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega_a)}\iint_{\partial\Omega_a}\vec{v}\cdot(\hat{n}\times\vec{F})\,dS = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega_a)}\iint_{\partial\Omega_a}(\vec{F}\times\vec{v})\cdot\hat{n}\,dS.$$

La expresión del lado derecho converge a $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{v})$ cuando $a \to 0$, obteniendo que

$$\vec{v} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) = \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{v}). \tag{3.17}$$

Dado que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es arbitrario, esta fórmula primero implica que el rotor existe bajo las mismas condiciones que el operador divergencia (es decir, basta que el campo $\vec{F}$ sea C^1), y segundo, al reemplazar $\vec{v} = \hat{\imath}$, $\vec{v} = \hat{\jmath}$ y $\vec{v} = \hat{k}$, nos permite obtener la siguiente expresión

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{\imath})\,\hat{\imath} + (\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{\jmath})\,\hat{\jmath} + (\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{k})\,\hat{k} = \operatorname{div}(\vec{F} \times \hat{\imath})\,\hat{\imath} + \operatorname{div}(\vec{F} \times \hat{\jmath})\,\hat{\jmath} + \operatorname{div}(\vec{F} \times \hat{k})\,\hat{k}.$$

Desarrollando esta última igualdad deducimos una expresión analítica (en coordenadas cartesianas) para el rotor, la cual estableceremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.2. *Si $\vec{F} = f_1\,\hat{\imath} + f_2\,\hat{\jmath} + f_3\,\hat{k}$ un campo de clase C^1, entonces su rotor viene dado por*

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\hat{k}.$$

Notemos que usando la notación (3.3):

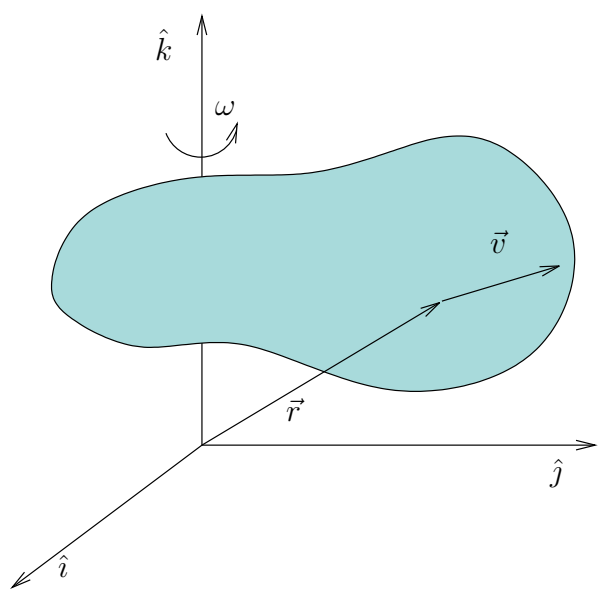
$$\vec{\nabla} := \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

podemos escribir el rotor de un campo $\vec{F}$ como sigue

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}. \tag{3.18}$$

Ejemplo 3.3.3. *Un cuerpo sólido gira en torno al eje $\hat{k}$ con velocidad angular constante igual a $\omega\hat{k}$. la velocidad de un punto en la posición $\vec{r}$ es $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$, vale decir, el campo de velocidades es*

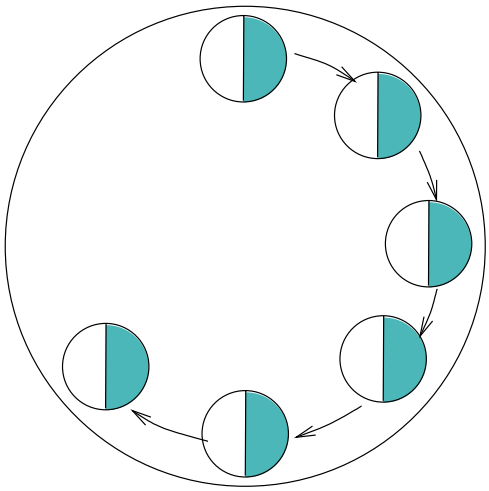
$$\vec{v}(x, y, z) = \omega\hat{k} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = -\omega y\hat{\imath} + \omega x\hat{\jmath}$$



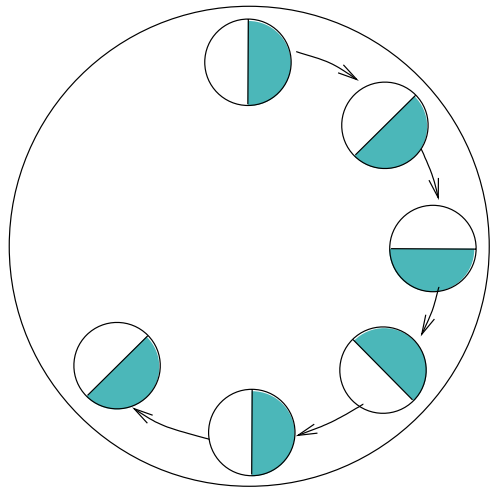
De esta forma

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (-\omega y\hat{\imath} + \omega x\hat{\jmath}) \\ &= 2\omega\hat{k} = 2\vec{\omega}.\end{aligned}$$

Observación. Si $\vec{F}$ representa el campo de velocidades de un flujo, como en el caso del ejemplo anterior ($\vec{F} = \vec{v}$), la condición $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ significa que el fluido no rota, es decir que una pequeña rueda sumergida en el flujo se desplazará con este pero no rotará sobre si misma.



$\nabla \times \vec{f} = 0$



$\nabla \times \vec{f} \neq 0$

Así, ¡rot $\vec{F} = 0$ implica que no rota!

Ejemplo 3.3.4. *Consideremos el campo* $\vec{v} = \frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}$ *que representa el flujo en un lavamanos. Salvo por la singularidad en el orígen se tiene*

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{v} &= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}\right) \\
&= -\hat{k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Es decir, el flujo is irrotacional, salvo en el origen.

Teorema 3.3.5 (Teorema de Stokes). *Sea* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *una superficie simple, orientable y regular por trozos, cuyo borde* ∂S *es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea* $\vec{F} : \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial de clase* $\mathcal{C}^1$ *definido sobre un abierto* Ω' *que incluye la superficie* S *y su frontera* ∂S*. Sea finalmente* $\hat{n}$ *un campo de vectores normales que definen una orientación para* S *y supongamos que la curva cerrada* ∂S *es recorrida de manera coherente con la elección de la normal* $\hat{n}$*, es decir, respetando la regla de la mano derecha. Entonces*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}. \tag{3.19}$$

Demostración. Dividimos la superficie S en pequeños "cuadrados" S_i de área ΔA_i y normal $\hat{n}_i$ (siguiendo la dirección dada por $\hat{n}$) como se muestra en la figura

XX Dibujo

Sea ∂S_i la curva cerrada definida como la frontera de la superficie S_i, orientada de manera coherente con la normal $\hat{n}_i$. Además, a cada una de estas superficies S_i le asociamos un paralelepípedo Ω_h^i de base ΔA_i y altura h como se muestra en la siguiente figura

XX Dibujo

Para todo i fijemos un punto $\vec{r}_i \in \Omega_h^i$. Debido a la definición 3.15 de rotor se tiene que

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}_i) \simeq \frac{1}{h\Delta A_i} \iint_{\partial S_i} \hat{n} \times \vec{F}\, dA. \tag{3.20}$$

Dado que la normal a las tapas superior e inferior del paralelepípedo Ω_h^i es $\hat{n} = \hat{n}_i$ y $\hat{n} = -\hat{n}_i$, respectivamente, notamos que el producto $\hat{n}_i \cdot \iint \hat{n} \times \vec{F}\, dA$ es cero cuando la integral de superficie en cuestión es calculada en estas tapas. Además, para los cuatro lados restantes del paralelepípedo Ω_h^i se tiene que

$$\hat{n}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{F}) = -\hat{n}_i \cdot (\vec{F} \times \hat{n}) = \vec{F} \cdot (\hat{n}_i \times \hat{n}) = \vec{F} \cdot \hat{T},$$

donde $\hat{T}$ es el vector tangente a la curva ∂S_i. Entonces, recordando que $d\vec{r} = \hat{T}\, dr$, de la ecuación (3.20) se obtiene

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i \simeq \frac{1}{h\Delta A_i} \int_0^h \left(\int_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) dh.$$

La última igualdad es valida para toda altura h suficientemente pequeña, por lo que al hacer tender h a cero se infiere que

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i\, \Delta A_i \simeq \int_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Sumando esta expresión para todas las superficies S_i, se deduce lo siguiente

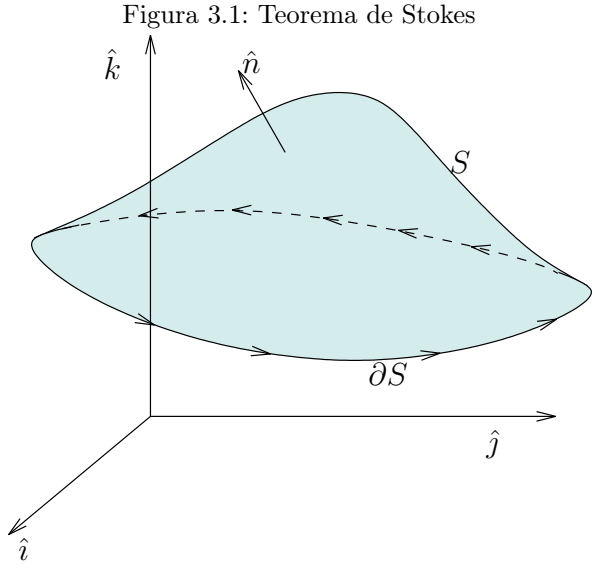
$$\sum_i \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i\, \Delta A_i \simeq \sum_i \int_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{3.21}$$

Notemos que en la ultima igualdad en (3.21) hemos usado que las integrales asociadas a los lados internos de los paralelepípedos Ω_h^i se anulan entre sí.

Finalmente, concluimos notando que el lado izquierdo de (3.21) converge a la integral $\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$, y que la aproximación anterior se vuelve igualdad en el límite. ■

Observación. El símbolo $\oint$ simplemente denota que la integral de línea en cuestión es sobre una curva cerrada. En lo que sigue, esta notación y la usual $\int$ serán utilizadas para este tipo de integrales.

Figura 3.1: Teorema de Stokes



Ejemplo 3.3.6. *Encontrar el trabajo realizado por la fuerza*

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy^3 \operatorname{sen} z, 3x^2y^2 \operatorname{sen} z, x^2y^3 \cos z)$$

en el desplazamiento alrededor de la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$*, y el cilindro infinito* $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Solución *Este trabajo está dado por la integral* $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$*, donde* Γ *denota la curva cerrada formada por la intersección entre el paraboloide y el cilindro. Por otro lado, es fácil verificar que para toda función escalar* f *se tiene la identidad*

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0. \tag{3.22}$$

Luego, como $\vec{F} = \nabla f$ *con* $f(x,y,z) = x^2y^3 \operatorname{sen} z$*, deducimos que* $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$*, y entonces usando el teorema de Stokes se concluye que el trabajo realizado es nulo.*

Un corolario del teorema de Stokes es la siguiente proposición.

Proposición 3.3.7. *Sea* $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo de clase* C^1*. Entonces la integral de trabajo* $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *no depende de la forma de la curva simple y regular* Γ *elegida (es decir, para todo par de curvas simples y regulares* Γ_1 *y* Γ_2 *que tienen el mismo punto de partida y final se tiene que* $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$*) si y sólo si el rotor* $\operatorname{rot}(\vec{F})$ *de* $\vec{F}$ *es cero.*

Demostración. Sabemos que la integral de trabajo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ no depende de la curva simple y regular elegida si y sólo si el campo $\vec{F}$ es conservativo (ver Teorema 2.1.6), es decir, si existe una función escalar g tal que $\vec{F} = -\nabla g$. Entonces, gracias a la identidad (3.22) se concluye que $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que el rotor de $\vec{F}$ es nulo. Sean Γ_1 y Γ_2 dos curvas simples y regulares con el mismo punto inicial y final. Al definir la curva cerrada $\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ y aplicar el teorema de Stokes concluimos que $\oint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, y por lo tanto

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

■

3.4. Rotor en coordenadas curvilíneas

Sea $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un sistema de coordenadas ortogonales arbitrario y sea $\vec{r_0} = \vec{r}(u_0, v_0, w_0)$. Similarmente a lo realizado para la divergencia de un campo vectorial, consideremos el volumen

$$\Omega_\varepsilon = \{\vec{r}(u,v,w) : u_0 \le u \le u_0 + \varepsilon, v_0 \le v \le v_0 + \varepsilon, w_0 \le w \le w_0 + \varepsilon\}$$

Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1, definido en un abierto Ω que satisface que $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ para todo $\varepsilon > 0$ pequeño. Definimos

$$\begin{aligned}
F_u &= F_u(u,v,w) = \vec{F}(\vec{r}(u,v,w)) \cdot \hat{u} = \frac{1}{h_u} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \\
F_v &= F_v(u,v,w) = \vec{F}(\vec{r}(u,v,w)) \cdot \hat{v} = \frac{1}{h_v} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \\
F_w &= F_w(u,v,w) = \vec{F}(\vec{r}(u,v,w)) \cdot \hat{w} = \frac{1}{h_w} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w},
\end{aligned}$$

donde $h_u = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|$, $h_v = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$ y $h_w = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\|$ son los factores escalares asociados al sistema de coordenadas dado por $\vec{r}$. De este modo $\vec{F}(\vec{r}(u,v,w)) = F_u(u,v,w)\hat{u} + F_v(u,v,w)\hat{v} + F_w(u,v,w)\hat{w}$, lo que se escribe simplemente como $\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$.

Para obtener $\mathrm{rot}(\vec{F})(\vec{r_0})$ expresado en las coordenadas dadas por $\vec{r}$, usaremos la expresión

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = (\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{u})\hat{u} + (\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{v})\hat{v} + (\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{w})\hat{w}.$$

De la definición del rotor sabemos que

$$\mathrm{rot}(\vec{F})(\vec{r_0}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}(\hat{n}\times\vec{F})dA. \tag{3.23}$$

Así, para explicitar el rotor $\mathrm{rot}(\vec{F})$ en $\vec{r}_0$ hay dos alternativas: utilizar (3.23) directamente que conlleva a argumentos similares a los esgrimidos para el caso del operador divergencia (ver sección 3.2), o bien aplicar el teorema de Stokes. Procederemos usando el teorema de Stokes, del cual se deduce que

$$\oint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_\epsilon}\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_{S_\epsilon}\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{u}\,dA,$$

donde $S_\varepsilon = \{\vec{r}(u_0,v,w):\ v_0\le v\le v_0+\varepsilon, w_0\le w\le w_0+\varepsilon\}$ y $\Sigma = \partial S_\varepsilon$ es la curva cerrada que corresponde a la frontera de S_ε. Ahora bien, al descomponer la integral de linea $\oint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ en cuatro integrales, cada una asociada a un lado de S_ε, obtenemos

$$\begin{aligned}
\oint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{w_0}^{w_0+\epsilon}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{v_0+\varepsilon}^{v_0}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{w_0+\epsilon}^{w_0}\vec{F}\cdot d\vec{r}\\
&= \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon}\underbrace{\vec{F}(\vec{r}(u_0,v,w_0))\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}_{F_v(u_0,v,w_0)h_v(u_0,v,w_0)}dv + \int_{w_0}^{w_0+\epsilon}F_w(u_0,v_0+\varepsilon,w)h_w(u_0,v_0+\varepsilon,w)dw\\
&- \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon}F_v(u_0,v,w_0+\varepsilon)h_v(u_0,v,w_0+\varepsilon)dv - \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon}F_w(u_0,v_0,w)h_w(u_0,v_0,w)dw,
\end{aligned}$$

que gracias al teorema fundamental del cálculo implica

$$\begin{aligned}
\oint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon}\int_{v_0}^{v_0+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial v}(F_wh_w)(u_0,v,w)dvdw - \int_{v_0}^{v_0+\varepsilon}\int_{w_0}^{w_0+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial w}(F_vh_v)(u_0,v,w)dwdv\\
&= \int_{w_0}^{w_0+\varepsilon}\int_{v_0}^{v_0+\varepsilon}[\frac{\partial}{\partial v}(F_wh_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_vh_v)](u_0,v,w)dvdw\\
&= \iint_{S_\epsilon}\frac{1}{h_vh_w}[\frac{\partial}{\partial v}(F_wh_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_vh_v)]\,dA.
\end{aligned}$$

Utilizando el teorema del valor medio para integrales múltiples y haciendo $\varepsilon\to 0$ se deduce finalmente que

$$\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{u} = \frac{1}{h_vh_w}[\frac{\partial}{\partial v}(F_wh_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_vh_v)].$$

Argumentos análogos para el resto de las coordenadas conducen a

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_vh_w}[\frac{\partial}{\partial v}F_wh_w - \frac{\partial}{\partial w}F_vh_v]\hat{u} + \frac{1}{h_uh_w}[\frac{\partial}{\partial w}F_uh_u - \frac{\partial}{\partial u}F_wh_w]\hat{v} + \frac{1}{h_uh_v}[\frac{\partial}{\partial u}F_vh_v - \frac{\partial}{\partial v}F_uh_u]\hat{w}.$$

Esta fórmula suele escribirse de manera abreviada como

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix},$$

que corresponde a $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ con

$$\vec{\nabla} = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}.$$

Ejemplo 3.4.1. *Reescribamos el rotor en coordenadas cilíndricas y esféricas.*

(I) *Coordenadas cilíndricas:* $\vec{r}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$, *se obtiene*

$$\begin{aligned} &h_\rho = 1,\ h_\theta = \rho,\ h_z = 1; \quad \vec{F} = F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_k\hat{k}, \\ &\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z \end{vmatrix} \\ &\qquad = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial F_z}{\partial\theta} - \rho\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\hat{\rho} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right]\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\theta) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right]\hat{k}. \end{aligned}$$

(II) *Coordenadas esféricas:* $\vec{r}(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi)$, *se obtiene*

$$\begin{aligned} &h_r = 1, h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi, h_\varphi = r; \quad \vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\varphi\hat{\varphi}, \\ &\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\varphi}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\operatorname{sen}\varphi\hat{\theta} & r\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & r\operatorname{sen}\varphi F_\theta & rF_\varphi \end{vmatrix} \\ &\qquad = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\theta r\operatorname{sen}\varphi) - \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi r)\right]\hat{r} \\ &\qquad\quad + \frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(F_\theta r\operatorname{sen}\varphi)\right]\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_\varphi r) - \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right]\hat{\theta}. \end{aligned}$$

3.5. El teorema de Green en el plano

En esta sección veremos un resultado que se puede obtener como una consecuencia directa del teorema de Stokes.

Teorema 3.5.1 (Teorema de Green)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva cerrada y regular por trozos, orientada en el sentido anti-horario. Consideremos $\vec{F} : \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 con Ω' un abierto que contiene a S y ∂S, y denotemos $\vec{F} = (f_1,\ f_2)$. Entonces*

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dA. \tag{3.24}$$

Observación. Notemos que si consideramos la extensión por cero a $\mathbb{R}^3$ del campo $\vec{F}$ dado en el teorema anterior, es decir $\vec{F} = (f_1, f_2, 0)$, y suponemos que la región S esta inmersa en el plano xy, entonces la igualdad (3.24) se puede escribir como

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\hat{k}\, dA, \tag{3.25}$$

que coincide con el teorema de Stokes.

Ejemplo 3.5.2. *Aplicamos el teorema de Green al cálculo de áreas de regiones planas. Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ una región en el plano xy que satisface las hipótesis del teorema de Green. Si tomamos $f_1 = 0$ y $f_2 = x$ en (3.24), se obtiene*

$$\iint_S dxdy = \oint_{\partial S} x\,dy.$$

Obviamente la integral del lado derecho de la última igualdad es el área $A(S)$ de la región S. Si ahora $f_1 = -y$ y $f_2 = 0$ se tiene

$$A(S) = \iint_S dxdy = -\oint_{\partial S} y\,dx.$$

Sumando ambas expresiones concluimos la igualdad

$$A(S) = \frac{1}{2}\oint_{\partial S} (x\,dy - y\,dx).$$

Esta fórmula nos permite calcular un área en términos de una integral de línea.

Apliquemos esta fórmula a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Para esto, reescribamos la elipse usando $x = a\cos t$ e $y = b\operatorname{sen} t$, luego se obtiene

$$A(elipse) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t - (-ab\operatorname{sen}^2 t))\,dt = \pi ab.$$

Ejemplo 3.5.3. *Consideremos el campo vectorial*

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Notemos que el campo $\vec{F}$ es continuamente diferenciable (C^1) en todos lados, salvo en el origen $(x,y) = (0,0)$ donde no está definido. Además, se tiene que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

En efecto

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{x^2+y^2} = \frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{x^2+y^2} = -\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2}.$$

Sin embargo, la integral de línea $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ es igual a 2π para cualquier curva Γ que da una vuelta (en sentido anti-horario) alrededor del cero. Veremos esto para una circunferencia de radio R en $\mathbb{R}^2$, cuya parametrización $\vec{r}\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\vec{r}(\theta) = (R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} [f_1(\vec{r}(\theta))\vec{r}_1'(\theta) + f_2(\vec{r}(\theta))\vec{r}_2'(\theta)]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [-\frac{R\operatorname{sen}\theta}{R^2}(-R\operatorname{sen}\theta) + \frac{R\cos\theta}{R^2}(R\cos\theta)]d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

Esto muestra que la hipótesis de suavidad (ser de clase C^1) del campo $\vec{F}$ es fundamental para que el teorema de Green se cumpla.

3.5.1. Fórmulas de Green

Las siguientes fórmulas son consecuencia del teorema de Gauss de la divergencia (ver Teorema 3.1.2).

Proposición 3.5.4 (Primera fórmula de Green)**.** *Sean f, g dos funciones escalares de clase C^1 y C^2, respectivamente. Consideremos un volumen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ cuya superficie $\partial\Omega$ es cerrada, simple, regular por trozos y orientada según la normal exterior $\hat{n}$. Entonces*

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n}\, dA, \tag{3.26}$$

donde $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$ es el operador laplaciano *aplicado a la función g, y $\frac{\partial g}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla g$ es la* derivada normal *de g.*

Demostración. Consideremos el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido por $\vec{F} = f\,\nabla g$. Notemos que

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(f\,\nabla g) = f\,\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Además, dado que f es una función escalar se tiene

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = f(\hat{n} \cdot \nabla g) = f\,\frac{\partial g}{\partial n}.$$

Entonces la igualdad (3.26) se deduce al aplicar el teorema de la divergencia al campo $\vec{F}$. ■

Un corolario de la proposición anterior es el siguiente resultado.

Proposición 3.5.5 (Segunda fórmula de Green)**.** *Sean f, g dos funciones escalares de clase C^2. Consideremos un volumen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ que cumple con las hipótesis de la proposición 3.5.4. Entonces*

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dV = \iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA. \tag{3.27}$$

Demostración. La igualdad (3.27) se deduce directamente al restar a (3.26), la misma ecuación (3.26) pero donde los roles de f y g son intercambiados. ■

3.6. Ejercicios

1. Calcule el flujo definido por el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(e^y \sin y + xy^2 z, e^x \cos z x^2 yz, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

   a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.

   Indicación: Calcule el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas y usando el teorema de la divergencia). Calcule el flujo a través de las tapas directamente.

2. Considere el volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones:

$$\begin{cases} |z| \leq 2 - x^2 - y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

   (a) Bosqueje la región Ω.

   (b) Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\vec{F} = \rho\hat{\rho}$ (en coordenadas cilíndricas) a través de $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior.

3. El empuje total que ejerce el agua sobre un objeto de superficie S está dado por

$$G = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

con

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{cases} (0,0,\rho g(h-z)) & \text{si } z \leq h \\ (0,0,0) & \text{si } z > h \end{cases}$$

donde g es el módulo de la aceleración de gravedad, ρ es la densidad del agua y h es la altura del nivel del agua. Demuestre que G es igual al peso del volumen de agua desplazado por el objeto.

4. Dado $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial conservativo de clase $\mathcal{C}^1$, demuestre que

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iiint_\Omega \Delta\phi\, dV,$$

para cierta función escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Hemos denotado aquí por Σ a una superficie regular que encierra al volúmen Ω, la cual está orientada según la normal exterior $\hat{n}$. Además, el operador *laplaciano* para una función escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ se ha definido como

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

5. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (2x+2, 4y-4, 2z)$. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través del hemisferio superior del casquete elipsoidal

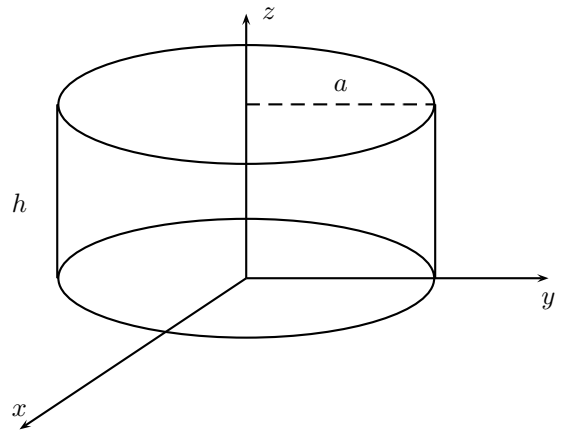
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

orientado según la normal *interior*.

6. Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z \operatorname{sen} y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, x^2 e^z)$$

a través del manto del cilindro de la figura, orientado según la normal exterior.



Parte II

Funciones de Variable Compleja

Capítulo 4

El plano complejo

En este capítulo recordaremos la definición y algunas propiedades básicas de los números complejos. El estudiante familiarizado con estos conceptos puede pasar directamente al capítulo 5.

4.1. Estructura algebraica del plano complejo

La estructura algebraica usual de $\mathbb{R}^2$ es la de espacio vectorial sobre el cuerpo[1] de los números reales definida por las operaciones de adición

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

y multiplicación por escalar

$$\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b),$$

donde $a,b,c,d,\lambda\in\mathbb{R}$. Desde el punto de vista algebraico, el plano complejo $\mathcal{C}$ no es otra cosa que $\mathbb{R}^2$ dotado de la operación adicional *producto* definida por

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Este producto [2] entre vectores de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ resulta ser un cuerpo conmutativo, el cual se denota simplemente por $\mathcal{C}$. Por otra parte, $\mathcal{C}$ contiene una *copia* isomorfa del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Más precisamente, la función

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \to & \mathcal{C} \\ a & \to & h(a)=(a,0) \end{array}$$

es un isomorfismo que permite identificar $\mathbb{R}$ con el eje $\{(a,0)\in\mathcal{C}:a\in\mathbb{R}\}$.

Históricamente, los números complejos fueron introducidos con el fin de resolver ecuaciones algebraicas que no tienen solución en los números reales. El ejemplo canónico es la ecuación

$$x^2=-1.$$

Consideremos el complejo $(0,1)$, el cual satisface

$$(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0).$$

[1] Para las definiciones de espacio vectorial y de cuerpo, el lector puede ver el apunte del curso de Álgebra.

[2] No debe confundirse la operación $\cdot$ con el producto interno estándar, también conocido como *producto escalar*, y que se define como $\langle(a,b),(c,d)\rangle=ac+bd$.

Denotando $i = (0,1)$ e identificando $(-1,0)$ con -1 vía el isomorfismo h, podemos escribir

$$i^2 = -1,$$

de modo tal que i es una solución de la ecuación anterior[3].

Notemos además que las identificaciones anteriores permiten escribir

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib,$$

donde el producto entre i y b se denota simplemente ib. De ahora en adelante, el número complejo $z = (a,b)$ será denotado $a+ib$, y diremos que su parte real es a y que su parte imaginaria es b, lo que se escribe $a = Re(z)$ y $b = Im(z)$ respectivamente.

El *complejo conjugado* de $z = a + ib$ se define por

$$\overline{z} = a - ib,$$

y geométricamente corresponde a reflejar z con respecto al eje horizontal asociado a los números reales. Notemos que:

- $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $\overline{z} = z$ ssi $z \in \mathbb{R}$.
- $\forall z \in \mathcal{C}$, $\overline{(\overline{z})} = z$, y además $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ si $z = a + ib$.
- $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.
- $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Sea $z = a+ib \neq 0$; para determinar su inverso z^{-1} multiplicamos por $\overline{z}$ a ambos lados de la ecuación $z \cdot z^{-1} = 1$, obteniendo así $(z \cdot \overline{z})z^{-1} = \overline{z}$. Pero la condición $z \neq 0$ implica que $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 > 0$, por lo tanto

$$z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \overline{z}}\overline{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Ahora bien, dados $z = a + ib \neq 0$ y $w = c + id$, para calcular w/z utilizamos las siguientes identidades:

$$\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

A partir de lo anterior se deducen todas las reglas usuales del álgebra de los números complejos, las cuales se dejan al lector como ejercicio.

4.2. Estructura métrica del plano complejo

Dado $z = a + ib \in \mathcal{C}$, su *módulo* se define como

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2},$$

y la *distancia* entre dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$ se define como

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

[3] Los números complejos son muy útiles en Ingeniería Eléctrica, donde el símbolo i se reserva para denotar la *corriente* mientras que se usa j para el complejo $(0,1)$; nosotros utilizaremos i para denotar este último.

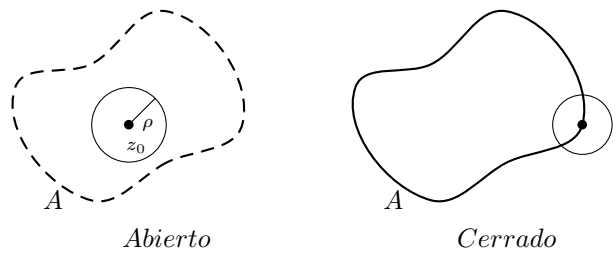


Figura 4.1: Conjunto abierto y cerrado

- $\forall z \in \mathcal{C}$, $|z| \geq 0$, $|\overline{z}| = |z|$, $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$.
- $|z| = 0$ ssi $z = 0$. En términos de la función distancia: $d(z_1, z_2) = 0$ ssi $z_1 = z_2$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. En términos de la función distancia, se obtiene como consecuencia la desigualdad triangular:
$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{C},\ d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Observemos que $|a + ib|$ coincide con la norma euclidiana $\|(a, b)\|$ del vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, y por lo tanto corresponde a la distancia entre el punto (a, b) y el origen del plano cartesiano. De este modo, $\mathcal{C}$ y $\mathbb{R}^2$ tienen la misma estructura *topológica*, lo que significa que las nociones de vecindad, conjunto abierto, conjunto cerrado, compacidad y convergencia son las mismas.

En consecuencia:

1. Un conjunto $A \subseteq \mathcal{C}$ se dice *abierto* si para todo punto $z_0 \in A$ existe un radio $\rho > 0$ tal que el *disco*
$$D(z_0, \rho) := \{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| < \rho\}$$
está contenido en A (ver figura 4.1).
2. Un conjunto $A \subseteq \mathcal{C}$ se dice *cerrado* si su complemento $A^c = \mathcal{C} \setminus A$ es abierto. Ejemplo: el *disco cerrado* definido por
$$\overline{D}(z_0, \rho) := \{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$$
es un conjunto cerrado pues tiene como complemento al conjunto
$$\overline{D}(z_0, \rho)^c = \{z \in \mathcal{C} : |z - z_0| > \rho\},$$
y es fácil verificar que este último es abierto.
3. Un conjunto $A \subseteq \mathcal{C}$ se dice *acotado* si existe un radio $\rho_0 > 0$ tal que $A \subseteq D(0, \rho_0)$.
4. Un conjunto se dice *compacto* si es cerrado y acotado.
5. Una sucesión de números complejos $z_n = a_n + ib_n$ se dice que *converge* al complejo $z = a + ib$, y se escribe $z_n \to z$, si se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0,$$
o, equivalentemente, si se tiene que $a_n \to a$ y $b_n \to b$ como sucesiones de números reales.

Propiedad. Si $(z_n) \subset \mathcal{C}$ es una sucesión acotada entonces admite una subsucesión convergente.

Demostración. Es directo de la compacidad de sucesiones en $\mathbb{R}^2$. □

Finalmente, recordemos que un conjunto A se dice *conexo* (o también *conexo por caminos*), si dados dos puntos cualesquiera del conjunto existe una curva regular por trozos que los une y que está completamente contenida en A.

4.3. Representación polar y raíces de la unidad

Sea $z = x + iy$ un número complejo, que como sabemos corresponde a un punto P de coordenadas cartesianas x e y. Pero P también puede describirse en coordenadas polares r y θ. Más precisamente, tenemos

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ y θ es el ángulo en radianes entre el eje OX y el segmento que une el origen con P; se dice que θ es el *argumento* de z.

Una característica importante de θ que puede llevar a confusión es que no está únicamente determinado, pues si θ es un valor para el ángulo entonces para cualquier entero $k \in \mathcal{Z}$, el valor $\theta + 2k\pi$ también es válido para describir el mismo punto. Para evitar esta ambigüedad, se suele restringir el valor de θ al intervalo $]-\pi, \pi]$, en cuyo caso se dice que θ es el *valor principal del argumento* de z y se escribe

$$\theta = \arg z.$$

En la sección 6.2.1 veremos que es posible dar un sentido a la función exponencial evaluada en un número

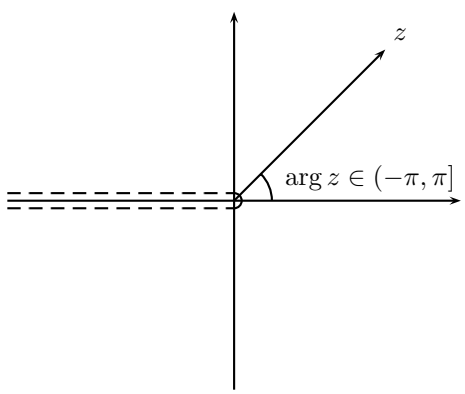


Figura 4.2: Valor principal del argumento

complejo, a partir de lo cual es posible obtener la *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

Esto permite escribir

$$z = re^{i\theta} = |z|e^{i\arg(z)}.$$

Más aún, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$;
- si $r_2 > 0$ entonces $z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

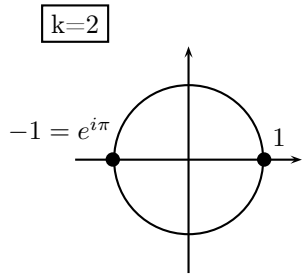
Así,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \ (mod\ 2\pi),$$

y en particular se tiene que multiplicar un complejo por $e^{i\theta}$ corresponde a rotar el segmento que lo une con el origen en θ radianes. Además, como $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta} \cdots e^{i\theta} = e^{i(\theta+\cdots+\theta)} = e^{in\theta}$, se deduce la *fórmula de Moivre*

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Por otra parte, dado $k \in \mathcal{N}$, las raíces k-ésimas de la unidad son aquellos complejos que satisfacen $z^k = 1$. Utilizando la representación polar $z = re^{i\theta}$ se tiene:



Nota: se tiene la identidad célebre $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Figura 4.3: Raíces cuadradas de la unidad

$$\begin{aligned} z^k = 1 \Leftrightarrow r^k e^{ik\theta} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad r^k = 1, \quad k\theta = 0 \ (mod\ 2\pi) \\ &\Leftrightarrow \quad r = 1, \quad \theta = 0, (\frac{2\pi}{k}), 2(\frac{2\pi}{k}), \ldots, (k-1)(\frac{2\pi}{k}) \\ &\Leftrightarrow \quad z = 1, e^{i\frac{2\pi}{k}}, e^{2i\frac{2\pi}{k}}, \ldots, e^{(k-1)i\frac{2\pi}{k}} \end{aligned}$$

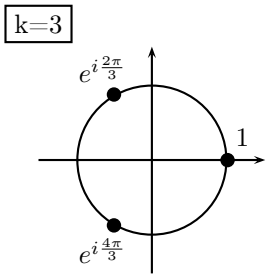


Figura 4.4: Raíces cúbicas de la unidad

Capítulo 5

Continuidad y derivación

En este capítulo estudiaremos las nociones de continuidad y derivabilidad de funciones de variable compleja. En todo lo que sigue, $f : \Omega \to \mathcal{C}$ es una función definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathcal{C}$.

5.1. Funciones continuas

Definición 5.1.1. *Diremos que f es* continua *en $z_0 \in \Omega$ si para toda sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subseteq \Omega$ tal que $z_n \to z_0$ se tiene que $f(z_n) \to f(z_0)$, lo que se escribe de forma compacta como*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

o de manera equivalente

$$\lim_{z\to z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0.$$

Si lo anterior es cierto para todo $z_0 \in \Omega$, decimos simplemente que f es continua en Ω *y escribimos $f \in C(\Omega)$.*

Por otra parte, dado $z \in \mathcal{C}$, $f(z)$ tiene una parte real y otra imaginaria; en consecuencia, se puede escribir

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

o bien

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

donde las funciones[1] $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son a valores en $\mathbb{R}$. Es directo verificar que $f = u + iv$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ ssi $u : \Omega \to \mathbb{R}$ y $v : \Omega \to \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0). En particular, las operaciones de suma, producto, ponderación por escalar, composición y cuociente (cuando está bien definido) de funciones continuas preservan la continuidad.

Ejemplos 5.1.2.

1. Si $f(z) = z^2$ entonces

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy,$$

de modo tal que

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

y

$$v(x, y) = 2xy.$$

Dado que u y v son continuas en $\mathbb{R}^2$, $f(z) = z^2$ es continua en $\mathcal{C}$.

[1] El dominio de $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ es igual a Ω, visto este último como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

2. Si $f(z) = 1/z$ entonces
$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$
y esta función es continua en $\mathcal{C} \setminus \{0\}$.

5.2. Derivada compleja: condiciones de Cauchy-Riemann

Por analogía al caso de una variable real, se introduce la siguiente definición.

Definición 5.2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathcal{C}$ una función.*

- *Diremos que f es derivable en $z_0 \in \Omega$, si existe el límite*
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$
cuyo valor $f'(z_0)$ lo llamaremos la derivada de f en z_0,
- *Si f es derivable en todo $z_0 \in \Omega$ diremos que es* holomorfa en Ω.
- *El conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω se denota $H(\Omega)$, es decir*
$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathcal{C} | f \text{ es holomorfa en } \Omega\}.$$

Notemos que si f es derivable en z_0 entonces
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$
donde
$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$
En particular, si f es derivable en z_0 entonces f es continua en z_0.

Supongamos que $f = u + iv : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. A continuación relacionaremos la derivada $f'(z_0)$ con las derivadas parciales de $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ en (x_0, y_0). Comencemos por tomar $z = z_0 + h$, con $h \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que
$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)}{h} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{h}.\end{aligned}$$
Luego
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i\frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}.$$
Se tendrá en particular que
$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$
Del mismo modo, es posible repetir un análisis similar al anterior para $z = z_0 + ih$ con $h \in \mathbb{R}$. En tal caso tendremos
$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \frac{u(x_0, y_0 + h) + iv(x_0, y_0 + h)}{ih} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{ih} \\ &= \frac{-iu(x_0, y_0 + h) + v(x_0, y_0 + h)}{h} - \frac{-iu(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)}{h}.\end{aligned}$$

De donde
$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{h}-i\frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h}.$$
Así,
$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$
Por unicidad del límite en la definición de derivada, debe cumplirse la igualdad de las dos expresiones recién calculadas para $f'(z_0)$. De este modo, igualando las partes real e imaginaria se obtiene
$$(C\text{-}R)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) &= -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),\end{cases}$$
que se conocen como las *condiciones de Cauchy-Riemann*. Cabe señalar que este desarrollo sólo asegura que estas condiciones son necesarias para la existencia de la derivada de f en z_0. Veremos a continuación que en realidad estas igualdades resultan ser condiciones **necesarias y suficientes** para la derivabilidad de una función en un punto. Para ello, notemos que, de manera equivalente, f es derivable en z_0 si existe algún complejo $f'(z_0)=a+ib$ tal que
$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)-(a+ib)(z-z_0)|}{|z-z_0|}=0.$$
Expresando el producto $(a+ib)(z-z_0)$ en forma matricial como
$$\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix},$$
vemos que la derivabilidad de f en z_0 equivale a
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\left\|\begin{pmatrix} u(x,y)\\ v(x,y)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} u(x_0,y_0)\\ v(x_0,y_0)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right\|}=0,$$
lo que prueba el siguiente resultado.

Teorema 5.2.2. *Una función de variable compleja $f:\Omega\subseteq\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ es derivable en $z_0\in\Omega$ ssi es Fréchet-derivable en (x_0,y_0) como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann*
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)&=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)&=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{aligned}$$
En tal caso,
$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Ejemplos 5.2.3.

1. Consideremos
$$f(z)=z^2=x^2-y^2+2ixy.$$
Las funciones $u(x,y)=x^2-y^2$ y $v(x,y)=2xy$ son (Fréchet)-derivables en todo $\mathbb{R}^2$ pues todas sus derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$. Más aún, es directo verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned}\tfrac{\partial u}{\partial x}&=2x=\tfrac{\partial v}{\partial y},\\ \tfrac{\partial u}{\partial y}&=-2y=-\tfrac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$
Luego
$$f'(z_0)=2x_0+i2y_0=2z_0.$$

2. Sea
$$f(z) = z^3 = (x^3 - 3y^2x, 3x^2y - y^3).$$
Nuevamente por Cauchy-Riemann:
$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 3(x^2 - y^2) = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{array}$$
Luego
$$f'(z_0) = 3(x_0^2 - y_0^2) + i6x_0y_0 = 3z_0^2.$$

3. Tomemos ahora
$$f(z) = z^k,$$
con $k > 0$ un entero fijo. Veremos por definición que
$$f'(z_0) = kz_0^{k-1}.$$
En efecto,
$$\begin{aligned} |(z_0 + h)^k - z_0^k - kz_0^{k-1}h| &= \left| \sum_{l=2}^{k} \binom{k}{l} z_0^{k-l} h^l \right| \\ &= |h^2| \left| \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j+2} z_0^{k-2-j} h^j \right| \\ &\leq |h|^2 \sum_{j=0}^{k-2} \frac{k!}{(j+2)!(k-2-j)!} |z_0|^{k-2-j} |h|^j \\ &\leq |h|^2 k(k-1) \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(k-2)!}{j!(k-2-j)!} |z_0|^{k-2-j} |h|^j \\ &= |h|^2 k(k-1)(|z_0| + |h|)^{k-2}. \end{aligned}$$
Luego
$$\left| \frac{(z_0 + h)^k - z_0^k}{h} - kz_0^{k-1} \right| \leq |h| \cdot k(k-1)(|z_0| + |h|)^{k-2} \to 0.$$

Las reglas usuales para la derivación de sumas, productos, cuocientes, ponderación por escalar y composición de funciones son válidas. A continuación enunciamos estas propiedades, cuyas demostraciones quedan como ejercicio al lector.

5.3. Propiedades básicas de la derivada compleja

Reglas de derivación:

1. Sean $f, g : \Omega \to \mathcal{C}$ dos funciones derivables en z_0 y sea $\alpha \in \mathcal{C}$, entonces la función $h = \alpha f + g$ también es derivable en z_0 y se tiene
$$h'(z_0) = (\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0).$$

2. Si $f, g : \Omega \to \mathcal{C}$ son derivables en z_0 entonces el producto fg es derivable en z_0 y se tiene
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

3. Si $f, g : \Omega \to \mathcal{C}$ son derivables en z_0 con $g(z_0) \neq 0$ entonces el cuociente f/g es derivable en z_0 y se tiene
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

4. Si $f : \Omega \to \mathcal{C}$ es derivable en z_0 y $g : D \to \mathcal{C}$ es derivable en $f(z_0) \in D$ entonces la composición $g \circ f$ es derivable en z_0 y se tiene
$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

En particular, todo polinomio
$$p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k$$
es holomorfo en $\mathcal{C}$ con
$$p'(z_0) = c_1 + 2c_2 z_0 + \ldots k c_k z^{k-1}.$$
Similarmente,
$$f(z) = \frac{1}{z^k}$$
es holomorfa en $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ con
$$f'(z_0) = -\frac{k}{z_0^{k+1}}, \quad \forall z_0 \neq 0.$$

Por otra parte, es evidente que si $f \equiv C$ con $C \in \mathcal{C}$ una constante entonces $f' \equiv 0$. Para la recíproca se tiene:

Proposición 5.3.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una función holomorfa con Ω un conjunto abierto y conexo por caminos. Si $f' \equiv 0$ en Ω entonces f es constante en Ω.*

Demostración. Sea $f = u + iv \in H(\Omega)$ tal que $f' \equiv 0$ en Ω. Por Cauchy-Riemann, se tiene
$$\forall (x, y) \in \Omega, \ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0.$$
Como Ω es conexo por caminos, se deduce que existen dos constantes reales C_1 y C_2 tales que $u \equiv C_1$ y $v \equiv C_2$, y en consecuencia $f \equiv C_1 + iC_2$ en Ω. □

Diremos que una función holomorfa $F : \Omega \to \mathcal{C}$ es una *primitiva* de $f : \Omega \to \mathcal{C}$ si
$$\forall z \in \Omega, \ F'(z) = f(z).$$

Corolario 5.3.2. *Sean $F, G \in H(\Omega)$ dos primitivas de una función $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, donde Ω es un abierto conexo por caminos. Entonces existe una constante $C \in \mathcal{C}$ tal que para todo $z \in \Omega$, $F(z) = G(z) + C$.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición 5.3.1 a la función $H = F - G$. □

5.4. Ejercicios

1. Para las siguientes funciones, determine aquellas que son holomorfas en todo $\mathcal{C}$ y calcule su derivada:

   a) $f(z) = \overline{z}$.

   b) $f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.

   c) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.

   d) $f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, $z = x + iy$.

2. *a*) Sea $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.

   b) Sean $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \to \mathcal{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: considere $|f|^2$.

3. *a*) Sean $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de $\mathcal{C}$, entonces $u + iv$ es constante.

   b) Sea $z_0 \in \mathcal{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$, $z \in \mathcal{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0.

4. Definamos los operadores diferenciales $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ mediante las fórmulas

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

   a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

   b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$.

   c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

   d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2, se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v,$$

   y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω. Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω. Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.

5. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Considere los campos en $\mathbb{R}^3$ definidos por $\vec{w}(x, y, z) = u(x, y)\widehat{\imath} + v(x, y)\widehat{\jmath}$ y $\vec{w}_1(x, y, z) = v(x, y)\widehat{\imath} - u(x, y)\widehat{\jmath}$.

   (i) Pruebe que $\vec{w}$ y $\vec{w}_1$ son conservativos si y sólo si u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, en cuyo caso decimos que u y v son funciones *conjugadas*.

   (ii) Pruebe que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas y de clase C^2 entonces $\Delta u = \Delta v = 0$ (decimos que u y v son *armónicas*) y además $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

   (iii) Pruebe que si $u(x, y)$ es armónica entonces existe una función $v(x, y)$ conjugada de u. Indicación: note que lo anterior es equivalente a probar que un cierto campo es conservativo.

6. Sea $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \widehat{u}(x, y) + i\widehat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables.

   Verifique que $u(r, \theta) = \widehat{u}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ y $v(r, \theta) = \widehat{v}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

   Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta},\ z = re^{i\theta}.$$

Capítulo 6

Funciones en serie de potencias

Hemos visto que las funciones algebraicas, entendidas como sumas (finitas), productos, cuocientes y potencias de polinomios en z, son funciones holomorfas en todo $\mathcal{C}$. En este capítulo extenderemos varias funciones *trascendentes* de una variable real al plano complejo utilizando sus expresiones en series de potencias, obteniendo así nuevas funciones holomorfas.

6.1. Definiciones y propiedades básicas

Sea $(c_k)_{k\geq 0} \subseteq \mathcal{C}$ una sucesión de números complejos y $a \in \mathcal{C}$ un punto dado. Dado $z \in \mathcal{C}$ definimos la suma parcial

$$S_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k (z-a)^k.$$

Teorema 6.1.1. *Sea*

$$R = 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

con la convención $1/0 = \infty$. *Entonces*

1. $S_N(z)$ *converge si* $|z-a| < R$ *y diverge si* $|z-a| > R$. *Al número* R *se le llama* radio de convergencia *de la serie .*
2. *La serie* $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ *es holomorfa en* $D(a,R) = \{z \in \mathcal{C} : |z-a| < R\}$ *con*

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-a)^{k-1}.$$

Demostración. Supongamos para simplificar que $a = 0$, el caso general se hace igual. Tenemos que:

- Si $|z| < R \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|}|z| \leq \varepsilon < 1$ para todo k suficientemente grande, luego

$$\begin{aligned} |S_{N+m}(z) - S_N(z)| &\leq \sum_{k=N+1}^{N+m} |c_k||z|^k \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} (\underbrace{\sqrt[k]{|c_k|}|z|}_{\leq\varepsilon})^k \\ &\leq \frac{\varepsilon^{N+1}}{1-\varepsilon} \to 0 \text{ cuando } N \to \infty. \end{aligned}$$

Luego, $\{S_N(z)\}$ es de Cauchy en $\mathcal{C}$, y por lo tanto es convergente.

- Supongamos que $|z| > R$. Por una parte, tenemos que

$$|S_N(z) - S_{N-1}(z)| = |c_N||z|^N.$$

Si $S_N(z)$ converge entonces necesariamente $|S_N(z) - S_{N-1}(z)| \to 0$. Escojamos una subsucesión N_k tal que

$$\sqrt[N_k]{|c_{N_k}|} \to 1/R.$$

En particular, dado $\varepsilon > 0$ se tendrá que para todo k suficientemente grande

$$\sqrt[N_k]{|c_{N_k}|} > 1/(R+\varepsilon),$$

y en consecuencia

$$|c_{N_k}||z|^{N_k} > [|z|/(R+\varepsilon)]^{N_k}.$$

Escogiendo $\varepsilon > 0$ tal que $R + \varepsilon < |z|$ (esto es posible pues hemos supuesto que $|z| > R$), se deduce que

$$|c_{N_k}||z|^{N_k} > \theta^{N_k} \text{ con } \theta > 1.$$

Luego, $|S_{N_k}(z) - S_{N_k-1}(z)| \geq \theta^{N_k} \to \infty$, y por lo tanto $S_N(z)$ no converge.

Demostremos ahora que la serie $S(z)$ es derivable término a término tal como se establece en el enunciado. Comencemos por notar que como $\limsup_k \sqrt[k-1]{k|c_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|c_k|}$, entonces ambas series tienen el mismo radio de convergencia. Sea $z_0 \in D(0,R)$ y $h \in \mathcal{C}$ pequeño de modo tal que $|z_0| + |h| \leq R - \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{S(z_0+h) - S(z_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z_0^{k-1}\right| &= \left|\sum_{k=2}^{\infty} c_k \left[\frac{(z_0+h)^k - z_0^k}{h} - k z_0^{k-1}\right]\right| \\
&\leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|c_k|(|z_0| + |h|)^{k-2} \\
&\leq |h| \cdot \underbrace{\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|c_k|(R-\varepsilon)^{k-2}\right]}_{\text{convergente a un } M<+\infty} \\
&= M|h| \to 0 \text{ cuando } h \to 0.
\end{aligned}$$

□

Observación. Si $|z - a| = R$ entonces puede o no haber convergencia, lo que dependerá de cada serie en particular.

Corolario 6.1.2. *Bajo las condiciones del teorema anterior, la serie*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

tiene derivadas de todos los órdenes en $D(a,R)$, lo que escribimos $S \in C^\infty(D(a,R))$, y más aún

$$\forall n \in \mathcal{N},\ S^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(z-a)^{k-n}.$$

En particular,

$$\forall k \in \mathcal{N},\ c_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}.$$

6.2. Ejemplos de funciones en serie de potencias

6.2.1. La función exponencial

Definimos la exponencial compleja de $z \in \mathcal{C}$ mediante la serie de potencias

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

El radio de convergencia de esta serie es

$$R = 1/\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 1/0 = \infty,$$

de modo que la exponencial queda bien definida para todo $z \in \mathcal{C}$, es decir

$$\exp : \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Veamos algunas propiedades básicas de la función exponencial.

Propiedades.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exp(iy) = \cos y + i \operatorname{sen} y$.
  En efecto, desarrollando la serie de potencias e identificando sus partes real e imaginaria se obtiene

$$\begin{aligned}
\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\
&= [1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots] + i[y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots] \\
&= \cos y + i \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
  En efecto,

$$\begin{aligned}
\exp(z_1 + z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^{k-j} z_2^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} = \exp(z_1)\exp(z_2).
\end{aligned}$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

- $\forall z_0 \in \mathcal{C}$, $\exp'(z_0) = \exp(z_0)$.
  Ejercicio: verificarlo usando Cauchy-Riemann.
- $\forall z \in \mathcal{C}$, $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$, es decir $\exp(\cdot)$ es $2\pi i$-periódica.
- $\exp(\cdot)$ no tiene ceros; más aún, si $z \in \mathcal{C}$ es tal que $z = x + iy$, entonces $|\exp(z)| = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

6.2.2. Funciones hiperbólicas

Una vez definida la función exponencial, podemos definir las funciones coseno y seno hiperbólico de una variable compleja de manera similar a como se definen las funciones hiperbólicas de una variable real.

El *coseno hiperbólico* es la función holomorfa en $\mathcal{C}$

$$\cosh : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

definida por

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \\ &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \cosh(x)\cos y + i\,\mathrm{senh}(x)\,\mathrm{sen}\, y.\end{aligned}$$

El *seno hiperbólico* es la función holomorfa en $\mathcal{C}$

$$\mathrm{senh} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

definida por

$$\begin{aligned}\mathrm{senh}(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \\ &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \\ &= \mathrm{senh}(x)\cos y + i\cosh(x)\,\mathrm{sen}\, y.\end{aligned}$$

Propiedades.

- $\cosh(-z) = \cosh(z)$ (función par).
- $\mathrm{senh}(-z) = -\,\mathrm{senh}(z)$ (función impar).
- Ambas son $2\pi i$-periódicas.
- $\cosh'(z) = \mathrm{senh}(z)$.
- $\mathrm{senh}'(z) = \cosh(z)$.
- $\cosh^2(z) - \mathrm{senh}^2(z) = 1$.
- $\cosh(z) = 0 \Leftrightarrow z = (\frac{\pi}{2} + k\pi)i$, $k \in \mathcal{Z}$.
- $\mathrm{senh}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i$, $k \in \mathcal{Z}$.

6.2.3. Funciones trigonométricas

Por analogía con el caso real, las funciones trigonométricas coseno y seno de una variable compleja se definen a partir de sus series de potencias[1]

El *coseno* es la función holomorfa en $\mathcal{C}$

$$\cos : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

[1] Las series de potencias del seno y del coseno tienen ambas radio de convergencia igual a infinito.

definida por

$$\begin{aligned}\cos(z) &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \\ &= \cosh(iz) \\ &= \cosh(y)\cos x - i\,\mathrm{senh}(y)\,\mathrm{sen}\,x.\end{aligned}$$

El *seno* es la función holomorfa en $\mathcal{C}$

$$\mathrm{sen} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

definida por

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(z) &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\ &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \\ &= \frac{1}{i}\,\mathrm{senh}(iz) \\ &= \cosh(y)\,\mathrm{sen}\,x + i\,\mathrm{senh}(y)\cos x.\end{aligned}$$

Propiedades.

- $\cos(-z) = \cos(z)$ (función par).
- $\mathrm{sen}(-z) = -\,\mathrm{sen}(z)$ (función impar).
- Ambas son 2π-periódicas.
- $\cos'(z) = -\,\mathrm{sen}(z)$.
- $\mathrm{sen}'(z) = \cos(z)$,
- $\cos^2(z) + \mathrm{sen}^2(z) = 1$.
- $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$.
- $\mathrm{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$.

6.2.4. Función logaritmo

Aunque nos gustaría definir la función logaritmo de un número complejo $\log(z)$ simplemente como la función inversa de $\exp(z)$, hay dos inconvenientes que nos lo impiden:

1. $\exp(z)$ no es epiyectiva pues $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathcal{C}$.
2. $\exp(z)$ no es inyectiva pues es $2\pi i$-periódica.

La primera dificultad es simple de resolver pues basta restringir el dominio del logaritmo al rango de la exponencial, esto es, $\mathcal{C} \setminus \{0\}$. Aunque el segundo inconveniente es más delicado, veremos a continuación que sí es posible definir

$$\log : \mathcal{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{C}$$

de modo tal que se tenga la propiedad

$$\forall z \in \mathcal{C} \setminus \{0\},\ \ \exp(\log(z)) = z.$$

En efecto, sea $z = re^{i\theta}$ con $r = |z| > 0$ de modo que $z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$. Para resolver la ecuación $\exp(w) = z$ tomemos $w = x + iy$ de modo que $\exp(w) = e^x e^{iy}$, y así la ecuación $e^x e^{iy} = re^{i\theta}$ tiene como solución $x = \ln r$, $y = \theta (mod\, 2\pi)$. Luego, el conjunto solución está dado por $\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) | k \in \mathcal{Z}\}$, donde $\arg z \in (-\pi, \pi]$ es el valor principal del argumento de z definido en la sección 4.3.

Así, para cada $k \in \mathcal{Z}$ tenemos la determinación k-ésima de la función logaritmo $\log^k : \mathcal{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{C}$ definida por $\log^k(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$. La *determinación principal* del logaritmo complejo es la función

$$\log : \mathcal{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{C}$$

definida por

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg z.$$

Como la función $\arg z$ es discontinua en $\mathbb{R}_-$ pues pasa de $-\pi$ a π, no podemos esperar que $\log(z)$ sea holomorfa en todo $\mathcal{C} \setminus \{0\}$.

Propiedades.

- $\exp(\log(z)) = e^{\ln|z|} e^{\arg z} = z$.
- $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)\ (mod\, 2\pi i)$.
- $\log(z)$ es discontinua en $\mathbb{R}_-$.
- $\log(z)$ es holomorfa en $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y más aún

  $$\log'(z_0) = \frac{1}{z_0}.$$

  En efecto,

  $$\begin{aligned} \frac{\log(z_0 + h) - \log(z_0)}{h} &= \frac{1}{z_0} \frac{\log(1 + \frac{h}{z_0})}{(\frac{h}{z_0})} \\ &= \frac{1}{z_0} \frac{w}{\exp(w) - \exp(0)} \to \frac{1}{z_0} \frac{1}{\exp'(0)} = \frac{1}{z_0} \end{aligned}$$

  donde $w = \log(1 + \frac{h}{z_0}) \to 0$ cuando $h \to 0$.

- Desarrollo en serie en torno a $a = 1$:
  Como

  $$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - z)^k \quad \text{si } |z - 1| < 1$$

  entonces

  $$\log'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - z)^k \quad \text{si } |z - 1| < 1,$$

  y dado que $\log(1) = \ln 1 + i0 = 0$, en virtud del corolario 5.3.2 se tiene

  $$\log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1} (z - 1)^{k+1}$$

  siempre que $|z - 1| < 1$.

- Desarrollo en serie en torno a $z_0 \notin \mathbb{R}_-$:
  Como
  $$\frac{z_0}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - \frac{z}{z_0})^k$$
  siempre que $|z - z_0| < |z_0|$ entonces para todo z en la *componente conexa por caminos* del conjunto $D(z_0, |z_0|) \setminus \mathbb{R}_-$ que contiene a z_0 se tiene
  $$\log(z) = \log(z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)z_0^{k+1}}(z - z_0)^{k+1}.$$

6.2.5. Otras funciones

- La *tangente hiperbólica* es la función definida por
  $$\tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)}$$
  que resulta ser holomorfa en $\Omega = \mathcal{C} \setminus \{(\frac{\pi}{2} + k\pi)i : k \in \mathcal{Z}\}$
- La *tangente* es la función definida por
  $$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$$
  que resulta ser holomorfa en $\Omega = \mathcal{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathcal{Z}\}$.
- Dado $\alpha \in \mathcal{C}$, el *valor principal de la función potencia* está dado por
  $$z^\lambda = \exp(\lambda \log(z)),$$
  el cual es una función holomorfa en $\Omega = \mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Un caso particular importante es el valor principal de la raíz cuadrada:
  $$\sqrt{z} = z^{1/2} = \sqrt{|z|}e^{i \arg(z/2)}.$$

6.3. Ejercicios

1. Sabiendo que la serie $S(z) = \sum c_k(z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $R_0 > 0$, determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:
   $$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2(z - z_0)^k.$$
2. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:
   $$\sum z^k, \quad \sum \frac{z^k}{k}, \quad \sum \frac{z^k}{k^2}.$$
3. Pruebe que:
   a) $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+1)(z+1)^k$, cuando $|z+1| < 1$.
   b) $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k(k+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^k$, cuando $|z-2| < 2$.
4. Pruebe que:

a) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh}(z)$, $\operatorname{senh}(iz) = i\operatorname{sen}(z)$,
$\cos(iz) = \cosh(z)$, $\cosh(iz) = \cos(z)$.

b) $\overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\overline{z})$, $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.

c) $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}\operatorname{sen}(x+iy) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen} x + i\cos x]$.

d) $\lim\limits_{y\to\infty} \tan(x+iy) = i$.

5. Demostrar que $f(z) = \exp(z^2) + \cos(z)$ es holomorfa y encontrar su serie de potencias.

6. Considere la serie $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ con $a_k = 2$ si k es par y $a_k = 1$ si k es impar. Determine el radio de convergencia R de esta serie y pruebe que ella converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| \geq R$. Compruebe que para $|z| < R$ se tiene
$$S(z) = \frac{2+z}{1-z^2}.$$

7. Dado $\lambda \in \mathcal{C}$, definimos $p^\lambda : \mathcal{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{C}$ mediante
$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda \log(z)),\ z \neq 0.$$
(i) Muestre que $p^i(i) = e^{-\pi/2}$ y que para todo $k \in \mathcal{Z}$, $p^k(z) = z^k$.
(ii) Dado $\lambda = \alpha + i\beta$, pruebe que para todo $t > 0$ real,
$$p^\lambda(t) = t^\alpha[\cos(\beta \log t) + i\sin(\beta \log t)].$$
(iii) Dados $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Determine además el dominio donde $p^\lambda(z)$ es holomorfa y pruebe que
$$(p^\lambda)'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z).$$
Nota: todo lo anterior justifica que la función $p^\lambda(z)$ se llame función potencia generalizada y que se denote más simplemente por z^λ. Así, en (i) se probó que $i^i = e^{-\pi/2}$.

Capítulo 7

Integral en el plano complejo

7.1. Definición

Un *camino* Γ en $\mathcal{C}$ es una curva regular por trozos parametrizada por una función continua y diferenciable por trozos $\gamma : [a, b] \to \mathcal{C}$. Se dice que el camino Γ es *cerrado* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. En algunas ocasiones, denotaremos por γ^* a la curva Γ como conjunto imagen de $[a, b]$ vía la parametrización γ, es decir

$$\gamma^* = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}.$$

Sea $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathcal{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subseteq \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a, b] \to \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante

$$\int_\Gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt.$$

Cuando Γ es un camino cerrado se suele escribir

$$\oint_\Gamma f(z)dz,$$

para denotar la integral de f sobre Γ.

Más explícitamente, tenemos que si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz = &\int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)]dt \\ &+ i\int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{y}(t) + v(x(t), y(t))\dot{x}(t)]dt.\end{aligned}$$

Luego

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i\int_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}.$$

Esto muestra que $\int_\Gamma f(z)dz$ se calcula a partir de dos integrales de trabajo sobre Γ, vista esta última como una curva en $\mathbb{R}^2$.

En particular resulta que la integral compleja es invariante bajo reparametrizaciones regulares de Γ que preservan la orientación; en caso que dos parametrizaciones regulares del camino Γ lo recorran en sentido opuesto, el valor de la integral sólo cambia de signo.

7.2. Propiedades y ejemplos

La siguiente proposición resume algunas de las principales propiedades de la integral compleja.

Proposición 7.2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ un conjunto abierto y $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino parametrizado por $\gamma : [a,b] \to \Omega$. Se tiene:*

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\forall f, g \in C(\Omega)$
$$\int_\Gamma [\alpha f(z) + \beta g(z)]dz = \alpha \int_\Gamma f(z)dz + \beta \int_\Gamma g(z)dz.$$

2. $\forall f \in C(\Omega)$
$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq L(\Gamma) \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|,$$
donde $L(\Gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt$ es la longitud del camino Γ.

3. *Si $f \in C(\Omega)$ admite primitiva, i.e. $\exists F \in H(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$, entonces*
$$\int_\Gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$
y en consecuencia el valor de la integral sólo depende de los extremos del camino pero no de la trayectoria recorrida. En particular, si Γ es un camino cerrado entonces
$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Demostración.

1. Directo.

2. Comencemos por observar que si $H(t) = U(t) + iV(t)$ entonces
$$\left| \int_a^b H(t)dt \right| = \left| \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt \right| \leq \int_a^b |H(t)|dt.$$
En efecto, sean r_0 y θ_0 tales que $r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b H(t)dt$, de modo que $r_0 = \left| \int_a^b H(t)dt \right|$. Luego,
$$r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b H(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} H(t)dt,$$
y dado que r_0 es real,
$$\begin{aligned} r_0 = Re \int_a^b e^{-i\theta_0} H(t)dt &= \int_a^b Re[e^{-i\theta_0} H(t)]dt \leq \int_a^b |Re[e^{-i\theta_0} H(t)]|dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta_0} H(t)|dt = \int_a^b |H(t)|dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $|e^{-i\theta_0}| = 1$, probando así nuestra primera afirmación. Utilizando lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)|dt &\leq \sup_{z\in\Gamma}|f(z)| \int_\Gamma |\dot{\gamma}(t)|dt \\ &= \sup_{z\in\Gamma}|f(z)|L(\Gamma).\end{aligned}$$

3. Sea F tal que $F' = f$. Entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[F(\gamma(t))]dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

Corolario 7.2.2. *Si Γ es un camino cerrado en $\mathcal{C}$ y $z_0 \notin \Gamma$ entonces*

$$\oint_\Gamma (z - z_0)^k dz = 0 \text{ para todo } k \neq -1.$$

Demostración. Basta con observar que si $k \neq -1$ entonces $F'(z) = (z - z_0)^k$ con

$$F(z) = \frac{1}{k+1}(z - z_0)^{k+1}.$$

□

En el caso $k = -1$ se tiene un problema cuando el camino encierra al punto z_0 pues $\log(z - z_0)$ es primitiva de $(z - z_0)^{-1}$ pero sólo para $z \in \mathcal{C} \setminus \{z_0 + \mathbb{R}_-\}$ y por lo tanto no podemos aplicar la proposición 7.2.1 cuando $\Gamma \cap \{z_0 + \mathbb{R}_-\} \neq \emptyset$ como en la figura 7.1.

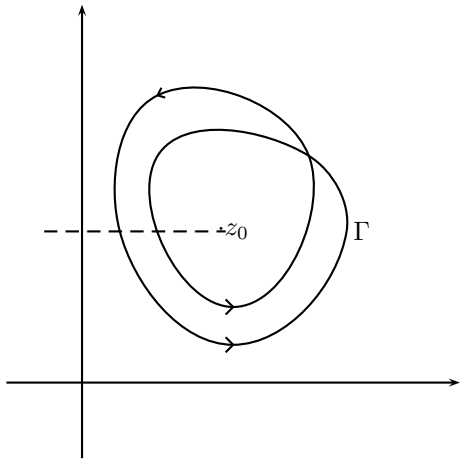


Figura 7.1: Camino cerrado en torno a un punto

Definición 7.2.3. *Dado $z_0 \notin \Gamma$ con Γ un camino cerrado, se define la* indicatriz de Γ en z_0 *mediante*

$$Ind_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Para evaluar $Ind_\Gamma(z_0)$, parametricemos Γ en coordenadas polares relativas a un origen en el punto z_0 mediante

$$\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)},\ t \in [a, b],$$

para algunas funciones $t \in [a, b] \mapsto r(t) > 0$ y $t \in [a, b] \mapsto \theta(t) \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned} Ind_\Gamma(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{r(t)e^{i\theta(t)}} [\dot{r}(t)e^{i\theta(t)} + \dot{r}(t)ie^{i\theta(t)}\dot{\theta}(t)]dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_a^b \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} dt + i \int_a^b \dot{\theta}(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \Big[\ln\Big(\frac{r(b)}{r(a)}\Big) + i[\theta(b) - \theta(a)] \Big] \end{aligned}$$

Como la curva es cerrada $r(a) = r(b)$ de modo que $\ln(r(b)/r(a)) = \ln(1) = 0$ y así

$$\begin{aligned} Ind_\Gamma(z_0) &= \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \\ &= \text{número de vueltas de } \Gamma \text{ en torno a } z_0 \text{ en sentido antihorario.} \end{aligned}$$

Un ejemplo de los valores que puede tomar la indicatriz de una curva cerrada se ilustra en la figura 7.2

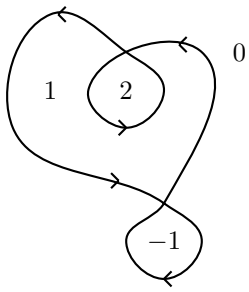


Figura 7.2: Función indicatriz de una curva cerrada

En el caso de una función que es expresable como una serie de potencias en un disco se tiene:

Corolario 7.2.4. *Para una serie de potencias*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

con radio de convergencia R se tiene

$$\oint_\Gamma S(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado Γ contenido en $D(z_0, R)$.

Demostración. Basta con observar que la serie de potencias $S(z)$ tiene como primitiva en $D(z_0, R)$ a la función

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1}.$$

□

Resultados como el corolario 7.2.4 pueden ser muy útiles para evaluar integrales reales en base a métodos de variable compleja. El siguiente ejemplo es una ilustración célebre de esta clase de técnica.

Ejemplo 7.2.5 (Integrales de Fresnel).

Las siguientes identidades se conocen como las *integrales de Fresnel*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{7.1}$$

Para probar (7.1) tomemos $R > 0$ y consideremos el camino

$$\Gamma(R) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

tal como se ilustra en la figura 7.3.

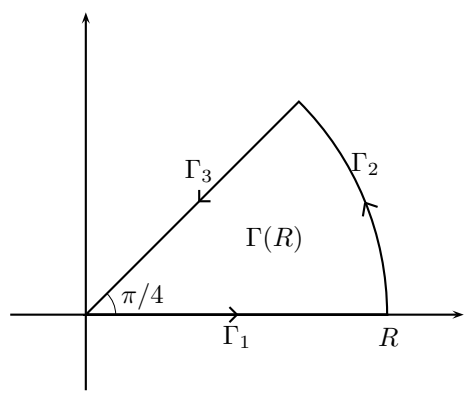


Figura 7.3: Camino para las integrales de Fresnel

Consideremos la función

$$f(z) = \exp(iz^2).$$

Como se trata de la función exponencial, la cual se define como una serie de potencias de radio de convergencia infinito, compuesta con el polinomio $p(z) = iz^2$, se deduce que $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias, cuyo radio de convergencia también es infinito.

Luego,

$$\oint_{\Gamma(R)} \exp(iz^2)dz = 0. \tag{7.2}$$

Por otra parte,

$$\oint_{\Gamma(R)} \exp(iz^2)dz = \int_{\Gamma_1} \exp(iz^2)dz + \int_{\Gamma_2} \exp(iz^2)dz + \int_{\Gamma_3} \exp(iz^2)dz.$$

Estudiemos el comportamiento de cada una de estas integrales cuando $R \to \infty$:

- Tenemos

$$\int_{\Gamma_1} \exp(iz^2)dz = \int_0^R \exp(ix^2)dx = \int_0^R \cos(x^2)dx + i\int_0^R \operatorname{sen}(x^2)dx,$$

luego

$$\int_{\Gamma_1} \exp(iz^2)dz \to \int_0^\infty \cos(x^2)dx + i\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)dx, \text{ cuando } R \to \infty.$$

- Tenemos

$$\int_{\Gamma_3} \exp(iz^2)dz = \int_R^0 \exp(ir^2e^{i\pi/2})e^{i\pi/4}dr = -e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-r^2}dr,$$

luego

$$\int_{\Gamma_3} \exp(iz^2)dz \to -e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}), \text{ cuando } R \to \infty.$$

- Finalmente

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_2} \exp(iz^2)dz\right| &= \left|\int_0^{\pi/4} exp(iR^2e^{2i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\right| \\
&= R\left|\int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)}e^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leq R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\operatorname{sen} 2\theta}d\theta \\
&\leq R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\frac{2}{\pi}2\theta}d\theta \\
&= -\frac{\pi}{4R}e^{-\left(\frac{4R^2\theta}{\pi}\right)}\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4R}[1 - e^{-R^2}] \to 0, \text{ cuando } R \to \infty.
\end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad hemos usado que

$$\forall \alpha \in [0, \pi/2], \ \operatorname{sen}\alpha \geq 2\alpha/\pi.$$

Por lo tanto, haciendo $R \to \infty$ en (7.2) se obtiene

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

y por un argumento de paridad se deduce que se tiene (7.1).

7.3. El teorema de Cauchy-Goursat

Una pregunta interesante es saber si un resultado similar al corolario 7.2.4 es cierto pero sólo bajo el supuesto que f es holomorfa en un dominio Ω, sin saber *a priori* si es o no expresable como una serie de potencias. Un resultado fundamental de la teoría de funciones de variable compleja establece que esto es así siempre que se asuma una propiedad adicional sobre el dominio.

Definición 7.3.1. *Un subconjunto $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ abierto y conexo por caminos se dice que es* simplemente conexo *si todo camino cerrado contenido en Ω encierra solamente puntos de Ω.*

Dicho de otra forma, un conjunto simplemente conexo no tiene *agujeros*.

Definición 7.3.2. *Un* camino cerrado simple *es un camino que genera dos conjuntos disjuntos abiertos y conexos, uno acotado y el otro no acotado, y ambos conjuntos tienen al camino como frontera.*

En otros términos, un camino cerrado simple es aquél que siendo cerrado no se corta a sí mismo.

Teorema 7.3.3 (Cauchy-Goursat). *Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$$

para todo camino cerrado, regular por trozos y simple Γ contenido en Ω.

Demostración. Para simplificar, sólo daremos la demostración en el caso en que se supone además que $f'(z)$ es continua[1] en Ω. Sea $D \subseteq \mathcal{C}$ la región encerrada por el camino Γ. Si $f = u + iv$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma f(z)dz &= \oint_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i \oint_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}. \\ &= \iint_D \underbrace{\left[\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]}_{0} dxdy + i \iint_D \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right]}_{0} dxdy,\end{aligned}$$

esto último en virtud del teorema de Green en el plano (suponiendo que Γ se recorre en sentido antihorario), el cual se puede aplicar pues las derivadas parciales de u y v son continuas. Finalmente, de las condiciones de Cauchy-Riemann se deduce que los integrandos de las dos integrales dobles son nulos en D, lo que prueba el resultado. □

Observación. El teorema 7.3.3 fue demostrado originalmente por A. Cauchy bajo la hipótesis adicional de que $f'(z)$ es continua en Ω, lo que asumimos en la demostración sólo para simplificar el análisis pues nos permite aplicar directamente el teorema de Green en el plano.

Es generalmente reconocido que el primero en dar una demostración sin asumir la continuidad de $f'(z)$ fue E. Goursat. Esto último es muy importante pues nos permitirá probar que toda función holomorfa es expresable, al menos localmente, como una serie de potencias (ver el teorema 8.2.1).

El resultado anterior puede extenderse a situaciones más generales. Un ejemplo lo constituye el siguiente teorema:

Teorema 7.3.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ un conjunto abierto y conexo, y consideremos*

$$f : \Omega \setminus \{p_1, p_2, ..., p_n\} \longrightarrow \mathcal{C}$$

una función holomorfa, donde $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subseteq \Omega$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado, regular por trozos, simple y recorrido en sentido antihorario y sea D la región encerrada por Γ. Supongamos que $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$

[1] Para una demostración en el caso general el lector puede referirse por ejemplo a *Teoría de Funciones de Variable Compleja*, R.V. Churchill, McGraw-Hill, New York, 1966.

y escojamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que los discos cerrados $\overline{D}(p_j, \varepsilon)$ estén contenidos en D y no se intersecten entre sí. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz$$

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ como en el enunciado, definamos

$$D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(p_j, \varepsilon)}.$$

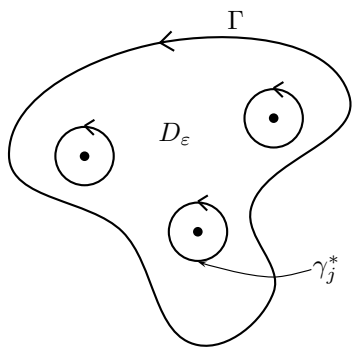


Figura 7.4: Curva cerrada que encierra circunferencias

Introduzcamos un segmento rectilíneo $L_1 \subseteq D_\varepsilon$, o en caso de ser necesario una cadena continua y finita de tales segmentos, que una el camino Γ con γ_1^*. Similarmente, sea $L_2 \subseteq D_\varepsilon$ otro segmento (o cadena) rectilíneo que una γ_1^* con γ_2^*, y así sucesivamente hasta L_{n+1} uniendo γ_n^* con Γ.

De este modo, podemos dividir D_ε en dos subdominios simplemente conexos D'_ε y D''_ε donde f es holomorfa, los cuales corresponden a regiones encerradas por los segmentos L_j y arcos de Γ y γ_j^*. Sobre ambos dominios podemos aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para f, para deducir que

$$\oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz = 0 = \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz,$$

donde $\partial D'_\varepsilon$ y $\partial D''_\varepsilon$ denotan los caminos que encierran a D'_ε y D''_ε respectivamente. En particular, la suma de estas integrales es nula, y si ambos caminos se recorren en sentido antihorario entonces las integrales en sentidos opuestos a lo largo de los segmentos L_j se cancelan mutuamente.

Luego, si denotamos por $(\gamma_j^*)^-$ el camino γ_j^* recorrido en sentido horario, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz + \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz \\ &= \oint_\Gamma f(z)dz + \sum_{j=1}^{n} \oint_{(\gamma_j^*)^-} f(z)dz + \text{Integrales sobre los } L_j\text{'s} \\ &= \oint_\Gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema. □

7.4. Ejercicios

1. Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:

$$\int_{[0,z_0]} \mathrm{Re}(z)dz, \quad \int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}, \quad \int_{|z|=1} \overline{z}^n dz$$

2. Pruebe que la función $z \to z\log(z)$ tiene una primitiva en $\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y calcule el valor de la integral

$$\int_{[0,i]} z\log(z)dz$$

3. Pruebe que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{z}{z^3+1}dz = 0, \quad \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,-R+i]} \frac{z^2\exp(z)}{z+1}dz = 0$$

4. Pruebe que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx \\ \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{sen}(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^b e^{x^2}dx \end{aligned}$$

Ind.: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ en un contorno rectangular adecuado.

5. *a*) Pruebe que para $b \in]-1,1[$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1-b^2+x^2}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Integre $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

b) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2}dx = \frac{1}{4b}\ln\frac{1+b}{1-b}$$

6. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{Im}(e^{-2ix}p(x+i))dx = 0$$

para cualquier polinomio $p(z)$ a coeficientes reales.
Indicación: Considere $f(z) = \exp(-z^2)p(z)$.

Capítulo 8

Fórmula de Cauchy y primeras consecuencias

8.1. La fórmula de Cauchy

El siguiente resultado, que básicamente es una consecuencia del teorema 7.3.3 de Cauchy-Goursat, es fundamental para el desarrollo de la teoría de funciones de varible compleja.

Teorema 8.1.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p,r)$ se tiene la* fórmula integral de Cauchy*:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{8.1}$$

donde $\partial D(p,r)$ es la circunferencia de centro p y radio $r > 0$ recorrida en sentido antihorario.

Demostración. Supongamos $z_0 \neq p$ (el caso $z = p$ es análogo y se deja como ejercicio al lector). En virtud del teorema 7.3.4, que a su vez es una consecuencia del teorema 7.3.3, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene

$$\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\partial D(p,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\partial D(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{8.2}$$

La primera integral del lado derecho tiende a 0 cuando $\varepsilon \to 0$; en efecto, por la Proposición 7.2.1 se tiene

$$\left| \oint_{\partial D(p,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi\varepsilon \sup_{z \in \partial D(p,\varepsilon)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|} \leq 2\pi M\varepsilon,$$

donde $M = \sup\{|f(z)|/|z - z_0| : z \in \partial D(p,\varepsilon)\}$ es finito debido a la continuidad de f y a que z_0 no pertenece al conjunto cerrado $\partial D(p,\varepsilon)$ de modo que $\exists \alpha > 0$, $\forall z \in \partial D(p,\varepsilon)$, $|z - z_0| \geq \alpha$.

Por otra parte, para la segunda integral del lado derecho en (8.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) i dt. \end{aligned}$$

De la continuidad de f se deduce que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})dt = 2\pi f(z_0). \tag{8.3}$$

En efecto, dado $\eta > 0$, la continuidad de f en z_0 permite asegurar que existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| \leq \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \eta$. Luego, si $\varepsilon \leq \delta$ entonces $|z_0 + \varepsilon e^{it} - z_0| = \varepsilon \leq \delta$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})dt - 2\pi f(z_0)\right| &= \left|\int_0^{2\pi}[f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)]dt\right| \\ &\leq \int_0^{2\pi}|f(z_0+\varepsilon e^{it}) - f(z_0)|dt \\ &\leq 2\pi\eta,\end{aligned}$$

y como $\eta > 0$ es arbitrario, esto implica que se tiene (8.3).

Finalmente, observando que el lado izquierdo en (8.2) no depende de ε y haciendo $\varepsilon \to 0$ en esta igualdad se obtiene

$$\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0),$$

lo que prueba el resultado. □

8.2. Desarrollo en serie de Taylor

Teorema 8.2.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una función continua en un abierto Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(p,r) \subseteq \Omega$. Entonces existe una sucesión de constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathcal{C}$ tales que*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-p)^k, \quad \forall z \in D(p,r),$$

y más aún

$$c_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}}dw,$$

donde $\partial D(p,r)$ está parametrizado en sentido antihorario.

Demostración. Dado $z \in D(p,r)$, en virtud de la fórmula de Cauchy se obtiene

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-p}{w-p}}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-p)^k}{(w-p)^{k+1}}dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)}\frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}}dw\right)(z-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-p)^k.\end{aligned}$$

El intercambio $\int \sum = \sum \int$ se justifica como sigue

$$\begin{aligned}
\left| \oint_{\partial D} \sum_{k=0}^{\infty} (\%) - \sum_{k=0}^{N} \oint_{\partial D} (\%) \right| &= \left| \oint_{\partial D} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\%) \right| \\
&\leq 2\pi r \sup_{w \in \partial D} \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{f(w)(z-p)^k}{(w-p)^{k+1}} \right| \\
&\leq 2\pi r \underbrace{\sup_{w \in \partial D} |f(w)|}_{M} \cdot \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|z-p|^k}{r^{k+1}} \\
&\leq 2\pi M \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{|z-p|}{r} \right)^k \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N \to \infty.
\end{aligned}$$

Esto último se tiene pues se trata de la *cola* de la serie geométrica $\sum a^k$ con $a = |z-p|/r < 1$ pues $z \in D(p,r)$.

Finalmente, la igualdad $f^{(k)}(p) = k! c_k$ es consecuencia de que la serie se puede derivar término a término y luego evaluar en $z = p$ de manera iterativa (ver el teorema 6.1.1 y el corolario 6.1.2). □

Una consecuencia importante del último resultado es la siguiente:

Corolario 8.2.2. *Si $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es continua en un abierto Ω, y holomorfa en Ω salvo en a lo más un número finito de puntos, entonces f es holomorfa en todo Ω y, más aún, f es infinitamente derivable en Ω.*

8.3. Otras consecuencias

Corolario 8.3.1 (Desigualdades de Cauchy). *Sea Ω abierto, $f \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(p,r) \subseteq \Omega$. Si definimos*

$$M_r = \sup_{\partial D(p,r)} |f(z)|$$

entonces

$$\forall k \geq 0, \quad |f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}$$

Demostración. Del teorema 8.2.1, se deduce que

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
|f^{(k)}(p)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{|f(w)|}{r^{k+1}} |dw| \\
&= \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(p+re^{i\theta})|}{r^{k+1}} |rie^{i\theta}| d\theta \\
&\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{r^k} \int_0^{2\pi} |f(p+re^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{r^k} M_r 2\pi = \frac{k! M_r}{r^k}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 8.3.2 (Teorema de Liouville). *Si $f \in H(\mathcal{C})$ es una función acotada entonces f constante en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Por hipótesis, existe una constante $M > 0$ tal que $\forall z \in \mathcal{C}$, $|f(z)| \leq M$. Sea $z_0 \in \mathcal{C}$. Dado $r > 0$, obviamente $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \mathcal{C}$ que es la región en donde f es holomorfa. Por el corolario anterior, se tiene que para $k = 1$, $|f'(z_0)| \leq M/r$, pues $M_r = \sup_{z \in \partial D(z_0,r)} |f(z)| \leq M$. Como $r > 0$ es arbitrario, podemos hacer $r \to \infty$ para deducir que $|f'(z_0)| = 0$, y como z_0 también es arbitrario, tenemos que $f' \equiv 0$ en $\mathcal{C}$, de donde se sigue que f es constante. □

Corolario 8.3.3 (Teorema de d'Alembert o Teorema Fundamental del Algebra). *Si f es un polinomio no constante entonces existe $z_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. En consecuencia, todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces.*

Demostración. La demostración de este resultado mediante métodos puramente algebraicos es algo dificultosa. Sin embargo, puede deducirse con relativa facilidad a partir del teorema de Liouville.

Argumentando por contradicción, supongamos que $\forall z \in \mathcal{C}$, $f(z) \neq 0$ con $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Obviamente $f \in H(\mathcal{C})$ y además podemos definir $g \in H(\mathcal{C})$ mediante $g(z) = 1/f(z)$. Si g fuese acotada entonces, por el teorema de Liouville, se tendría $g \equiv C$ para alguna constante $C \in \mathcal{C}$. Pero en tal caso, f también sería constante, lo que contradice la hipótesis. Veamos ahora que efectivamente g es una función acotada bajo la condición $\forall z \in \mathcal{C}$, $f(z) \neq 0$; en efecto

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{f(z)} &= \frac{1}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n} \\ &= \frac{1}{a_n z^n} \left(\frac{1}{\frac{b_0}{z^n} + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{z} + 1} \right) \end{aligned}$$

donde $b_i = a_i/a_n$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Notemos que $|g(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$. En particular, $\exists r > 0$ tal que $|z| > r \Rightarrow |g(z)| \leq 1$. Para $|z| \leq r$, notemos que g es continua de modo que es acotada en el compacto $\overline{D}(0, r)$. Tomando $M = \text{máx}\{1, \sup_{z \in \overline{D}(0,r)} |g(z)|\} < \infty$ se tiene que $\forall z \in \mathcal{C}$, $|g(z)| < M$.

El resto de la demostración es algebraica. Sea $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Como f no es constante, se tiene que $\exists z_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. Así, resulta que $(z - z_0)$ divide a f luego podemos escribir $f(z) = (z - z_0) f_1(z)$. Notemos que $f_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es necesariamente un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 > 0$, podemos aplicar el mismo razonamiento, para obtener un $z_1 \in \mathcal{C}$ tal que $f_1(z_1) = 0$. Ahora bien, $(z - z_1)$ divide a f_1, de donde se tiene que $f_1 = (z - z_1) f_2$, y por consiguiente $f(z) = (z - z_0)(z - z_1) f_2(z)$. Repetimos el argumento n veces, hasta obtener una secuencia $\{z_i\}_{i \in \{0,1,\ldots,n-1\}}$ tal que $f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_{n-1}) f_n(z)$. Notando que f_n es de grado 0, es decir $f_n \equiv$ constante, se concluye el teorema. □

8.4. Ejercicios

1. Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que para $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0,$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

2. Pruebe que para todo $k \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^{\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta = \pi.$$

3. Desarrollar $f(z) = \operatorname{senh} z$ en serie de Taylor en torno al punto $z = \pi i$.

4. Sea $f \in H(\Omega \setminus \{0\}) \cap C(\Omega)$ con Ω un conjunto abierto tal que $\overline{D}(0,r) \subseteq \Omega$ para algún $r > 0$. Suponga que existe una sucesión $(z_n)_{n\geq 0} \subseteq \Omega \setminus \{0\}$ tal que $z_n \to 0$ y $f(z_n) = 0$ para todo $n \geq 0$. Pruebe que $f \equiv 0$.

Capítulo 9

Teorema de los residuos

9.1. Puntos singulares, polos y residuos

Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Se dice que $p \in \mathcal{C}$ es un *punto singular aislado* de $f(z)$ si existe un radio $R > 0$ tal que $f \in H(D(p,R) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p.

Ejemplo 9.1.1. El complejo $p = 0$ es un punto singular aislado de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

□

Se dice que p es un *punto singular evitable* si, junto con ser punto singular aislado, el siguiente límite existe

$$L_0(p) = \lim_{z \to p} f(z).$$

Notemos que en este caso podemos extender la definición de f a todo el disco $D(p,R)$ de la siguiente forma:

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D(p,R) \setminus \{p\}, \\ L_0(p) & \text{si } z = p. \end{cases}$$

La función $\widehat{f}$ así definida coincide con f en $D(p,R) \setminus \{p\}$ y evidentemente es continua en todo $D(p,R)$. Como $f \in H(D(p,R) \setminus \{p\})$, por el corolario 8.2.2 se tiene $\widehat{f} \in H(\Omega)$. Esto justifica la terminología de punto singular evitable.

Ejemplo 9.1.2. El complejo $p = 0$ es un punto singular evitable de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z},$$

pues de la serie de potencias de $\operatorname{sen} z$ se deduce que

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

De este modo, la función $\widehat{f} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definida por

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

es holomorfa en todo $\mathcal{C}$. Por otra parte, $p = 0$ es un punto singular no evitable de la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z}.$$

□

Se dice que $p \in \mathcal{C}$ es un *polo* de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y además existe un entero $m \geq 1$ tal que el límite

$$L_m(p) = \lim_{z \to p} (z-p)^m f(z)$$

existe y es no nulo, i.e. $L_m(p) \neq 0$. El menor $m \geq 1$ con dicha propiedad se llama *orden* del polo p. Diremos que p es un *polo simple* cuando sea un polo de orden $m = 1$.

Ejemplo 9.1.3. El complejo $p = 0$ es un polo simple de la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z},$$

pues

$$L_1(0) = \lim_{z \to 0} (z-0) \frac{\cos z}{z} = \lim_{z \to 0} \cos z = \cos(0) = 1.$$

□

Sea $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ un conjunto abierto, p un punto en Ω y supongamos que $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Si p es un polo de $f(z)$ entonces p no puede ser un punto singular evitable de $f(z)$, pues en caso contrario se tendría

$$\lim_{z \to p} (z-p)^m f(z) = \lim_{z \to p} (z-p)^m \lim_{z \to p} f(z) = 0 L_0 = 0,$$

para todo entero $m \geq 1$, lo que contradice la definición de polo. Luego, un polo es una verdadera singularidad de la función en el sentido que no es posible *repararla* en p por continuidad.

Supongamos que p es un polo de $f(z)$ de orden $m \geq 1$. Si consideramos

$$g(z) = (z-p)^m f(z)$$

entonces p resulta ser un punto singular evitable de $g(z)$ y en consecuencia la función

$$\widehat{g}(z) = \begin{cases} (z-p)^m f(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \{p\}, \\ \lim\limits_{z \to p} (z-p)^m f(z) & \text{si } z = p. \end{cases}$$

es holomorfa en todo Ω. De acuerdo al teorema 8.2.1, si $r > 0$ es tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$ entonces $\widehat{g}(z)$ admite una expansión en serie de Taylor en $D(p,r)$ y en particular se tiene

$$\forall z \in D(p,r) \setminus \{p\}, \quad (z-p)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{c}_k (z-p)^k,$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{c}_k &= \frac{\widehat{g}^{(k)}(p)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{\widehat{g}(w)}{(w-p)^{k+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k-m+1}} dw, \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene para $f(z)$ el siguiente desarrollo en serie de potencias (con potencias negativas) para todo $z \in D(p,r) \setminus \{p\}$:

$$f(z) = \frac{\widehat{c}_0}{(z-p)^m} + \frac{\widehat{c}_1}{(z-p)^{m-1}} + \ldots + \frac{\widehat{c}_{m-1}}{(z-p)} + R(z), \tag{9.1}$$

donde el resto

$$R(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \widehat{c}_k (z-p)^{k-m}$$

es una función holomorfa en $D(p,r)$ por tratarse de una serie de potencias usual. El desarrollo (9.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-m}(z-p)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z-p)^{-1} + c_0 + c_1(z-p) + \ldots \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-p)^k, \end{aligned}$$

donde para todo $k \geq -m$ se tiene

$$c_k = \widehat{c}_{k+m} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw.$$

Esto se trata de un caso particular de lo que se conoce como expansión en *serie de Laurent* de $f(z)$ que veremos en la sección 9.4, la cual constituye una generalización de la serie de Taylor al caso de funciones con singularidades aisladas. En el caso más general, la serie de Laurent puede admitir infinitos términos no nulos asociados a potencias negativas (en lugar de sólo un número finito como ocurre en el caso de un polo), en cuyo caso decimos que se trata de una *singularidad esencial* de $f(z)$. En este apunte, no abordaremos el caso de singularidades esenciales.

Como veremos en la siguiente sección, el coeficiente $\widehat{c}_{m-1}$ (o equivalentemente, el coeficiente c_{-1}) en el desarrollo de Laurent (9.1) de $f(z)$ en torno a p juega un rol muy importante en la teoría de funciones de variable compleja. A este coeficiente se le llama *residuo de f en p y se denota por* $\operatorname{Res}(f,p)$. Tenemos que

$$\operatorname{Res}(f,p) = \frac{\widehat{g}^{(m-1)}(p)}{(m-1)!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} f(w) dw.$$

Una expresión para $\operatorname{Res}(f,p)$ que es muy útil en cálculos específicos se obtiene al notar que todas las derivadas de $\widehat{g}$ son continuas de modo tal que, recordando que $\widehat{g}(z) = (z-p)^m f(z)$ si $z \neq p$:

$$\operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p)^m f(z) \right] \tag{9.2}$$

donde $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$ denota la derivada de orden $m-1$.

9.2. El teorema de los residuos

Sea $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Supongamos primero que p es un punto singular evitable de f, de modo que la extensión $\widehat{f}$ de f a todo Ω por continuidad satisface $\widehat{f} \in H(\Omega)$. Si Ω es simplemente conexo y $\Gamma \subseteq \Omega \setminus \{p\}$ es un camino cerrado simple entonces podemos aplicar el teorema 7.3.3 de Cauchy-Goursat a $\widehat{f}$ para deducir que

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \tag{9.3}$$

donde hemos usado que $\widehat{f}$ coincide con f en $\Omega \setminus \{p\}$ y que el camino Γ no pasa por p.

Supongamos ahora que p es un polo de f de orden m. Como en este caso no es posible extender f a todo Ω de modo que la extensión sea continua, nada asegura que (9.3) sea válido. De hecho, si suponemos que el camino cerrado simple Γ está contenido en $D(p,r) \setminus \{p\}$ con $r > 0$ de modo tal que el desarrollo (9.1) es válido para todo $z \in D(p,r) \setminus \{p\}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} \left[\frac{\widehat{c}_0}{(z-p)^m} + \ldots + \frac{\widehat{c}_{m-1}}{(z-p)} + R(z) \right] dz \\ &= \widehat{c}_{m-1} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z-p} dz \\ &= \operatorname{Res}(f,p) 2\pi i Ind_{\Gamma}(p) \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f,p), \end{aligned}$$

siempre que Γ se recorra en sentido antihorario. Esta propiedad explica el nombre de *residuo* dado al coeficiente $\widehat{c}_{m-1}$, y puede extenderse a situaciones más generales. Introduzcamos primero la siguiente definición.

Definición 9.2.1. *Una función f se dice* meromorfa *en un abierto Ω si existe un conjunto $P \subseteq \Omega$ finito o numerable tal que*

(1) $f \in H(\Omega \setminus P)$.

(2) f tiene un polo en cada punto $p \in P$.

(3) P no posee puntos de acumulación.

Teorema 9.2.2 (de los residuos de Cauchy). *Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y sea P el conjunto de todos sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ y tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y más aún*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, p_j). \tag{9.4}$$

Demostración. Comencemos por notar que si bien P puede ser infinito, sabemos que D es acotado, y como P no tiene puntos de acumulación en Ω se sigue que $P \cap D$ es finito. Ahora bien, de acuerdo con el teorema 7.3.4, para $\varepsilon > 0$ pequeño se tiene

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz, \quad \gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

En torno a cada polo p_j la función f admite un desarrollo del tipo (9.1) de modo tal que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_j} f(z)dz &= \oint_{\gamma_j^*} \left[c_{-m_j}^j (z-p_j)^{-m_j} + \ldots + c_{-1}^j (z-p_j)^{-1} + R_j(z) \right] dz \\ &= c_{-1}^j \oint_{\gamma_j^*} \frac{1}{z-p_j} dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, p_j), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. □

9.3. Ejemplos

Una primera regla de cálculo sencilla para evaluar el residuo de una función de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

que tiene un **polo simple** en p, donde $g(p) \neq 0$ y $h(p) = 0$ consiste en la fórmula

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, p\right) = \frac{g(p)}{h'(p)}. \tag{9.5}$$

La demostración de (9.5) es directa de la definición de residuo con orden $m = 1$ por ser p un polo simple.

Ejemplo 9.3.1. *Calcular:*

$$\oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{1+z^2} dz.$$

Solución Comencemos por notar que los polos de

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

están dados por

$$p_1 = i, \quad p_2 = -i,$$

y ambos son polos simples y están encerrados por $\partial D(0,2)$.

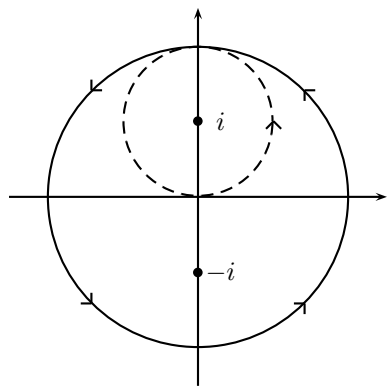


Figura 9.1: Circunferencia centrada en el origen

Los residuos correspondientes son:

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{2i},$$

y

$$\mathrm{Res}(f,-i) = -\frac{1}{2i}.$$

Luego

$$\oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{1+z^2}dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i}\right] = 0.$$

Por otra parte, si consideramos la circunferencia centrada i y de radio 1, entonces

$$\oint_{\partial D(i,1)} \frac{1}{1+z^2}dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2i}\right] = \pi.$$

□

Antes de ver otro ejemplo, demostremos el siguiente resultado que es bastante útil para el cálculo de polos y residuos.

Proposición 9.3.2 (Regla de l'Hôpital). *Sean $f, g \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $n \geq 1$ tales que*

$$g(p) = \ldots = g^{(n-1)}(p) = 0 \neq g^{(n)}(p).$$

Entonces

$$\lim_{z\to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \textit{no existe} & \textit{si } f^{(k)}(p) \neq 0 \textit{ para algún } k \in \{0,1,\cdots,n-1\}. \\ \dfrac{f^{(n)}(p)}{g^{(n)}(p)} & \textit{si } f^{(k)}(p) = 0 \textit{ para todo } k \in \{0,1,\cdots,n-1\} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el desarrollo de Taylor de g en torno a p

$$g(z) = \sum_{k\geq n} \frac{g^{(k)}(p)}{k!}(z-p)^k = \frac{g^{(n)}(p)}{n!}(z-p)^n + \frac{g^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(z-p)^{n+1} + \dots$$

Luego

$$\lim_{z\to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to p} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(z-p)^{k-n}}{\frac{g^{(n)}(p)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(z-p) + \dots}$$

El denominador tiende hacia $\frac{g^{(n)}(p)}{n!}$. El numerador sólo converge cuando $f^{(k)}(p) = 0$ para todo $k < n$, y en tal caso tiende a $\frac{f^{(n)}(p)}{n!}$, lo que permite concluir. □

Ejemplo 9.3.3. *Evaluar*

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z \operatorname{sen} z},$$

donde Γ *es el camino de la figura 9.2.*

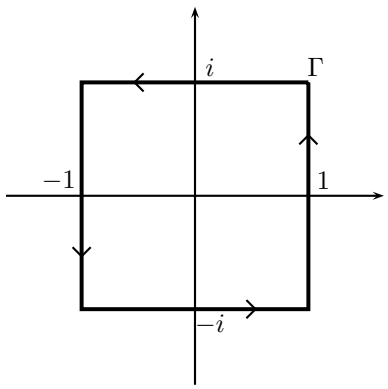


Figura 9.2: Cuadrado centrado en el origen

Solución La función

$$f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z}$$

tiene como candidatos a ser polos todos los puntos del tipo $p_k = k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$.

Si $k = 0$ entonces $p_0 = 0$ es polo de orden 2; en efecto

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos z} = 1,$$

mientras que el limite

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

no existe. Si $k \neq 0$ entonces p_k no pertenece a la región encerrada por Γ, y por lo tanto estos puntos no son relevantes para el cálculo de la integral.

Residuo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d^1}{dz^1}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}\right)\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z - z\cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - \cos z + z\operatorname{sen} z}{2\operatorname{sen} z\cos z} = 0.\end{aligned}$$

Luego

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z\operatorname{sen} z} = 0.$$

Notemos que en este caso el residuo resultó ser 0, lo que no es posible cuando el polo es simple.

□

Ejemplo 9.3.4. *Calcular*

$$\oint_\Gamma \frac{z^3}{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}dz,$$

donde Γ *es el camino de la figura 9.3.*

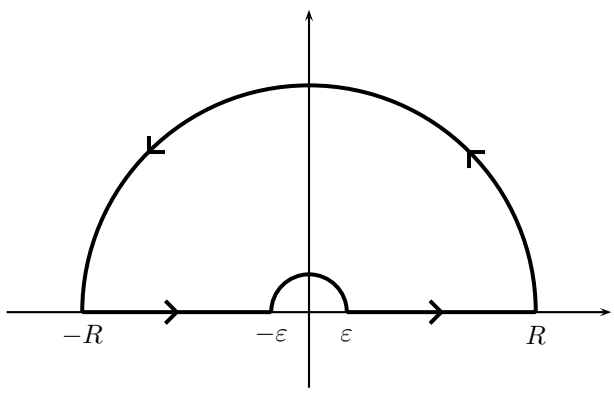


Figura 9.3: Camino que evita al origen

Solución Para determinar los polos de la función

$$f(z) = \frac{z^3}{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2},$$

veamos donde se anula el denominador:

$$\begin{aligned} e^{3iz} - 3\underbrace{e^{iz}}_{w} + 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad w^3 - 3w + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (w-1)^2(w+2) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad w = 1 \text{ o bien } w = -2\\ &\Leftrightarrow \quad iz = \log(1) \text{ o bien } iz = \log(-2) = \ln 2 + i\pi\\ &\Leftrightarrow \quad z = 0 \text{ o bien } z = \pi - i\ln 2.\end{aligned}$$

Como ninguno de estos puntos está encerrado por Γ, entonces

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Si en lugar del camino anterior se considera la circunferencia centrada en el origen y de radio $R > 0$ suficientemente grande, entonces ambos puntos son relevantes.

• $p = 0$: desarrollando las exponenciales en serie de potencias se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^3}{(1+(3iz)+\frac{(3iz)^2}{2!}+\frac{(3iz)^3}{3!}+\ldots)-3(1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\ldots)+2} \\ &= \frac{z^3}{(-\frac{9}{2}z^2-\frac{27}{6}iz^3+\ldots)-(-\frac{3}{2}z^2-\frac{iz^3}{6}+\ldots)} \\ &= \frac{z^3}{-3z^2+o(z^2)} \to 0 \Rightarrow p=0 \text{ no es polo.} \end{aligned}$$

• $p = \pi - i\ln 2$:

$$f(z) = \frac{z^3}{(e^{iz}-1)^2(e^{iz}+2)} = \frac{z^3}{(e^{iz}-1)^2}\frac{1}{e^{iz}-e^{ip}},$$

luego

$$\lim_{z\to p}\frac{z^3}{(e^{iz}-1)^2}\frac{z-p}{e^{iz}-e^{ip}} = \frac{p^3}{(e^{ip}-1)^2}\frac{1}{ie^{ip}} = \frac{p^3}{9}\frac{1}{i(-2)} = \frac{i(\pi-i\ln 2)^3}{18} \neq 0,$$

de modo que $p = \pi - i\ln 2$ es un polo simple. En este caso, el residuo coicide con el límite que acabamos de calcular, es decir

$$\mathrm{Res}(f,p) = \lim_{z\to p}(z-p)f(z) = \frac{i(\pi-i\ln 2)^3}{18},$$

y en consecuencia

$$\oint_{\partial D(0,R)} f(z)dz = -\frac{\pi}{9}(\pi - i\ln 2)^3.$$

□

Una consecuencia interesante del teorema de los residuos es la siguiente:

Proposición 9.3.5. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ holomorfa y Γ una curva simple, cerrada y recorrida en sentido antihorario la cual encierra una región $D \subseteq \Omega$. Si f tiene un número finito de ceros al interior de D y no tiene ceros en Γ entonces*

$$Ind_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \textit{número total de ceros de } f \textit{ en } D,$$

donde en este número se incluye la multiplicidad de los ceros.

Demostración. Tenemos que $f(\Gamma)$ es una curva cerrada que por hipótesis no pasa por 0, y que si Γ está parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ entonces $f(\Gamma)$ lo está por $f \circ \gamma$. Luego,

$$Ind_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{f(\Gamma)}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))}f'(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Por otra parte, definamos

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

y sea p un cero de f. Como f es holomorfa, podemos encontrar $r > 0$, $m \geq 1$ y una función $f_0(z)$ holomorfa en $D(p,r)$ tales que para todo $z \in D(p,r)$, $f(z) = (z-p)^m f_0(z)$ con $f_0(p) \neq 0$ (m es la multiplicidad de p). De este modo, para $z \in D(p,r)$ podemos escribir

$$g(z) = \frac{m(z-p)^{m-1}f_0(z) + (z-p)^m f_0'(z)}{(z-p)^m f_0(z)} = \frac{m}{z-p} + \frac{f_0'(z)}{f_0(z)},$$

y en consecuencia p es un polo simple de g y más aún $\mathrm{Res}(g,p) = m$. Repitiendo esto para cada uno de los ceros de f, deducimos del teorema de los residuos que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma g(z)dz = \sum_{p\in D} m_p = \text{ número total de ceros de } f \text{ en } D.$$

□

9.4. Series de Laurent

Una serie de Laurent es una serie de la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k \tag{9.6}$$

donde $a \in \mathcal{C}$ es un punto dado y $(c_k)_k \in \mathcal{Z}$ es una familia de números complejos indexada por los enteros. Observemos que a diferencia de una serie de potencias, en la serie de Laurent intervienen tanto potencias positivas como negativas de $(z-a)$.

Definamos la parte *positiva* y *negativa* de (9.6) mediante

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad N(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k.$$

Observemos que $P(z)$ es una serie de potencias y que $N(z)$ se puede reescribir de la siguiente manera

$$N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}((z-a)^{-1})^k,$$

que es una serie de potencias en la variable $(z-a)^{-1}$.

Dado $z \neq a$ diremos que la serie de Laurent (9.6) converge si $P(z)$ y $N(z)$ convergen.

Teorema 9.4.1. *Sean*

$$R_1 = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|},$$

y

$$R_2 = 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

con la convención $1/0 = \infty$.

Si $R_1 < R_2$ *entonces* $L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ *converge para todo* z *en la región anular*

$$A = \{z \in \mathcal{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$$

y define una función holomorfa en A.

Demostración. Dado $z \in \mathcal{C}$ recordemos que $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ converge si $|z-a| < R_2$ y diverge si $|z-a| > R_2$. Además, si $R_2 > 0$ entonces $P(z)$ es holomorfa en $\{z \in \mathcal{C} : |z-a| < R_2\}$.

Por otro lado observemos que dado $w \in \mathcal{C}$, $g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^k$ converge si

$$|w| < 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}$$

mientras que diverge si $|w| > 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}$. Tomando $w = (z-a)^{-1}$ vemos que $N(z)$ converge si $|z-a| > R_1$ y diverge si $|z-a| < R_1$. En síntesis, la serie de Laurent $L(z)$ converge si $R_1 < |z-a| < R_2$ y diverge si $|z-a| < R_1$ o $|z-a| > R_2$.

Para concluir notemos que si $R_1 < \infty$ entonces $N(z)$ es una función holomorfa en $\{z \in \mathcal{C} : |z-a| > R_1\}$, ya que es la composición de g con la función $z \mapsto (z-a)^{-1}$. Luego $L(z)$ es holomorfa en A. □

Observación. Si $R_1 \geq R_2$ no se puede garantizar la convergencia de la serie de Laurent para ningún $z \in \mathcal{C}$.

Como en el caso de las series de potencias, si $|z-a| = R_1$ o $|z-a| = R_2$ puede o no haber convergencia de la serie de Laurent, lo que dependerá de cada caso particular.

Teorema 9.4.2. *Sean $a \in \mathcal{C}$ un punto dado, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ y A la región definida por*

$$A = \{z \in \mathcal{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}.$$

Si $f\colon A \to \mathcal{C}$ es una función holomorfa, entonces existen constantes $(c_k)_{k\in\mathcal{Z}}$ tales que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad \forall z \in A.$$

Más aún,

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw,$$

para cualquier r tal que $R_1 < r < R_2$, donde $\partial D(a,r)$ está parametrizado en sentido antihorario.

Demostración. Primero observemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw$$

no depende de r. En efecto, sean $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ y usemos la notación $\gamma_1 = \partial D(a,r_1)$, $\gamma_2 = \partial D(a,r_2)$, parametrizadas en sentido antihorario. Entonces por el teorema de Cauchy aplicado a la función $w \mapsto \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}$, que es holomorfa en A, y al camino de la figura

INSERTAR FIGURA

se deduce que

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw = \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}.$$

Consideremos ahora un punto $z \in A$ cualquiera y escojamos r_1 y r_2 de modo que

$$R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2.$$

Por la fórmula de Cauchy en el camino de la figura **REF** obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

El primer término del lado derecho en la fórmula anterior es igual a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}dw\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}dw\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}dw\right)(z-a)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k,
\end{aligned}$$

donde el intercambio $\int\sum=\sum\int$ se justifica exactamente del mismo modo que en la demostración del Teorema 8.2.1, utilizando que para $w\in\gamma_2$

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r_2} < 1.$$

Para la segunda integral tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(w)\cdot\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}dw\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}}dw\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(w)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(w-a)^{k-1}}{(z-a)^{k}}dw\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{-k+1}}dw\right)(z-a)^{-k}\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^k,
\end{aligned}$$

En esta ocasión el intercambio $\int\sum=\sum\int$ se justifica como sigue

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{\gamma_1}\sum_{k=0}^{\infty}(\,\%) - \sum_{k=0}^{N}\oint_{\gamma_1}(\,\%)\right| &= \left|\oint_{\gamma_1}\sum_{k=N+1}^{\infty}(\,\%)\right|\\
&\le 2\pi r_1 \sup_{w\in\gamma_1}\left|\sum_{N+1}^{\infty}\frac{f(w)(w-a)^{k-1}}{(z-a)^k}\right|\\
&\le 2\pi r_1\cdot\sup_{w\in\gamma_1}|f(w)|\cdot\sum_{N+1}^{\infty}\frac{r_1^{k-1}}{|z-a|^k}\\
&\le 2\pi M\sum_{N+1}^{\infty}\left(\frac{r_1}{|z-a|}\right)^k,
\end{aligned}$$

donde $M=\sup_{w\in\gamma_1}|f(w)|$. Notemos que

$$\sum_{N+1}^{\infty}\left(\frac{r_1}{|z-a|}\right)^k \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N\to\infty,$$

ya que se trata de una serie geométrica $\sum a^k$ con $a=r_1/|z-a|<1$. □

Observación. El teorema anterior afirma que f se puede representar por una serie de Laurent en el anillo A. Notemos que la fórmula explícita para los coeficientes en términos de f garantiza que esta representación es única.

Revisemos el concepto de singularidad aislada de una función $f(z)$. Supongamos $p \in \mathcal{C}$ es un punto singular aislado de $f(z)$, es decir, existe un radio $R > 0$ tal que $f \in H(D(p,R) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p. Gracias al Teorema 9.4.2 deducimos que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-p)^k, \quad \forall z \in D(p,R) \setminus \{p\},$$

donde $c_k \in \mathcal{C}$. Podemos afirmar entonces que:

i) si $c_k = 0$ para todo $k < 0$ entonces p es un punto singular evitable,

ii) si existe $m \geq 1$ tal que $c_k = 0$ para todo $k < -m$ pero $c_{-m} \neq 0$ entonces p es un polo de orden m,

iii) en caso contrario el número de índices $k < 0$ para los cuales $c_k \neq 0$ es infinito y a p se le llama una *singularidad esencial*.

El siguiente es un ejemplo de una singularidad esencial.

Ejemplo 9.4.3. *Consideremos $f(z) = e^{1/z}$, $z \in A$ donde $A = \{z \in \mathcal{C} : |z| > 0\}$. Notemos que para $z \neq 0$*

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!}$$

Entonces la serie de Laurent de f en torno a 0 es

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

donde

$$c_k = \begin{cases} 0 & si\ k > 0 \\ \frac{1}{(-k)!} & si\ k \leq 0. \end{cases}$$

Observación. Los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de una función holomorfa dependen crucialmente de cual es el anillo con respecto al cual se hace la expansión. Incluso anillos distintos pero centrados en el mismo punto producen series de Laurent diferentes.

Ejemplo 9.4.4. *Sea $f(z) = \frac{1}{z-i}$ y encontremos su serie de Laurent en los anillos $A_1 = \{z \in \mathcal{C} : |z-1| < \sqrt{2}\}$ y $A_2 = \{z \in \mathcal{C} : |z-1| > \sqrt{2}\}$.*

Primero observemos que efectivamente f es holomorfa en ambos anillos. Si $|z-1| < \sqrt{2}$ utilizando la serie geométrica obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1+1-i} &= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{\frac{z-1}{1-i}+1} \\ &= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{i-1}} \\ &= \frac{1}{1-i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{i-1}\right)^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{(i-1)^{k+1}}, \end{aligned}$$

y la serie converge si $|\frac{z-1}{i-1}| < 1$, *es decir si* $|z-1| < \sqrt{2}$. *Esta es la serie de Laurent de* f *en* A_1.

Si $|z-1| > \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1+1-i} &= \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-i}{z-1}}\\ &= \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{i-1}{z-1}}\\ &= \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{i-1}{z-1}\Big)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i-1)^k}{(z-1)^{k+1}},\end{aligned}$$

lo que corresponde a la serie de Laurent de f *en* A_2.

9.5. Ejercicios

1. Probar que si $f(z) = (e^{kz}-1)/z$ cuando $z \neq 0$ y $f(0) = k$ entonces $f \in H(\mathcal{C})$.
2. Determine los cinco primeros términos de la serie de Laurent de
$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$$
en torno a $z_0 = 0$.
3. Explique por qué el residuo en un polo simple no puede ser 0.
4. Sea $p \in \mathcal{C}$ un polo de $g(z)$ y $h(z)$ y considere $f(z) = g(z) + h(z)$. Pruebe que
$$\mathrm{Res}(f,p) = \mathrm{Res}(g,p) + \mathrm{Res}(h,p).$$
5. Considere una función de la forma
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$
y asuma que $f(z)$ tiene un polo en $p \in \mathcal{C}$ con $g(z)$ y $h(z)$ funciones holomorfas en una vecindad de p. Suponga que
$$g(p) \neq 0,\ h(p) = h'(p) = 0,\ h''(p) \neq 0.$$
Verifique que necesariamente $f(z)$ tiene un polo de orden dos en p y pruebe que
$$\mathrm{Res}(f,p) = \frac{2g'(p)}{h''(p)} - \frac{2}{3}\frac{g'(p)h'''(p)}{h''(p)^2}.$$
6. Calcular
$$\oint_{\gamma^*} f(z)dz$$
con $\gamma(\theta) = e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ para:
   a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ (Resp.: 0).
   b) $f(z) = \frac{(1-e^{2z})}{z^4}$ (Resp.: $\frac{8\pi i}{3}$).
   c) $f(z) = \frac{e^z}{2(z-1)^2}$ (Resp.: $-\pi i e$).

d) $f(z) = \frac{z^2}{(1-z^4)}$ (Resp.: $-\frac{\pi i}{2}$).

7. Encontrar la serie de Laurent de la función indicada en el anillo indicado:

   a) $\frac{1}{z^2+9}$ en $\{z \in \mathcal{C} : |z-4| < 5\}$,

   b) $\frac{1}{z^2+9}$ en $\{z \in \mathcal{C} : |z-4| > 5\}$,

   c) $e^z + e^{1/z}$ en $\{z \in \mathcal{C} : |z| > 0\}$.

Capítulo 10

Evaluación de integrales vía residuos

10.1. Integrales de funciones trigonométricas

Consideremos una integral definida del tipo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{p(cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}{q(cos\theta, \operatorname{sen}\theta)} d\theta, \tag{10.1}$$

donde p y q son polinomios. La resolución de este tipo de integrales mediante el uso de las técnicas del cálculo en $\mathbb{R}$ resulta a menudo bastante engorrosa dado que aparecen cuocientes de polinomios en $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Sin embargo, el uso del teorema de los residuos simplifica de manera sustancial el tratamiento de estas expresiones, como veremos a continuación.

Proponemos el siguiente cambio de variables:

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = e^{i\theta} i d\theta.$$

Notando que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

convertimos el integrando original en un cuociente de polinomios, esta vez en z, de modo que (10.1) se transforma en una integral de contorno en el plano $\mathcal{C}$, la que puede evaluarse utilizando el teorema de los residuos.

Para ilustrar lo anterior, veamos un ejemplo:

Ejemplo 10.1.1. *Calcular*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta}.$$

Solución Utilizando el cambio de variables propuesto, se tiene:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z - z^{-1}}{2i}} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

La fracción

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

tiene como polos simples a las raíces de la ecuación $z^2 + 4iz - 1 = 0$, las que resultan ser

$$\begin{aligned} z_1 &= -i(2+\sqrt{3}), \\ z_2 &= -i(2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Como $|-i(2+\sqrt{3})| = 2+\sqrt{3} > 1$ y $0 < |-i(2-\sqrt{3})| = 2-\sqrt{3} < 1$, sólo z_2 está encerrado por la curva $|z| = 1$. Veamos cuánto vale $\operatorname{Res}(f, z_2)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_2) &= \lim_{z\to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{2}{z + i(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2}{-i(2-\sqrt{3}) + i(2+\sqrt{3})} = \frac{2}{2i\sqrt{3}} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Finalmente, por el teorema de los residuos

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) = 2\pi i \frac{-i}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

El argumento anterior también es válido cuando se integran cocientes de polinomios en $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ para $n > 1$ dado que estos pueden expresarse en términos de sumas de potencias de $z = e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} n\theta &= \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \\ \cos n\theta &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}. \end{aligned}$$

Ilustremos lo anterior mediante un ejemplo:

Ejemplo 10.1.2. *Calcular*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen}\theta} d\theta.$$

Solución Hacemos las sustituciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \\ \cos 2\theta &= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{5 - \frac{2}{i}(z - z^{-1})} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{(z^4+1)dz}{2iz^2(2iz^2 + 5z - 2i)}$$

Es claro que en $z = 0$ tenemos un polo de orden 2. Calculemos las raíces de $2iz^2 + 5z - 2i = 0$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-5 + \sqrt{25 - 4\cdot(2i)\cdot(-2i)}}{4i} = \frac{-5 + \sqrt{25-16}}{4i} = \frac{i}{2} \\ z_2 &= \frac{-5 - \sqrt{25 - 4\cdot(2i)\cdot(-2i)}}{4i} = \frac{-5 - \sqrt{25-16}}{4i} = 2i \end{aligned}$$

Como $|z_1| = \frac{1}{2} < 1$ y $|z_2| = 2 > 1$, sólo nos interesa el residuo R_1 asociado a z_1.
Veamos cuánto vale R_1:

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{z\to\frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{z^4+1}{2iz^2(2iz^2+5z-2i)} \\ &= \lim_{z\to\frac{i}{2}} \frac{z^4+1}{2iz^2 \cdot 2i(z-2i)} \\ &= \frac{(\frac{i}{2})^4+1}{2i(\frac{i}{2})^2 \cdot 2i(\frac{i}{2}-2i)} \\ &= \frac{\frac{17}{16}}{\frac{-3i}{2}} = \frac{17}{16} \cdot \frac{2}{-3i} = \frac{17i}{24}. \end{aligned}$$

Calculemos ahora el residuo R_2 del polo de orden 2 en $z = 0$.

$$\begin{aligned} R_2 &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{z^4+1}{2iz^2 \cdot (2iz^2+5z-2i)} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^4+1}{2iz^2+5z-2i} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{z\to 0} \left[\frac{4z^3(2iz^2+5z-2i) - (z^4+1)(4iz+5)}{(2iz^2+5z-2i)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{5}{(-2i)^2} = \frac{5i}{8} \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de los residuos:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2\pi i(R_1 + R_2) = 2\pi i \left(\frac{17i}{24} + \frac{-5i}{8} \right) = \frac{-\pi}{6}.$$

□

10.2. Integrales impropias sobre dominios no acotados

En esta sección nos interesaremos en el problema de evaluar integrales impropias del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o más generalmente $f : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$. Esta definición para la integral de $-\infty$ a ∞, como el límite cuando $R \to \infty$ de las integrales definidas sobre los intervalos simétricos $[-R, R]$, se conoce como *valor principal de Cauchy* de la integral impropia.

En lo que sigue, supondremos que la función a integrar $f : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ admite una extensión definida sobre todo el plano complejo mediante una función meromorfa(9.2.1), cuya restricción a $\mathbb{R}$ coincide con la función original, y que denotamos simplemente por $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Definamos el *semiplano superior* mediante

$$H = \{z \in \mathcal{C} : Im(z) \geq 0\},$$

cuyo interior está dado por

$$Int(H) = \{z \in \mathcal{C} : Im(z) > 0\}.$$

El siguiente teorema es un primer resultado que permite evaluar una gran variedad de integrales impropias.

Teorema 10.2.1. *Sea $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una función meromorfa en $\mathcal{C}$ y denotemos por P el conjunto de los polos de f. Supongamos que:*
(a) *f no tiene polos en $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{R} \cap P = \emptyset$.*
(b) *f admite un número finito de polos en $Int(H)$, es decir, $Int(H) \cap P$ es un conjunto finito.*
(c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 1$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H,\ |z| \geq M.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in Int(H) \cap P} \operatorname{Res}(f, z).$$

Demostración. Dado $R > 0$, denotemos por C_R el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, tal como se ilustra en la figura 10.1, de modo que su largo es $L(C_R) = \pi R$.

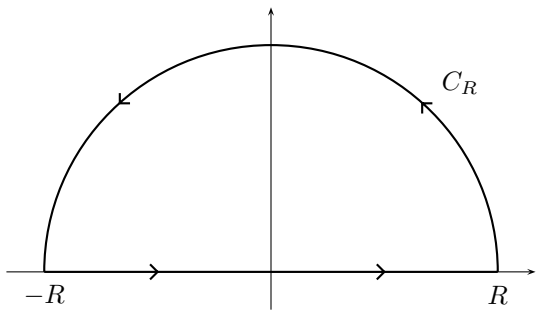


Figura 10.1: Arco de semicircunferencia

Por (a) y (b), para $R > 0$ suficientemente grande el camino C_R no pasa por ningún polo de f y, por (c), tenemos además la siguiente estimación:

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \sup_{z \in C_R} |f(z)| \cdot L(C_R) \leq \frac{K}{|Re^{i\theta}|^p} \pi R = \frac{K\pi}{R^{p-1}}.$$

Como $p > 1$, deducimos que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Por otra parte, aplicando el teorema de los residuos 9.2.2 al camino cerrado y simple dado por $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ para R suficientemente grande de modo tal que Γ_R encierre todos los polos de f en $Int(H)$, se deduce

$$2\pi i \sum_{z \in Int(H) \cap P} = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz.$$

Finalmente, tomando límite cuando $R \to \infty$ se obtiene

$$2\pi i \sum_{z \in Int(H) \cap P} = \lim_{R \to \infty} \left[\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

lo que demuestra el teorema. □

Un caso interesante para el cual es fácil verificar que se tienen las hipótesis del teorema 10.2.1 está dado por el siguiente resultado:

Corolario 10.2.2. *Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que q no tiene ceros reales y además se tiene*

$$grado(q) \geq grado(p) + 2. \tag{10.2}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0,\, Im(z)>0} \text{Res}\left(\frac{p}{q}, z\right)$$

Demostración. Sea la función racional definida por $f(z) = p(z)/q(z)$. Dado que p y q son primos entre sí, los polos de $f(z)$ corresponden a los ceros de q, los que por hipótesis no son reales. Para aplicar el teorema 10.2.1, basta verificar que f satisface la condición de decaimiento (c). Para ver que esto es cierto, denotemos $n = grado(p)$ y $m = grado(q)$ y escribamos

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m} = \frac{z^n(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots a_n)}{z^m(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_{m-1}}{z} + \ldots b_m)}$$

Pero

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| = |a_n|,$$

y similarmente

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^m} \right| = |b_m|.$$

Luego, para $|z|$ suficientemente grande, digamos $|z| \geq M$ para una constante $M > 0$ apropiada, se tiene

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq 2|a_n|$$

y

$$\left| b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^m} \right| \geq \frac{1}{2}|b_m|,$$

de donde se deduce que

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \underbrace{\frac{4|a_n|}{|b_m|}}_{K} \cdot \frac{1}{|z|^p}$$

con $p := m - n \geq 2$ en virtud de (10.2).

□

Ejemplo 10.2.3. *Calcular*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Solución En este caso, el integrando

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

es el cociente de los polinomios

$$p(z) = z^2$$

y

$$q(z) = 1 + z^4$$

evaluados en la variable real x. En primer lugar, la raíz de $p(z)$ es 0 de multiplicidad 2, mientras que las raíces de $q(z)$ están dadas por las soluciones de la ecuación $z^4 = -1$, es decir, por los complejos $e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$, $e^{-i\pi/4}$ y $e^{-i3\pi/4}$, de los cuales ninguno es real y sólo los dos primeros se encuentran en el semiplano superior H. Como $p(z)$ y $q(z)$ no tienen raíces comunes, éstos son primos entre sí y además $grado(q) = 4 = grado(p) + 2$. De este modo, se satisfacen las hipótesis del corolario 10.2.2. Deducimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4}\right) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i3\pi/4}\right).$$

En este caso es fácil ver que $f(z) = (z^2/1 + z^4)$ tiene polos simples en $e^{i\pi/4}$ y $e^{i3\pi/4}$ de modo que los residuos pueden calcularse mediante la fórmula (9.5) para obtener:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4}\right) = \frac{e^{i2\pi/4}}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4},$$

y similarmente

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i3\pi/4}\right) = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \frac{2\pi i}{4}[\cos(\pi/4) + \cos(3\pi/4) - i(\operatorname{sen}(\pi/4) + \operatorname{sen}(3\pi/4))] \\ &= \frac{2\pi i}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - i(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Finalmente, como $f(x) = x^2/(1+x^4)$ es una función par, deducimos que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□

Para estudiar qué ocurre cuando el integrando $f(z)$ admite polos reales, necesitamos el siguiente resultado preliminar.

Proposición 10.2.4. *Sea f meromorfa en un abierto Ω y $a \in \Omega$ un polo simple de f. Sea $C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}$ la parametrización del arco de circunferencia de radio $\varepsilon > 0$ centrado en a cuyos límites son los ángulos θ_1 y θ_2, es decir*

$$C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}(\theta) = a + \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

tal como se ilustra en la figura 10.2.

Entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C^*_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, a).$$

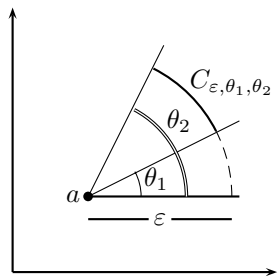


Figura 10.2: Segmento de arco de circunferencia

Demostración. Como f tiene un polo simple en a, entonces en torno a ese punto admite un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k}_{f_1(z)}, \quad |z-a| < \rho,$$

para algún radio $\rho > 0$ suficientemente pequeño y algunos coeficientes $(c_k) \subseteq \mathcal{C}$. Para $0 < \varepsilon < \rho$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} f(z)dz &= c_{-1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta + \underbrace{\int_{C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} f_1(z)dz}_{A_\varepsilon} \\ &= i(\theta_2 - \theta_1)\operatorname{Res}(f,a) + A_\varepsilon\end{aligned}$$

donde

$$|A_\varepsilon| \leq M \cdot L(C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}) = M\varepsilon(\theta_2 - \theta_1),$$

para alguna constante $M > 0$ que acota a $f_1(z)$ en una vecindad del punto a, esta constante existe pues $f_1(z)$ es holomorfa en $D(a,\rho)$. Luego, haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene $A_\varepsilon \to 0$ y se deduce el resultado. □

Teorema 10.2.5. *Sea $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una función meromorfa en $\mathcal{C}$ y denotemos por P el conjunto de los polos de f. Supongamos que:*
(a) *f admite un número finito de polos reales simples, es decir,*

$$\mathbb{R} \cap P = \{a_1, \ldots, a_s\}$$

con a_j polo simple de f.
(b) *f admite un número finito de polos en $Int(H)$, es decir, $Int(H) \cap P$ es un conjunto finito.*
(c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 1$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H,\ |z| \geq M.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in Int(H)\cap P} \operatorname{Res}(f,z) + \pi i \sum_{j=1}^{s} \operatorname{Res}(f,a_j).$$

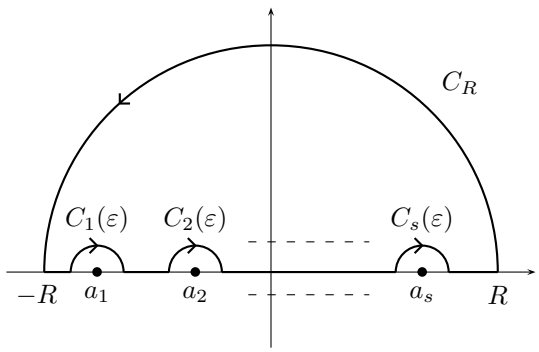


Figura 10.3: Camino que evita los polos reales

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 10.2.1 tomando ahora un camino que evita los polos reales tal como se ilustra en la figura 10.3.

Por el teorema de los residuos, tenemos que para R suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ pequeño:

$$\int_{I(R,\varepsilon)} f(x)dx + \sum_{j=1}^{s} \int_{C_j(\varepsilon)} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in Int(H)\cap P} \operatorname{Res}(f,z), \tag{10.3}$$

donde

$$I(R,\varepsilon) = [-R,R] \setminus \bigcup_{j=1}^{s}]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[,$$

el camino $C_j(\varepsilon)$ es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma_j(t) = a_j + \varepsilon e^{i(\pi - t)}$, $t \in [0,\pi]$ y C_R es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$. Por la proposición 10.2.4

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_j(\varepsilon)} f(z)dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, a_j),$$

y por el mismo argumento que en el teorema 10.2.1,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Luego, haciendo $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$ en (10.3), se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i \sum_{j=1}^{s} \operatorname{Res}(f, a_j) + 0 = 2\pi i \sum_{z \in Int(H)\cap P} \operatorname{Res}(f,z),$$

de donde se sigue el resultado. □

Una consecuencia de este último resultado es el siguiente:

Corolario 10.2.6. *Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que los ceros de q sobre el eje real, de existir, son simples, y se tiene además*

$$grado(q) \geq grado(p) + 2.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0,\ Im(z)>0} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z\right) + \pi i \sum_{q(a)=0,\ a \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, a\right).$$

Por otra parte, cuando se trata de evaluar integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx dx$$

o bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} sx dx$$

para $s > 0$ en general no es posible aplicar directamente los resultados anteriores a las funciones $f(z)\cos sz$ y $f(z)\operatorname{sen} sz$ respectivamente pues estas suelen no satisfacer la condición de decaimiento.

Esto se debe a que, por ejemplo, si explicitamos $\cos sz$ en términos de exponenciales

$$\cos sz = \frac{1}{2}(e^{isz} + e^{-isz}) = \frac{1}{2}(e^{-sy+isx} + e^{sy-isx})$$

vemos que cuando $R \to \infty$, las coordenadas imaginarias y de los puntos $z = x + iy \in C_R$ donde C_R es el arco de semicircunferencia considerado anteriormente (ver figuras 10.1 y 10.3), divergen a ∞ y en consecuencia el término e^{sy} si $s > 0$ crece exponencialmente. Luego, para que $f(z)\cos sz$ satisfaga la condición de decaimiento, la función $f(z)$ debe decaer a 0 más rápido que una exponencial, lo que deja fuera a todas las funciones racionales que se obtienen como cuocientes de polinomios.

Notemos que este inconveniente es consecuencia del término e^{-isz} que aparece en $\cos sz$, pues el otro término $e^{isz} = e^{-sy+isx}$ es muy favorable ya que decae exponencialmente a 0 cuando $y \to \infty$.

Por otra parte, si en lugar de considerar $f(z)\cos sz$ (resp. $f(z)\operatorname{sen} sz$), tomamos $f(z)e^{isz}$, que para una gran variedad de funciones $f(z)$ sí satisface la condición de decaimiento necesaria para que la integral de $f(z)e^{isz}$ sobre C_R tienda a 0 gracias al buen comportameinto de e^{isz}, entonces podemos calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx,$$

lo que resuelve el problema original pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} sx dx.$$

Más precisamente, tenemos el siguiente resultado

Teorema 10.2.7. *Sea $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una función meromorfa en $\mathcal{C}$ y denotemos por P el conjunto de los polos de f. Supongamos que:*
(a) *f no tiene polos en $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{R} \cap P = \emptyset$.*
(b) *f admite un número finito de polos en $Int(H)$, es decir, $Int(H) \cap P$ es un conjunto finito.*
(c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 0$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H,\ |z| \geq M.$$

Entonces, para todo $s > 0$ se tiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{isz}dz = 0, \tag{10.4}$$

donce C_R es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, y en consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{w\in Int(H)\cap P} \operatorname{Res}(e^{isz}f(z), w).$$

Demostración. Una vez verificado (10.4), la demostración es esencialmente la misma que la del teorema 10.2.1. Para probar (10.4), comencemos por acotar la integral para $R > M$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)e^{isz}dz\right| &= \left|\int_0^\pi e^{isRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\right| \\ &\leq \int_0^\pi |e^{isRe^{i\theta}}| \cdot \frac{K}{R^p} Rd\theta \\ &= \frac{KR}{R^p}\int_0^\pi e^{-sR\operatorname{sen}\theta}d\theta = \frac{2KR}{R^p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-sR\operatorname{sen}\theta}d\theta.\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)e^{isz}dz\right| &\leq \frac{2KR}{R^p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2sR}{\pi}\theta}d\theta \\ &= \frac{2KR}{R^p}\left[\frac{-\pi}{2sR}e^{-\frac{2sR}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2KR}{R^p}\frac{\pi}{2sR}\left[1-e^{-sR}\right] \\ &\leq \frac{\pi K}{sR^p}.\end{aligned}$$

Como $p > 0$, se deduce (10.4). □

Observación. En el teorema anterior basta con $p > 0$, a diferencia del teorema 10.2.1 que requiere $p > 1$. Esto se debe a que el buen decaimiento aportado por el término correspondiente a e^{isz} permite ser menos restrictivo sobre la función $f(z)$.

Corolario 10.2.8. *Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que q no tiene ceros reales y además se tiene*

$$grado(q) \geq grado(p) + 1. \tag{10.5}$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0,\ Im(w)>0} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{isz}, w\right).$$

Ejemplo 10.2.9. *Dado $s \geq 0$, calcular*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x^2+a^2}dx, \ a > 0.$$

Solución Definamos $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mediante

$$h(z) = \frac{e^{isz}}{z^2+a^2}$$

Notemos que h es de la forma

$$h(z) = \frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}$$

con $p(z) = 1$ y $q(z) = z^2 + a^2$. Los ceros de $q(z)$ son simples y están dados por $\{ai, -ai\} \not\subseteq \mathbb{R}$. Además, $grado(q) = 2 > 0 + 1 = grado(p) + 1$. Luego, se satisfacen las hipótesis del corolario 10.2.8 y por lo tanto, para el caso $s > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot e^{isx} dx \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(h, ai) = 2\pi i \frac{e^{-sa}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-sa},\end{aligned}$$

pues

$$\operatorname{Res}(h, ai) = \frac{e^{isia}}{2ai} = \frac{e^{-sa}}{2ai}.$$

El caso $s = 0$ se puede calcular directamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

En conclusión, para todo $s \geq 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-sa}.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-sa}$$

y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} sx}{x^2 + a^2} dx = 0.$$

Notemos que esta última identidad es inmediata pues se trata del valor principal de una integral impropia de $-\infty$ a ∞ de un integrando dado por una función impar. □

Para finalizar, enunciemos los resultados análogos al teorema 10.2.5 y al corolario 10.2.6:

Teorema 10.2.10. *Sea $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una función meromorfa en $\mathcal{C}$ y denotemos por P el conjunto de los polos de f. Supongamos que:*
(a) *f admite un número finito de polos reales simples, es decir,*

$$\mathbb{R} \cap P = \{a_1, \ldots, a_s\}$$

con a_j polo simple de f.
(b) *f admite un número finito de polos en $Int(H)$, es decir, $Int(H) \cap P$ es un conjunto finito.*
(c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 0$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H,\ |z| \geq M.$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{w \in Int(H) \cap P} \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, w) + \pi i \sum_{j=1}^{s} \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, a_j).$$

Corolario 10.2.11. *Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que los ceros de q sobre el eje real, de existir, son simples, y se tiene además*

$$grado(q) \geq grado(p) + 1.$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0,\ Im(w)>0} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, w\right) + \pi i \sum_{q(a)=0,\ a\in\mathbb{R}} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, a\right).$$

10.3. Ejercicios

1. Pruebe que:

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \quad a > 1.$

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1-2a\cos 2\theta + a^2} d\theta = \pi \frac{1-a+a^2}{1-a}, \quad 0 < a < 1.$

   c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{\cosh a + \cos\theta} d\theta = 2\pi(-1)^n \frac{e^{-na}}{\operatorname{senh} a}$, $n \geq 0$ es un entero y $a > 0$.

   d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta} d\theta = \frac{\pi}{6}.$

2. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{1+a^2-2a\cos x} dx$$

   con $a \in (0,1)$.

3. Pruebe que:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$

   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$, con $a > 0$.

   c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

   d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = -n\frac{\pi}{4}$, para $n = 0$ y $n = 1$ (considere ambos casos separadamente).

   e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$, $a > 0$.

4. Sea $D = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$ y $f : \overline{D} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. Suponga que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M/|z|^2$ para todo $z \in \overline{D}$, $|z| \geq 1$.

   a) Pruebe que para todo $\theta \in [0, \pi/2]$ se tiene

$$\int_0^\infty f(x)dx = e^{i\theta} \int_0^\infty f(e^{i\theta}x)dx.$$

   b) Utilice lo anterior con $f(z) = \exp(iz)/(1+z)^2$ y $\theta = \pi/2$ para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x)^2}dx + \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{1+x^2}dx = 1.$$

5. Calcule

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{100}+1}$$

6. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}dx = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}[\pi(m+1)/n]},$$

   donde m y n son enteros positivos distintos de cero tales que $n - m \geq 2$. Indicación: puede ser útil considerar un camino como el de la figura 10.4.

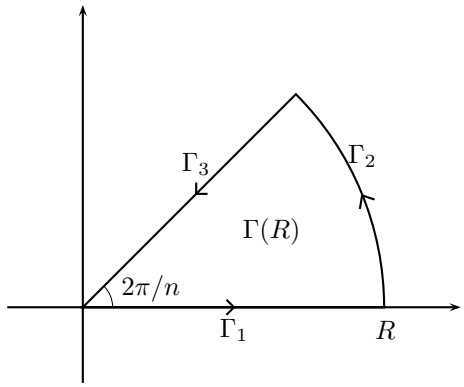


Figura 10.4: Camino cerrado

Capítulo 11

Funciones armónicas de dos variables reales

11.1. Definición

Sea $f = u + iv$ una función holomorfa en un dominio $\Omega \subseteq \mathcal{C}$. Sabemos que entonces $u, v \in C^\infty(\Omega)$ y que, más aún, deben satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{en } \Omega. \tag{11.1}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{en } \Omega.$$

Como, en virtud de la continuidad de las derivadas de orden superior, las derivadas cruzadas de v son iguales, deducimos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Definiendo el operador *Laplaciano*, denotado por Δ, aplicado a una función $w = w(x, y)$ de clase C^2 mediante

$$\Delta w := \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

concluimos que u satisface la *ecuación de Laplace* sobre Ω:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Toda función de clase $C^2(\Omega)$ que satisface esta ecuación se dice que es una *función armónica* en Ω.

De manera análoga a lo realizado con u, se deduce que v también es armónica en Ω. Así, hemos probado:

Proposición 11.1.1. *Si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio Ω entonces u y v son funciones armónicas en Ω, es decir,*

$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad \textit{en } \Omega.$$

11.2. Funciones armónicas conjugadas

Dos funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ se dicen *armónicas conjugadas* en un dominio Ω si la función de variable compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en Ω. En otros términos, $u, v \in C^2(\Omega)$ se dicen armónicas conjugadas ssi u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (11.1), y en particular se tiene $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω. Notemos que *a posteriori* dos funciones armónicas conjugadas son suaves: $u, v \in C^\infty(\Omega)$.

Un problema que surge inmediatamente es la determinación de una función armónica v que sea conjugada a una función armónica u dada.

Ejemplo 11.2.1. Consideremos la función $u(x, y) = xy$. Es directo verificar que u es armónica en $\mathbb{R}^2$. De la segunda ecuación en (11.1), deducimos que si u admite una función armónica conjugada $v = v(x, y)$, ésta debe satisfacer

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x.$$

Luego $v(x, y) = -x^2/2 + g(y)$, para alguna función $y \mapsto g(y)$ por determinar. Para encontrar $g(y)$, imponemos la primera ecuación en (11.1):

$$y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{x^2}{2} + g(y)\Big) = g'(y),$$

de donde concluimos que $g(y) = y^2/2 + C$ para una constante $C \in \mathbb{R}$. De esta forma

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{11.2}$$

Es fácil verificar que, efectivamente, esta última función es armónica en $\mathbb{R}^2$ y, más aún, es conjugada a $u = xy$ para cada valor de $C \in \mathbb{R}$. Tomando por ejemplo $C = 0$, vemos que la función holomorfa $f = u + iv$ correspondiente es $f(z) = xy + i\frac{1}{2}(y^2 - x^2) = -\frac{i}{2}(2ixy + x^2 - y^2) = -\frac{i}{2}z^2$. $\square$

El método empleado en el ejemplo 11.2.1 es general: para encontrar funciones conjugadas a una función u que es armónica en todo $\mathbb{R}^2$, basta con "integrar" las condiciones de Cauchy-Riemann. Sin embargo, cuando el dominio Ω no es todo el plano, puede pasar que no exista una función conjugada si no asuminos una hipótesis adicional sobre la naturaleza del dominio. Para ilustrar esto último, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11.2.2. Sea $\Omega = D(0, 2) \setminus \{0\} = \{z \in \mathcal{C} | 0 < |z| < 2\}$ y consideremos

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

Es directo verificar que u es armónica en Ω. En efecto, derivando se obtiene que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

y así

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)}$$

mientras que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Luego, $\Delta u = 0$ en Ω.

Supongamos que u admite una función armónica conjugada $v = v(x, y)$ en Ω, y definamos la función auxiliar $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(t) = v(\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Como $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ y v está definida en $\Omega = D(0,2) \setminus \{0\}$, la función φ está bien definida. Se tiene que

$$\varphi(0) = v(1,0) = \varphi(2\pi). \tag{11.3}$$

Además, φ es diferenciable con

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\cos t, 0 < t < 2\pi$$

Como u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, deducimos que también se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\cos t \\ &= \frac{2\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} + \frac{2\cos^2 t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Integrando, tenemos que para todo $t \in [0, 2\pi]$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + 2t,$$

luego $\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2 > \varphi(0)$, lo que es imposible en virtud de (11.3). La contradicción proviene de suponer que u admite una función armónica conjugada en Ω.

En conclusión, $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ es armónica en $D(0,2)$ pero <u>no existe</u> una función v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa en $D(0,2) \setminus \{0\}$. $\square$

El problema con el ejemplo 11.2.2 es que el dominio $D(0,2) \setminus \{0\}$ tiene un "hoyo". Recordemos que un abierto no vacío $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ se dice *simplemente conexo* si es conexo y si todo camino cerrado contenido en Ω no encierra puntos fuera de Ω.

Teorema 11.2.3. *Sea u una función armónica en un dominio simplemente conexo Ω. Entonces existe una función v armónica conjugada de u en Ω.*

Demostración. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto arbitrario que permanecerá fijo. Definamos para todo $(x,y) \in \Omega$

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}) \cdot d\vec{r}, \tag{11.4}$$

donde $\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}$ representa la integral sobre un camino cualquiera que va desde (x_0, y_0) a (x,y).

Un camino que une (x_0, y_0) y (x,y) siempre existe en virtud de la conexidad de Ω. La función dada por (11.4) está bien definida pues el valor de la integral no depende del camino escogido. En efecto, si Γ_1 y Γ_2 son dos caminos que unen (x_0, y_0) y (x,y) entonces $\Gamma = \Gamma_1 \cup (\Gamma_2)^-$ es un camino cerrado, el cual sólo encierra puntos de Ω (pues Ω es simplemente conexo). Podemos entonces aplicar el teorema de Green en el plano para deducir que si $D \subset \Omega$ es la región encerrada por Γ entonces

$$\oint_{\Gamma} (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}) \cdot d\vec{r} = \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy = \iint_D \Delta u dxdy = 0, \tag{11.5}$$

donde la última integral se anula pues el integrando es idénticamente 0 (recordemos que u es armónica en Ω). Como, con abuso de notación, se tiene

$$\oint_{\Gamma} = \oint_{\Gamma_1 \cup (\Gamma_2)^-} = \int_{\Gamma_1} + \int_{(\Gamma_2)^-} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2},$$

de (11.5) se deduce que

$$\int_{\Gamma_1} (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}) \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}) \cdot d\vec{r},$$

lo que prueba nuestra afirmación.

La función v definida por (11.4) es continua. Más aún, utilizando caminos adecuados, se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}) \cdot d\vec{r} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h (-\frac{\partial u}{\partial y}(x+t,y))dt.$$

Como las derivadas parciales de u son continuas, se deduce que

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

que es justamente la segunda de las condiciones de Cauchy-Riemann (11.1). Similarmente, se prueba que el par u, v satisface la primera condición en (11.1). Por lo tanto, $v \in C^2(\Omega)$ (pues u lo es) y se deduce que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω, lo que prueba el resultado. □

La fórmula integral (11.4) proporciona una herramienta útil para encontrar una función conjugada v de una función armónica u en un simplemente conexo.

Ejemplo 11.2.1 (continuación). Consideremos la función $u = xy$, que es armónica en $\mathbb{R}^2$. Tomemos $(x_0, y_0) = (0,0)$ y definamos

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-x'dx' + y'dy').$$

Notemos que $v(0,0) = 0$. Como podemos escoger el camino de $(0,0)$ a (x,y), tomamos aquel más simple para la integración. En este caso, como el dominio para u es todo el plano y el integrando es un polinomio en las coordenadas cartesianas, tomamos el camino como la unión de dos segmentos de recta, el primero que une $(0,0)$ con $(x,0)$ (parametrizado por $\vec{r}(x') = (x',0), x' \in [0,x]$) y el segundo que une $(x,0)$ con (x,y) (parametrizado por $\vec{r}(y') = (x,y'), y' \in [0,y']$). Así

$$v(x,y) = \int_0^x -x'dx' + \int_0^y y'dy' = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{y^2-x^2}{2},$$

que no es otra cosa que la función obtenida en (11.2) con $C = 0$. □

11.3. Propiedad de la media y fórmula integral de Poisson

Podemos utilizar la teoría de funciones holomorfas para deducir propiedades de las funciones armónicas. Un ejemplo interesante lo constituye el siguiente resultado.

Proposición 11.3.1. *Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función armónica en un abierto Ω no vacío. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que $D((x_0,y_0),\rho) \subset \Omega$. Entonces, para todo $R \in (0,\rho)$,*

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\operatorname{sen}\theta)d\theta. \tag{11.6}$$

Demostración. En virtud del teorema 11.2.3, u admite una función armónica conjugada v en el disco $D((x_0, y_0), \rho)$, que evidentemente es simplemente conexo. Dado $0 < R < \rho$, podemos aplicar el teorema 8.1.1 a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ para deducir de la fórmula de Cauchy (8.1) con $p = z_0 = x_0 + iy_0$ que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta,$$

o equivalentemente

$$u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(z_0 + Re^{i\theta}) + iv(z_0 + Re^{i\theta})] d\theta.$$

Igualando las partes reales en esta ecuación, obtenemos (11.6). □

La ecuación (11.6) asegura que el valor de la función armónica u en el punto $z_0 = (x_0, y_0)$ es igual a la media de los valores que toma sobre la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio R. En realidad, la fórmula integral de Cauchy (8.1) proporciona más información pues permite evaluar la función holomorfa en todo punto interior al disco $D(z_0, R)$. Tomemos u como en el enunciado de la proposición 11.3.1, y sea $R \in (0, \rho)$ y $f = u + iv$ holomorfa en $D(z_0, \rho)$. De (8.1) se deduce que para todo $z \in D(z_0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Utilizando notación polar $z = z_0 + re^{i\theta}$ (con $r < R$), $w = z_0 + Re^{i\phi}$ de modo tal que $dw = Rie^{i\phi} d\phi$, y $f(r, \theta) = f(z_0 + re^{i\theta})$ (análogo para $f(R, \phi)$), podemos escribir

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}} Rie^{i\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}} \frac{Re^{-i\phi} - re^{-i\theta}}{Re^{-i\phi} - re^{-i\theta}} Re^{i\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)(R^2 - rRe^{i(\phi-\theta)})}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\phi - \theta)} d\phi. \end{aligned}$$

Escribiendo $f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ e igualando las partes reales, obtenemos

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(R,\phi)(R^2 - rR\cos(\phi - \theta)) + v(R,\phi)rR\,\mathrm{sen}(\phi - \theta)}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\phi - \theta)} d\phi.$$

El inconveniente de esta última fórmula es que en el integrando aparece la función armónica conjugada de u. Para tener una fórmula donde sólo intervenga explícitamente u, procedemos como sigue. Comencemos por notar que podemos factorizar el denominador del integrando como

$$R^2 + r^2 - 2rR\cos(\phi - \theta) = (re^{i\phi} - Re^{i\theta})(re^{-i\phi} - Re^{-i\theta}).$$

Entonces, sumando y restando r^2,

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\phi - \theta)} d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)(r^2 - rRe^{i(\phi-\theta)})}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\phi - \theta)} d\phi.$$

Pero $r^2 - rRe^{i(\phi-\theta)} = (re^{-i\phi} - Re^{-i\theta})re^{i\phi}$, y en consecuencia

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)(r^2 - rRe^{i(\phi-\theta)})}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\phi - \theta)} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)}{Re^{i\phi} - (R^2/r)e^{i\theta}} Re^{i\phi} d\phi = \frac{1}{i}\oint_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(w)}{w - \widehat{z}} dw,$$

donde $\widehat{z} = z_0 + (R^2/r)e^{i\theta}$. Como $|\overline{z} - z_0| = r < R$, deducimos que $|\widehat{z} - z_0| > R$. Luego, la función $h(w) = \frac{f(w)}{w - \widehat{z}}$ es holomorfa en $D(z_0, |\widehat{z} - z_0|) \supsetneq D(z_0, R)$ y, en virtud del teorema 7.3.3 de Cauchy-Goursat, deducimos que

$$\oint_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(w)}{w - \widehat{z}} dw = 0.$$

Recapitulando, hemos probado que

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(R,\phi)(R^2-r^2)}{R^2+r^2-2rR\cos(\phi-\theta)}d\phi,$$

de donde se deduce que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(R,\phi)(R^2-r^2)}{R^2+r^2-2rR\cos(\phi-\theta)}d\phi,$$

que se conoce como *fórmula integral de Poisson*. Notemos que cuando $r=0$, se recupera (11.6).

11.4. Ejercicios

1. Verifique que las siguientes funciones son armónicas en todo $\mathbb{R}^2$ y encuentre funciones armónicas conjugadas para cada una de ellas:

   a) $u(x,y) = x^2 - y^2$.

   b) $u(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$.

   c) $u(x,y) = e^x \cos y + x^3 - 3xy^2 + 2y$.

   d) $u(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy$.

2. Suponga que $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ son dos funciones armónicas conjugadas en un dominio Ω. Demuestre que las siguientes funciones son armónicas en Ω:

   a) $f(x,y) = u(x,y)v(x,y)$.

   b) $g(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y)$.

   c) $h(x,y) = \cos u(x,y) \operatorname{senh} v(x,y)$.

3. Calcule el valor de la integral $\int_0^{2\pi} \cos(\operatorname{sen}\theta)\cosh(\cos\theta)d\theta$.

Parte III

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Capítulo 12

Ecuaciones lineales de segundo orden

12.1. Ecuaciones parabólicas y fenómenos de difusión

12.1.1. Conducción del calor en una barra unidimensional

Consideraremos el problema de la difusión de calor en una barra delgada que se encuentra perfectamente aislada por su superficie lateral.

Si la barra es lo suficientemente delgada como para suponer que la temperatura es constante sobre cualquier sección transversal, el estado del sistema está descrito por una función escalar $u = u(t, x)$, la cual proporciona el valor de la temperatura de la barra al instante t y en la posición longitudinal x.

Supondremos que $u(t, x)$ y todas las otras funciones que utilizaremos son tan regulares como sea necesario para que ciertas expresiones que involucran sus derivadas estén bien definidas.

Es bien sabido que, en un cuerpo térmicamente conductor, el calor fluye desde las zonas de mayor temperatura hacia las de menor temperatura. Más aún, de acuerdo a la ley de Fourier, la rapidez a la cual el calor fluye entre zonas contiguas es proporcional a la diferencia de temperaturas por unidad de longitud, y el factor de proporcionalidad depende de las propiedades conductoras del cuerpo en cuestión.

Así, en el instante t, la rapidez con que el calor Q fluye desde un punto x hacia uno a su derecha, digamos $x+\delta x$ con $\delta x \ll 1$, puede aproximarse por

$$\frac{dQ}{dt} \approx k(x)\frac{u(t,x) - u(t,x+\delta x)}{\delta x},$$

donde $k = k(x) > 0$ es un coeficiente de *conductividad térmica* que depende del material del cual está hecho la barra. En el límite se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} = k(x)\Big(- \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(t,x+\delta x) - u(t,x)}{\delta x}\Big) = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

Notemos que $dQ/dt > 0$ cuando $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) < 0$. Esto es consistente pues si $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) < 0$ entonces la temperatura es (localmente) decreciente, de modo que su valor es menor a la derecha del punto x, y por lo tanto el calor fluye hacia la derecha. Análogamente, si $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) > 0$ entonces el valor de la temperatura es mayor a la derecha del punto x, y por lo tanto el calor fluye hacia la izquierda, esto es, $dQ/dt < 0$.

Sea (x_1, x_2), con $x_1 < x_2$, un intervalo de observación correspondiente a una sección longitudinal de la barra. Sea (t_1, t_2), con $t_1 < t_2$, un intervalo correspondiente a un lapso de tiempo. Como la barra está térmicamente aislada por su superficie lateral, el intercambio de calor sólo ocurre a través de los puntos extremos x_1 y x_2 del intervalo (x_1, x_2). En virtud de lo anterior, la <u>cantidad neta de calor Q_1 que entra</u> a la sección (x_1, x_2) en el lapso (t_1, t_2) está dada por

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} [-k(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_1) + k(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_2)]dt.$$

Pero, usando el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir

$$k(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_2) - k(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\Big[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Big]dx,$$

y en consecuencia

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\Big[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Big]dxdt.$$

Al interior de la barra puede haber una *fuente de calor*, cuya tasa de producción de calor por unidad de tiempo y de longitud está dada por una función $F = F(t,x)$. Por lo tanto, la cantidad neta de calor producida en el segmento (x_1, x_2) durante el lapso (t_1, t_2) está dada por

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(t,x)dxdt.$$

Por otra parte, la cantidad de calor que entra al segmento (x_1, x_2), junto con el que se produce en su interior, provocará un cambio en la distribución de temperatura sobre dicho segmento en el lapso de tiempo que va de t_1 a t_2. La cantidad de calor por unidad de longitud necesaria para un cambio $\delta u = u(t_2, x) - u(t_1, x)$ de la temperatura en el punto x está dada por

$$c(x)[u(t_2,x) - u(t_1,x)],$$

donde el factor de proporcionalidad $c = c(x) > 0$ es la *capacidad calorífica específica*[1]. Luego, la cantidad de calor total necesaria para el cambio de temperatura en el segmento (x_1, x_2) es

$$Q_3 = \int_{x_1}^{x_2} c(x)[u(t_2,x) - u(t_1,x)]dx = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dtdx,$$

y éste debe ser igual a la cantidad neta de calor que entra y que se produce en el segmento (x_1, x_2) durante el lapso (t_1, t_2), esto es,

$$Q_3 = Q_1 + Q_2.$$

Más explícitamente,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} c(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Big[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Big] + F(t,x)\right]dxdt.$$

De la arbitrariedad de los puntos $x_1 < x_2$ y $t_1 < t_2$, un argumento clásico de localización[2] permite concluir que $u = u(t,x)$ necesariamente satisface la ecuación en derivadas parciales

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big] + F(t,x).$$

Si la barra es de material *homogéneo*, es decir, $k(x) = k$ y $c(x) = c$ se obtiene

$$u_t = \alpha u_{xx} + f(t,x), \tag{12.1}$$

donde $\alpha = k/c$, $f = F/c$, y, con el fin de simplificar la notación, hemos utilizado las notaciones

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t},\ u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Al coeficiente $\alpha > 0$ se le llama *difusividad térmica* del material.

[1] Densidad de capacidad calorífica por unidad de longitud.

[2] Por ejemplo, considere t_2 y x_2 como variables y derive la expresión con respecto a t_2 y x_2 sucesivamente, "eliminando" así la integral temporal primero y la espacial después.

12.1.2. Conducción del calor en un cuerpo

En esta sección deduciremos la ecuación del calor en el caso general de un material ocupando una cierta región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, que suponemos abierta y no vacía. Denotemos por $u(t, x, y, z)$ la temperatura del material en el punto $(x, y, z) \in \Omega$ y el tiempo t. Supondremos que la función

$$u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

es suficientemente regular.

Un modelo sencillo pero válido en muchas situaciones, conocido como la ley de Fourier, supone que la cantidad de calor δQ que atraviesa un elemento de superficie δA orientada según el campo de normales $\hat{n}$, en un lapso de tiempo δt viene dado por

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -k\, \nabla u \cdot \hat{n}\, \delta A,$$

donde

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix},$$

es decir ∇u es el gradiente de u con respecto a las variables espaciales. $k > 0$ denota el coeficiente de conducción térmica del material. Observemos que dado que k es positivo, el calor fluye de zonas de alta temperatura a zonas de baja temperatura, pues $-\nabla u$ es la dirección de máximo descenso de la función u.

DIBUJO?

Sea $\omega \subset\subset \Omega$, es decir, $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega \subset \Omega$, y realicemos un balance de calor en esta zona, suponiendo inicialmente que no hay fuentes de calor dentro del cuerpo. De acuerdo a la ley de Fourier, la cantidad de calor que fluye a través de la frontera de ω hacia el exterior (flujo neto de calor que sale de ω) viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta t} &= -\iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot \hat{n}\, dA \\ &= -\iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

y haciendo $\delta t \to 0$

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}.$$

Por otra parte existe una relación entre la cantidad de calor q almacenada en en elemento de volumen δV y la temperatura en esta región:

$$q = c\, u\, \rho\, \delta V,$$

donde c es el calor específico y ρ es la densidad del material. Derivando con respecto a t se deduce que la variación de la cantidad de calor por unidad de tiempo en δV es

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t}\, \delta V.$$

De este modo la variación de calor almacenado en ω por unidad de tiempo es

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\omega} \frac{\partial q}{\partial t}\, dV = \iiint_{\omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dV.$$

Si no hay fuentes de calor en Ω entonces la variación de calor en ω por unidad de tiempo es igual a la cantidad de calor que entra en ω por unidad de tiempo. De lo anterior se obtiene

$$\iiint_{\omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = \iint_{\partial\omega} k \nabla u \cdot d\vec{S}.$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\iint_{\partial\omega} k\nabla u \cdot d\vec{S} = \iiint_{\omega} \operatorname{div}(k\nabla u)\, dV,$$

y se deduce que

$$\iiint_{\omega} \Big(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) \Big)\, dV = 0.$$

Esto último es válido para todo $\omega \subset\subset \Omega$. Por un argumento de localización, si todas las funciones en el integrando son continuas, se concluye

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) = 0 \quad \text{sobre } [0,T] \times \Omega,$$

que es la ecuación del calor para un cuerpo general. Si el cuerpo es homogéneo, es decir $c(x,y,z) = c_0$, $\rho(x,y,z) = \rho_0$ y $k(x,y,z) = k_0$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k_0}{c_0\rho_0} \operatorname{div}(\nabla u) = 0.$$

Definiendo $\alpha = \frac{k_0}{c_0\rho_0}$ y recordando que

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

llegamos a la ecuación del calor para un cuerpo homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0 \quad \text{sobre } [0,T] \times \Omega, \tag{12.2}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante. Aquí Δ el operador Laplaciano con respecto a las variables espaciales.

La ecuación del calor se complementa con condiciones de borde adicionales, que serán explicitadas en la sección 12.4.

Cuando en el interior del cuerpo hay fuentes distribuidas generadoras de calor, esto suele modelarse mediante una función densidad por unidad de volumen

$$\begin{aligned} f : [0,T] \times \Omega &\to \mathbb{R}, \\ (t,x,y,z) &\to f(t,x,y,z), \end{aligned}$$

de modo que el calor instantáneo generado en una subregión $\omega \subset \Omega$ está dado por

$$\iiint_{\omega} f(t,\vec{r})\, dV(\vec{r}).$$

Suponiendo que f es continua y retomando lo que se hizo anteriormente, se deduce que

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\nabla u) = f \quad \text{en } [0,T] \times \Omega,$$

en el caso general no homogéneo. En el caso homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = \frac{f}{c_0\rho_0} \quad \text{en } [0,T] \times \Omega.$$

12.1.3. Expansión de un gas en un medio isótropo y homogéneo

Supongamos que una gas ocupa una región porosa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en la cual se mueve de puntos de alta concentración a baja concentración, proceso que se denomina difusión. Denotemos por $u(t,x,y,z)$ la concentración del gas en el instante t y el punto (x,y,z). Entonces bajo la *ley de Nernst* y suponiendo que el material es homogéneo e isotrópico, se puede verificar que u satisface

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \text{en } \Omega, \tag{12.3}$$

donde a es una constante. La ley de Nernst es análoga a la ley de Fourier para la conducción de calor.

12.2. Ecuaciones hiperbólicas y fenómenos oscilatorios

12.2.1. Oscilaciones de una cuerda

Consideremos una cuerda elástica de longitud L sometida a una cierta tensión y cuyo movimiento se confina a un plano. Modelaremos la cuerda como una curva y por simplicidad supondremos que ésta se puede representar en cada instante t como el grafo de una función $u(t,\cdot) : [0,L] \to \mathbb{R}$, es decir, u es una función de dos variables

$$u : [0,T] \times [0,L] \to R.$$

Con el objeto de simplificar la derivación de la ecuación que satisface u haremos los siguientes supuestos:

1. las oscilaciones de la cuerda son pequeñas y cada punto de ésta se mueve verticalmente,
2. la cuerda está sometida a una tensión cuya componente horizontal $\tau > 0$ es constante y uniforme
3. las fuerzas de fricción pueden ser despreciadas,
4. en una primera aproximación despreciaremos el efecto de fuerzas externas como la gravedad.

Dado $x \in (0,L)$ y $\delta x > 0$ denotemos por α el ángulo entre la cuerda y el eje x en el punto $(x, u(x))$ y por α' el ángulo en $(x+\delta x, u(x+\delta x))$. Llamemos τ_1 a la tensión de la cuerda en $(x, u(x))$ y τ_2 a la tensión en $(x+\delta x, u(x+\delta x))$. Realicemos un balance de fuerza en el segmento de cuerda correspondiente a $(x, x+\delta x)$. Como suponemos que el movimiento de la cuerda es vertical no hay aceleración horizontal, es decir

$$\tau_1 \cos\alpha = \tau_2 \cos\alpha' = \tau. \tag{12.4}$$

Por otro lado, en la dirección vertical

$$\tau_2 \sin\alpha' - \tau_1 \sin\alpha = \rho\, \delta l\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde ρ es la densidad lineal de masa de la cuerda, que supondremos constantes, y δl es la longitud de ésta entre x y $x+\delta x$. Dividiendo ambos lados por τ y utilizando (12.4) obtenemos

$$\tan\alpha' - \tan\alpha = \frac{\rho}{\tau}\delta l\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{12.5}$$

Pero $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_x$ y $\tan\alpha' = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\delta x}$, por lo que, dividiendo la ecuación anterior por δx y haciendo $\delta x \to 0$ encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde hemos utilizado $\frac{\delta l}{\delta x} \to 1$ cuando $\delta x \to 1$. Si se quiere incorporar el efecto de fuerzas externas, de manera análoga se puede verificar que u satisface

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(t,x), \tag{12.6}$$

donde $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} > 0$, $F(t,x) = \frac{1}{\tau} f(x,t)$ y $f(x,t)$ es la densidad lineal de fuerzas externas.

Las condiciones adicionales naturales para complementar esta ecuación son de dos tipos:

1. Condiciones iniciales en un instante $t = 0$ que describen la posición y velocidad de la cuerda en cada punto $x \in [0,L]$. Es decir,

   $$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0,L],$$

   y

   $$u_t(0,x) = v_0(x) \quad \forall x \in [0,L].$$

2. Condiciones de borde sobre los puntos 0 y L.

Observemos que a diferencia de las ecuaciones parabólicas, desde un punto de vista físico al menos, es necesario en las ecuaciones hiperbólicas imponer condiciones iniciales sobre u y u_t.

Las condiciones de borde deben reflejar las condiciones físicas a las que está sujeta la cuerda y pueden ser de varios tipos. Por ejemplo, una condición de borde de la forma

$$u(t,0) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

quiere decir que el extremo $x = 0$ de la cuerda está fijo a una altura 0. Otro ejemplo es

$$u_x(t,0) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \tag{12.7}$$

que significa que el extremo $x = 0$ está libre. En efecto, retomando (12.5) con $x = 0$ y si suponemos que la componente vertical de la fuerza neta en $x = 0$ vale cero, vemos que

$$\tau_2 \operatorname{sen} \alpha' = \rho\, \delta l\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Usando que $\tau_2 \operatorname{sen} \alpha' \sim \tau \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{\delta x}$ y haciendo $\delta x \to 0$ resulta (12.7).

Una tercera posibilidad es

$$u(t,0) = \frac{1}{h} u_x(t,0) \quad \forall t \in [0,T] \tag{12.8}$$

que modela la situación en que el extremo $x = 0$ está sujeto a un resorte de constante elástica $k = h\tau$. En esta situación

$$\tau_2 \operatorname{sen} \alpha - (\text{fuerza ejercida por el resorte en } x = 0) = \rho\, \delta l\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

es decir

$$\tau_2 \operatorname{sen} \alpha - ku|_{x=0} = \rho\, \delta l\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Nuevamente, haciendo $\delta x \to 0$ encontramos (12.8)

12.2.2. Oscilaciones de una membrana

El caso de las oscilaciones de una membrana es muy similar al de las oscilaciones de una cuerda. Veamos brevemente cómo encontrar la EDP en esta situación.

La membrana se modela como una superficie en $\mathbb{R}^3$ y por simplicidad supondremos que esta superficie se puede representar mediante una función

$$u(t,x,y) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R},$$

de modo tal que en cada instante t la membrana corresponde a la superficie parametrizada por $(x,y) \mapsto u(t,x,y)$. Nuevamente suponemos

1. las oscilaciones de la membrana son pequeñas y cada punto de ésta se mueve verticalmente,
2. la membrana está sometida a una tensión superficial $\tau > 0$ constante y uniforme
3. las fuerzas de fricción pueden ser despreciadas,
4. en una primera aproximación despreciaremos el efecto de fuerzas externas como la gravedad.

Sean $(x, y) \in \Omega$ y $\delta x > 0$, $\delta y > 0$. Estudiemos las fuerzas que actúan sobre la porción de la membrana sobre el cuadrado $[x, x + \delta x] \times [y, y + \delta y]$. Haciendo un balance de las fuerzas verticales y utilizando las mismas aproximaciones que en la sección 12.2.1 podemos escribir

$$\text{(contribución de las aristas paralelas al eje } x) = \tau \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y+\delta y} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y} \right)$$
$$\text{(contribución de las aristas paralelas al eje } y) = \tau \delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x} \right)$$

Luego por la ley de Newton

$$\rho \delta x \delta y \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y+\delta y} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y} \right) + \tau \delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x} \right),$$

donde ρ es la densidad superficial de masa. Dividiendo por $\delta x \delta y$ y haciendo $\delta x \to 0$ y $\delta y \to 0$ encontramos

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = c^2 \Delta u$$

donde $c = \sqrt{\tau/\rho}$ y $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ es el Laplaciano de u con respecto a las coordenadas espaciales.

Si hay fuerzas externas actuando en la membrana, análogamente se encuentra

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + F(t, x, y) \tag{12.9}$$

donde $F(t, x, y) = \frac{1}{\tau} f(t, x, y)$ y $f(t, x, y)$ es la densidad superficial de fuerzas externas actuando sobre la membrana.

12.2.3. Vibraciones longitudinales de una barra

Consideremos una barra delgada de un material elástico de longitud L y supongamos que el origen está ubicado en uno de los extremos. Las deformaciones longitudinales de esta barra las describimos mediante una función $u : [0, L] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ de modo tal que si una partícula que ocupa inicialmente (en una situación de equilibrio) la posición $x \in [0, L]$, en el instante t se sitúa en $x + u(x, t)$.

Modelando la barra como una familia de N resortes con masas y constantes elásticas idénticas, y luego considerando $N \to \infty$, es posible deducir que u satisface la siguiente EDP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) \quad x \in (0, L),\ t \in (0, T),$$

donde $c > 0$ depende de las propiedades de la barra (densidad de masa y constante elástica), y f es (excepto por una constante) una densidad lineal de fuerzas externas.

12.3. Ecuaciones elípticas y fenómenos estacionarios

12.3.1. Membrana en reposo

Retomando la sección 12.2.2, si la membrana está en reposo de (12.9) vemos que la función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ debe satisfacer la ecuación

$$\Delta u + F(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{12.10}$$

que se conoce como la *ecuación de Poisson*.

En el caso particular cuando $F = 0$, se obtiene la *ecuación de Laplace*

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega. \tag{12.11}$$

Una función que es solución de la ecuación de Laplace se dice una función armónica.

12.3.2. Potencial de campo eléctrico

En esta sección escribiremos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. El campo eléctrico generado por una cantidad finita de cargas q_j con ubicadas en los puntos $\vec{y}_j$ viene dada por

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}_j}{\|\vec{x} - \vec{y}_j\|^3},$$

donde ε_0 la permitividad del vacío.

Es fácil verificar que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ y por lo tanto existe una función escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Cuando las cargas se distribuyen continuamente de acuerdo a una densidad volumétrica $\rho(\vec{y})$ el campo eléctrico en un punto $\vec{x}$ cualquiera se puede escribir

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}\, d\vec{y}. \tag{12.12}$$

Para dar sentido a esta integral supondremos que $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua y que $\rho(\vec{y}) = 0$ si $\|\vec{y}\| \geq R_0$, donde $R_0 > 0$ es una constante. Notemos que se trata de una integral impropia pero convergente (el integrando se indefine en $\vec{y} = \vec{x}$).

El campo eléctrico (12.12) también proviene de un potencial, es decir,

$$\vec{E} = -\nabla\phi. \tag{12.13}$$

Más aún, se puede dar una fórmula *explícita* para ϕ

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}\, d\vec{y}.$$

Sea $\omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto acotado no vacío cuya frontera $\partial\omega$ es una superficie regular. Queremos calcular el flujo de $\vec{E}$ a través de $\partial\omega$, es decir

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\partial\omega} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}\, d\vec{y} \right) d\vec{S}(\vec{x}) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \left(\iint_{\partial\omega} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}\, d\vec{S}(\vec{x}) \right) d\vec{y}.
\end{aligned}$$

Utilizando apropiadamente el teorema de Gauss se puede probar que

$$\iint_{\partial\omega} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}\, d\vec{S}(\vec{x}) = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \vec{y} \in \omega \\ 0 & \text{si } \vec{y} \notin \omega. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\iint_{\partial\omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\omega} \rho(\vec{y})\, d\vec{y}.$$

Aplicando el teorema de la divergencia al campo $\vec{E}$ y recordando (12.13) obtenemos

$$\iiint_{\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\omega} \rho dV = 0$$

es decir

$$\iiint_{\omega} \left(\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \right) dV = 0.$$

Como lo anterior se tiene para todo ω, se concluye que el integrando debe ser nulo, es decir

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \tag{12.14}$$

Notemos que esta ecuación es una Poisson (12.10) y en ausencia de carga ésta última queda como

$$\Delta\phi = 0$$

la cual resulta ser una ecuación de Laplace (12.11).

Hemos visto que estas dos últimas ecuaciones modelan diversos sistemas físicos. Lo que diferencia un problema de otro es el significado físico de las variables y las condiciones iniciales y de bordexs, tema a tratar en la siguiente sección.

12.4. Condiciones iniciales y de borde

En esta sección veremos cómo complementar las ecuaciones en derivadas parciales antes mencionadas, es decir, daremos condiciones que definen y caracterizan los problemas.

En todos los ejemplos anteriores, la situación física se describe mediante una variable de estado o función u que puede ser escalar o vectorial y que depende de variables *espaciales* $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ o 3) y en algunos casos u depende de una variable adicional t que se interpreta como el tiempo. Este es el caso en los problemas que llamamos de evolución como las ecuaciones parabólicas de la sección 12.1 y las hiperbólicas de sección 12.2. En esta situación supondremos que $t \in [t_0, T]$.

Las EDP's se complementan básicamente con dos tipos de condiciones adicionales:

- **Condiciones de borde**

  Estas condiciones aparecen tanto en problemas de evolución como en ecuaciones estacionarias. Hay diversas alternativas según el sistema físico que se esté modelando.

  - Condición de borde tipo <u>Dirichlet</u>

    Supongamos, para fijar ideas, que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y denotemos por $\partial\Omega$ la frontera de este conjunto. De esta forma, en el caso en que u no depende de t la condición de borde de tipo Dirichlet viene dada por

    $$u(x, y, z) = g(x, y, z) \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \partial\Omega$$

    y si u depende de t

    $$u(t, x, y, z) = g(x, y, z) \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \partial\Omega \text{ y todo } t \in [t_0, T],$$

    donde

    $$g : \partial\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{es una función conocida}$$

    En el caso más general g puede depender del tiempo.

  - Condiciones de borde de tipo <u>Neumann</u>

    Las condiciones de este tipo se caracterizan por venir representadas de la forma

    $$\nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(t, \cdot) = h(\cdot) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \forall t \in [t_0, T]$$

    donde $\hat{n}$ representa la normal exterior a Ω y donde $h\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es una función conocida (dato). En un caso más general h puede depender del tiempo.

- Condiciones mixtas

  Esta clase de condiciones vienen caracterizadas por combinaciones de condiciones del tipo Dirichlet y Neumann sobre porciones de la frontera.

- **Condiciones iniciales**

  En lo que respecta a las condiciones iniciales, éstas tienen sentido sólo en problemas de evolución y se dan en un instante t_0 con el objeto de describir el campo tratado (campo de temperaturas, campo eléctrico, etc.) en t_0 sobre todo Ω. La condición inicial viene típicamente dada por algo del tipo

  $$u(t_0, x, y, z) = u_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega,$$

  donde $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ es dato.

  Cabe destacar que habrá que imponer tantas condiciones iniciales como el orden de la derivada temporal de u en la ecuación, es decir, si en la ecuación que describe el proceso estudiado aparece la segunda derivada temporal de u, se tendrá que imponer dos condiciones iniciales. Una de estas será como la antes mencionada y la segunda usualmente tendrá relación con la primera derivada temporal de la función en el instante t_0, por ejemplo

  $$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x, y, z) = v_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

  y así sucesivamente, donde la función v_0 es dato.

Por ejemplo, en el caso de la conducción del calor en una región Ω de $\mathbb{R}^3$ (ver la sección12.1.2), donde u representa la distribución de temperaturas, la condición de borde tipo Dirichlet corresponde al caso en que esta distribución se conoce sobre la frontera del dominio. Por otro lado, en la condición de borde tipo Neumann es el flujo de calor puntual el que constituye un dato. Más precisamente, recordemos que el flujo de calor por unidad de área y tiempo está dado por

$$-k\nabla u \cdot \hat{n} = -k\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = -kh,$$

donde $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es una función conocida y k representa la conductividad térmica.

12.5. Otras ecuaciones de la física

1. Ecuación de Navier-Stokes

   En dinámica de fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto no lineal de ecuaciones en derivadas parciales que rigen el movimiento del fluido en cuestión. Estas se encuentran considerando la masa, el momentum y balances de energía para un elemento de volumen infinitesimal en movimiento, sobre el cual se pueden producir tensiones tangenciales (debido a la viscosidad).

   Sea $\vec{u}(x, y, z, t)$ el campo de velocidades del fluido y $p(x, y, z, t)$ la presión. Luego la ecuación para fluidos compresibles viene dada por

   $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho F - \vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)$$

   donde μ es el coeficiente de viscosidad del fluido, F es la densidad volumétrica de fuerzas externas (por ejemplo la gravedad), ρ es la densidad y $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ es la aceleración del elemento de fluido, también conocida como *derivada material*, la cual viene expresada por

   $$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u},$$

   o por componentes, escribiendo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, la componente i-ésima de $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ viene dada por

   $$\left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right]_i = u_1\frac{\partial u_i}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_i}{\partial y} + u_3\frac{\partial u_i}{\partial z}.$$

En los fluidos incompresibles, la ecuación de continuidad es $\vec{\nabla} \cdot u = 0$, y, por consiguiente la ecuación anterior se reduce a

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho F - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}.$$

2. Ecuación de Schrödinger para una partícula

   En mecánica cuántica existe lo que se denomina la dualidad ente ondas y partículas. La descripción de una partícula viene dada por una función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ que tiene valores en los números complejos, es decir $\Psi(\vec{r}, t) \in \mathcal{C}$ y $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \overline{\Psi}(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$ se interpreta como la función densidad de probabilidad de encontrar la partícula en la posición $\vec{r}$ en el instante t.

   De la teoría de la mecánica cuántica se deduce que la función Ψ debe satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) \tag{12.15}$$

   donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ con h la constante de Planck, m es la masa de la partícula y V es una función que representa el potencial al cual está sometido la partícula. El Laplaciano en esta ecuación es solamente con respecto a las variables espaciales y por eso la notación $\Delta_{\vec{r}}$. Usualmente esta ecuación se acompaña de la condición (probabilística)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \, d\vec{r} = 1.$$

   Notemos que (12.15) representa un sistema de dos ecuaciones reales en derivadas parciales, siendo las incógnitas las partes real e imaginaria de Ψ.

3. Ecuaciones de Maxwell

   En la teoría de electromagnetismo, existen cuatro ecuaciones fundamentales que permiten visualizar lo que sucede con el campo eléctrico $\vec{E}$, el vector desplazamiento $\vec{D}$, el flujo eléctrico $\vec{J}$ y el campo magnético $\vec{B}$. Estas ecuaciones son las ecuaciones de Maxwell, las cuales son

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

   donde μ_0 es una constante (la permeabilidad del vacío). Estas ecuaciones suelen complementarse con leyes constitutivas para formar lo que se denomina un sistema cerrado de ecuaciones.

   Cada una de estas ecuaciones entrega información sobre los campos tratados, por ejemplo de la tercera ecuación se puede concluir que $\vec{B}$ genera $\vec{E}$ (de donde se deduce la ley de inducción). De este set también se puede concluir que las lineas de campo magnético son cerradas, el flujo de $\vec{B}$ es conservativo y así sucesivamente.

12.6. Principio de superposición

Recordemos brevemente la noción del principio de superposición para ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.). Consideremos una E.D.O. lineal descrita por

$$Ly = 0 \quad \text{en un intervalo } I = (a, b)$$

donde $L : C^n(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ es un operador diferencial lineal de orden n. El principio de superposición dice que: "Toda combinación lineal finita de soluciones de una E.D.O. lineal homogénea, es también solución", es decir

$$\forall c_1,\ c_2 \in \mathbb{R},\ \forall y_1, y_2 \in Ker(L) \Rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2 \in Ker(L)$$

o también

$$Ly_i = 0\ \forall i = 1, 2, ..., n\ \Rightarrow L\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = 0$$

La noción de operadores diferenciales lineales es fácilmente extendible al caso de operadores actuando sobre funciones de varias variables, es decir sobre funciones $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Por ejemplo consideremos el operador $L = \Delta$ (Laplaciano) que actúa $L : C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ mediante $Lu = \Delta u$. En este contexto se amplía la teoría y se puede demostrar que el principio de superposición es también válido para las E.D.P.'s lineales.

Al igual que en ecuaciones diferenciales ordinarias las soluciones de una EDP lineal no homogénea se pueden descomponer en una solución de la homogénea y una solución particular.

12.7. La ecuación de superficies mínimas

En esta sección presentamos una deducción de la ecuación de superficies mínimas como un ejemplo de una ecuación no lineal.

La ecuación (12.10) que modela una membrana en reposo se dedujo suponiendo que las deformaciones son pequeñas. Es interesante estudiar la ecuación resultante sin hacer esta hipótesis, lo que por simplicidad haremos en el caso que no hay fuerzas externas. Supondremos que la membrana es elástica, que está en equilibrio de fuerzas y está sometida a una tensión T que es constante. Con el fin de utilizar esta información imaginamos que "cortamos" una parte de la membrana, obteniendo una (pequeña) superficie S cuya frontera ∂S es una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$. Denotemos por $\hat{\tau}$ el vector tangente a ∂S y por $\hat{n}$ el vector normal unitario a S orientado en dirección del eje z. Dado que $(x, y) \mapsto u(t, x, y)$ parametriza S, podemos escribir

$$\hat{n} = \frac{1}{\|\hat{n}\|} \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\|\hat{n}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Orientemos $\hat{\tau}$ de modo que sea consistente con la orientación de S para el teorema de Stokes. De este modo el vector

$$\hat{\tau} \times \hat{n},$$

apunta fuera de S, es perpendicular a $\hat{\tau}$ y tangente a la membrana. Sobre S actúa una fuerza a lo largo de ∂S ejercida por el complemento de ésta que viene dada por

$$T(\hat{\tau} \times \hat{n}).$$

De este modo, la fuerza neta sobre S que le ejerce el resto de la membrana es

$$\vec{F} = \int_{\partial S} T(\hat{\tau} \times \hat{n})\, dr.$$

Sea $\hat{e}$ un vector (constante) unitario en $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\vec{F} \cdot \hat{e} = T \int_{\partial S} (\hat{\tau} \times \hat{n}) \cdot \hat{e}\, dr = T \int_{\partial S} (\hat{n} \times \hat{e}) \cdot \hat{\tau}\, dr.$$

Empleando el teorema de Stokes y la notación

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \hat{e} &= T \iint_S [\vec{\nabla} \times (\hat{n} \times \hat{e})] \cdot \hat{n}\, dA = T \iint_S [(\vec{\nabla} \cdot \hat{e})\hat{n} - (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{e}] \cdot \hat{n}\, dA \\ &= -T \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})(\hat{e} \cdot \hat{n})\, dA = -T\hat{e} \cdot \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n}\, dA.z \end{aligned}$$

Luego

$$\vec{F} = -T \iint_S (\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n}\, dA.$$

Pensando en δS como una pequeña superficie en torno a punto (x_0, y_0, z_0) de área δA, escribamos como $\delta\vec{F}$ la fuerza ejercida por el resto de la membrana sobre δS, esto es

$$\delta\vec{F} = -T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n}\, \delta A + o(\delta A).$$

Si no hay fuerzas externas actuando sobre la membrana, como ésta está en reposo la ley Newton establece que

$$\delta\vec{F} = 0$$

y por lo anterior

$$-T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n}\, \delta A + o(\delta A) = 0.$$

Dividiendo por δA y haciendo $\delta A \to 0$ obtenemos

$$-T(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})\hat{n} = 0.$$

Recordemos que u no depende de z, por lo que

$$-\vec{\nabla} \cdot \hat{n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right),$$

donde

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Luego la ecuación para u queda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) = 0. \tag{12.16}$$

Esta ecuación se conoce también como la *ecuación de superficies mínimas.*

La relación entre la ecuación (12.16) y la ecuación de Laplace (12.11) es que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, se puede aproximar $\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$ por 1, y en este caso (12.16) se reduce a

$$\Delta u = 0.$$

Capítulo 13

Separación de variables y series de Fourier

13.1. Ejemplo modelo: ecuación del calor

Consideremos el problema de difusión de calor en una barra delgada de longitud $L > 0$, compuesta por un material homogéneo e isótropo de coeficiente de difusividad térmica $\alpha > 0$, y que se encuentra perfectamente aislada por su superficie lateral, y sin fuentes de calor externas actuando dentro de la barra, es decir $f(x) = 0$ en (12.1). Tal como se dedujo en la sección 12.1.1, la EDP que modela esta situación es

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad 0 < x < L,\ t > 0. \tag{13.1}$$

La incógnita $u = u(t, x)$ es la temperatura al instante t y en la posición x sobre la barra. Si suponemos que sus extremos se mantienen a temperatura constante igual a 0, entonces u satisface la condición de borde de tipo Dirichlet homogéneo

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad t > 0. \tag{13.2}$$

Consideraremos además la condición inicial

$$u(0, x) = f(x) \quad 0 < x < L. \tag{13.3}$$

Para resolver (13.1) bajo (13.2) y (13.3), aplicaremos el *método de separación de variables*, el que describiremos detalladamente a continuación.

13.1.1. Primera etapa: separar variables

El método se inicia buscando soluciones no triviales de (13.1) que sean de la forma

$$U(t, x) = T(t)X(x). \tag{13.4}$$

Se introducen así dos nuevas incógnitas, $T(t)$ y $X(x)$, y por lo tanto necesitaremos dos ecuaciones para determinarlas. Sustituyendo (13.4) en (13.1), obtenemos

$$T'(t)X(x) = \alpha T(t)X''(x) \quad 0 < x < L,\ t > 0. \tag{13.5}$$

Como sólo nos interesan soluciones no triviales, se requiere que $X(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in (0, L)$. Deducimos de (13.5) que para todo $t > 0$ se tiene

$$T'(t) = \alpha\lambda_1 T(t),$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)}.$$

Similarmente, para todo $x \in (0, L)$ se tiene

$$X''(x) = \lambda_2 X(x),$$

donde

$$\lambda_2 = \frac{T'(t_0)}{\alpha T(t_0)}$$

y $t_0 > 0$ es tal que $T(t_0) \neq 0$. En consecuencia, si ahora tomamos cualquier par (t, x) tal que $T(t) \neq 0$ y $X(x) \neq 0$, lo anterior conduce a

$$\alpha\lambda_1 = \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_2,$$

donde la segunda igualdad proviene de (13.5).

De este modo, se deduce que $T(t)$ y $X(x)$ satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} T'(t) + \alpha\lambda T(t) &= 0, \quad t > 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

para una constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dado un valor para el parámetro λ, se deduce de (13.6) que

$$T(t) = Ce^{-\alpha\lambda t},$$

para una constante $C \in \mathbb{R}$, la cual es no nula pues buscamos soluciones no triviales.

Por otra parte, como aplicación de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, sabemos que la solución general de la ecuación de segundo orden (13.6) se expresa como una combinación lineal de dos funciones fundamentales, cuya forma depende del signo de λ. Más precisamente, como el polinomio característico asociado a (13.6) está dado por $p(m) = m^2 + \lambda$, y éste tiene como raíces[1] $m_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \in \mathcal{C}$, obtenemos que:

- Si $\lambda < 0$ entonces $m_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$, luego la solución general de (13.6) está dada por

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\lambda = 0$ entonces $m = 0$ es raíz de multiplicidad 2, y en consecuencia

$$X(x) = C_1 + C_2 x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\lambda > 0$ entonces $m_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ y por lo tanto

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Observación 13.1.1. Cuando $\lambda \neq 0$, una forma de evitar tener que considerar los casos $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$ por separado consiste en utilizar la función exponencial compleja cuando corresponda. En efecto, supongamos que $\lambda > 0$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x \\ &= C_1(e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x})/2 + C_2(-i)(e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x})/2 \\ &= (C_1 - iC_2)/2e^{i\sqrt{\lambda}x} + (C_1 + iC_2)/2e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= \widetilde{C}_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \widetilde{C}_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}. \end{aligned}$$

[1] Aquí utilizamos la raíz cuadrada en el cuerpo de los complejos.

Como $i\sqrt{\lambda} = \sqrt{-1}\sqrt{\lambda} = \sqrt{-\lambda}$, de lo anterior deducimos que podemos escribir la solución general de la forma

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

donde los coeficientes C_1, C_2 vienen dados por

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \text{ si } \lambda < 0$$
$$C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \text{ si } \lambda > 0$$

y los coeficientes complejos C_1 y C_2 son uno el conjugado del otro. □

Sustituyendo las expresiones así obtenidas para $T(t)$ y $X(x)$ en (13.4), se construyen soluciones de (13.1) en variables separadas que son de la forma

$$U_\lambda(t,x) = e^{-\alpha\lambda t}(C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}), \tag{13.6}$$

cuando[2] $\lambda \neq 0$, mientras que para $\lambda = 0$ se tiene

$$U_0(t,x) = C_1 + C_2 x.$$

Notemos que tenemos dos tipos de grados de libertad: el primero asociado al parámetro λ; el segundo, a los coeficientes C_1, C_2. Como veremos más adelante, esta suerte de "indeterminación"de la solución, que se debe a que hasta ahora sólo hemos utilizado la ecuación (13.1), nos permitirá imponer la condición de borde (13.2) y la inicial (13.3) a combinaciones lineales de soluciones de este tipo.

13.1.2. Segunda etapa: imponer condiciones de borde

A continuación buscaremos soluciones no triviales de (13.1) en variables separadas que satisfagan la condición de borde (13.2). Esto restringirá los valores admisibles para λ a un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$.

En primer lugar, observamos que si λ es el parámetro introducido anteriormente entonces el caso $\lambda = 0$ queda descartado. En efecto, tomando $U_0(t,x) = C_1 + C_2 x$, deducimos de $U_0(t,0) = 0$ que $C_1 = 0$, lo que junto con $U_0(t,L) = 0$ implica que $C_2 = 0$, obteniendo así la solución trivial.

Busquemos entonces $\lambda \neq 0$ de modo tal que exista una función U_λ de la forma (13.6), que no sea idénticamente nula y que satisfaga

$$U_\lambda(t,0) = U_\lambda(t,L) = 0, \ \forall t > 0.$$

De $U_\lambda(t,0) = 0$ deducimos que

$$e^{-\alpha\lambda t}(C_1 + C_2) = 0, \ \forall t > 0,$$

y, como $e^{-\alpha\lambda t} > 0$, se tiene

$$C_2 = -C_1.$$

Luego, para alguna constante $C \in \mathcal{C}$ (más aun C es un imaginario puro, pues C_1 y C_2 eran uno el conjugado del otro y $C_1 = -C_2$), que se supone no nula[3], tenemos

$$U_\lambda(t,x) = Ce^{-\alpha\lambda t}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}), \tag{13.7}$$

e imponiendo $U_\lambda(t,L) = 0$, obtenemos

$$e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0. \tag{13.8}$$

[2]Cuando $\lambda > 0$, utilizamos la función exponencial compleja y coeficientes complejos.
[3]Recordemos que nos interesan soluciones no triviales.

Esta última relación debe interpretarse como una ecuación para λ debido a que $L > 0$ es un dato del problema. Recordando que consideramos la función exponencial de variable compleja cuando $\lambda > 0$ y recordando su periodicidad, (13.8) conduce a

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-\lambda}L} = e^{-\sqrt{-\lambda}L} \Leftrightarrow e^{2\sqrt{-\lambda}L} = 1 &\Leftrightarrow 2\sqrt{-\lambda}L = i2k\pi,\ k \in \mathcal{Z} \\ &\Leftrightarrow \lambda = (k\pi/L)^2,\ k \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Como nos interesa $\lambda \neq 0$ y además las soluciones para k y $-k$ coinciden, basta que k recorra todos los enteros positivos para obtener todos los valores posibles para λ, esto es

$$\lambda_k = (k\pi/L)^2,\ k \in \mathcal{N} \setminus \{0\}, \tag{13.9}$$

y tenemos que las soluciones en variables separadas correspondientes (13.7) son de la forma

$$\begin{aligned} U_{\lambda_k}(t,x) &= C_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t}\left[e^{ik\pi x/L} - e^{-ik\pi x/L}\right] \\ &= C_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} 2i \operatorname{sen}(k\pi x/L) \\ &= A_k \Phi_k(t,x), \end{aligned}$$

como $A_k := 2iC_k$, el cual pertenece a $\mathbb{R}$ pues C_k es un imaginario puro, se tiene

$$\Phi_k(t,x) = e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x/L). \tag{13.10}$$

La figura 13.1 ilustra los casos $k = 1$ y $k = 2$. Hemos obtenido así una familia $\{\Phi_k(t,x)\}_{k\in\mathcal{N}\setminus\{0\}}$ de *soluciones fundamentales* de la ecuación (13.1) que satisfacen la condición de borde (13.2).

En la tercera etapa del método, veremos cómo imponer la condición inicial (13.3).

Observación 13.1.2. Antes de continuar, es interesante observar que lo realizado aquí puede interpretarse como la resolución de un *problema de valores propios del tipo Sturm-Liouville*. En efecto, a partir de lo realizado en la primera etapa del método, deducimos que para que la solución en variables separadas (13.4), supuesta no trivial, satisfaga la condición de borde (13.2) se requiere que

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiendo el operador diferencial lineal

$$\begin{array}{rccc} A: & V & \to & C([0,L]) \\ & f & \mapsto & Af := -\dfrac{d^2 f}{dx^2} \end{array}$$

sobre el espacio vectorial $V = \{f \in C^2(0,L) \cap C([0,L]) \mid f(0) = f(L) = 0\}$, el problema anterior puede escribirse $AX = \lambda X$. Los escalares λ_k dados por (13.9) son los valores propios del operador A, mientras que los espacios propios correspondientes son unidimensionales y están generados por las funciones propias $X_k(x) = \operatorname{sen}(k\pi x/L)$. □

13.1.3. Tercera etapa: imponer la condición inicial

Consideremos ahora la condición inicial (13.3). Para motivar lo que sigue, comencemos por el caso en que

$$f(x) = A \operatorname{sen}(k_0 \pi x/L) \tag{13.11}$$

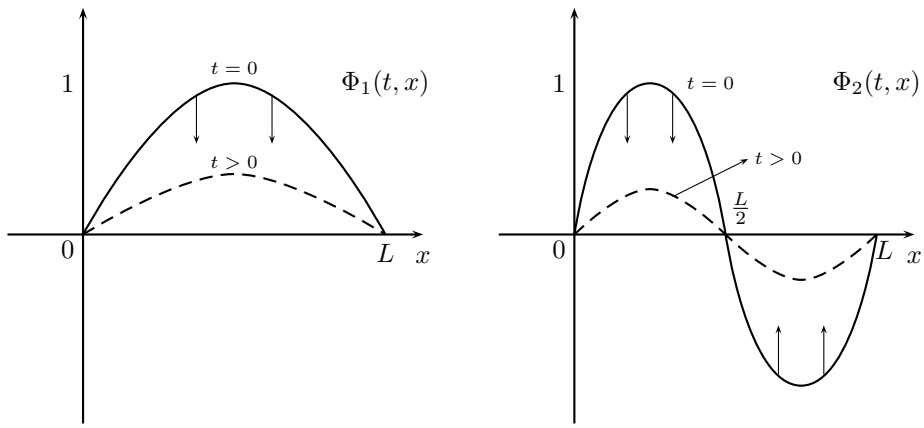


Figura 13.1: Dos soluciones fundamentales de la ecuación del calor

para algún par de constantes $A \in \mathbb{R}$ y $k_0 \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Dado que la k-ésima solución fundamental (13.10) satisface $\Phi_k(0,x) = \operatorname{sen}(k\pi x/L)$, entonces es directo ver que la solución de (13.1)-(13.3) correspondiente a (13.11) es

$$u(t,x) = A\Phi_{k_0}(t,x) = Ae^{-\alpha(k_0\pi/L)^2 t}\operatorname{sen}(k_0\pi x/L).$$

Más generalmente, si

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i \operatorname{sen}(k_i\pi x/L)$$

para ciertas constantes $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ y $0 < k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_m$, entonces la solución buscada es

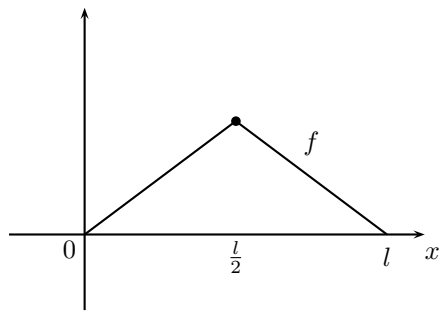
$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{m} A_i\Phi_{k_i}(t,x) = \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t}\operatorname{sen}(k_i\pi x/L).$$

En efecto, de acuerdo al principio de superposición (ver sección 12.6), la linealidad de (13.1) implica que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución de (13.1). Además, como cada solución fundamental satisface la condición de borde (13.2), sus combinaciones lineales también la satisfacen:

$$\begin{aligned} u(t,0) &= \sum_{i=1}^{m} A_i\Phi_{k_i}(t,0) = \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t}\operatorname{sen}(0) = 0, \\ u(t,L) &= \sum_{i=1}^{m} A_i\Phi_{k_i}(t,L) = \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\alpha(k_i\pi/L)^2 t}\operatorname{sen}(k_i\pi) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, es directo verificar que $u(0,x) = f(x)$.

¿Que ocurre para una condición inicial correspondiente a una función $f(x)$ más general? Por ejemplo, como proceder si $f(x)$ no tiene descomposición como suma finita de senos y cosenos, como la función siguiente



La idea es escribir $f(x)$ de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(k\pi x/L) \tag{13.12}$$

y tomar como solución de nuestro problema a la función

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_k(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha(k\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x/L)$$

Surgen varias preguntas

1. ¿Cuándo es posible descomponer una función $f(x)$ como en (13.12)?
2. ¿Cómo se obtienen los coeficientes A_k?
3. ¿Es válido el principio de superposición para combinaciones lineales infinitas?

El objetivo de la siguiente sección es mostrar que todas estas preguntas pueden responderse afirmativamente.

13.2. Series de Fourier

Sea $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ una función continua (basta continua por trozos). El método de separación de variables descrito en la sección anterior conduce de forma natural a la siguiente pregunta: ¿Podemos expresar f como una combinación lineal (eventualmente, como una serie infinita) de funciones sinusoidales? Diremos que f admite un desarrollo en *serie de Fourier* en $[-\ell, \ell]$ si existen escalares $a_0, a_1, ...$ y $b_1.b_2, ...$ tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right], \ \forall x \in [-\ell, \ell] \\ &= \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right], \ \forall x \in [-\ell, \ell] \end{aligned}$$

Supongamos que esta igualdad es válida. ¿Cómo se obtienen los coeficientes en términos de $f(x)$? Para responder a ésto, veamos primero la serie de Fourier en forma compleja. Recordemos que

$$\cos\alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}$$

Luego si $f(x)$ admite un desarrollo en serie de Fourier, entonces podemos reescribir este desarrollo como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{\frac{in\pi x}{l}} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{\frac{-in\pi x}{l}} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{-ik\pi x}{l}} \end{aligned} \tag{13.13}$$

donde $C_0 = \frac{a_0}{2}$ y

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{si } k \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

Para determinar los coeficientes complejos, fijamos $k_0 \in \mathcal{N}$, multiplicamos la ecuación (13.13) por $e^{-\frac{ik_0\pi x}{l}}$ e integramos en el intervalo $[-\ell, \ell]$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}}dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\ell}^{\ell} e^{-\frac{ik\pi x}{\ell}} e^{-\frac{ik_0\pi x}{\ell}} dx \\ &= 2\ell C_{k_0} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq k_0}}^{\infty} C_k \int_{-\ell}^{\ell} e^{-\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} dx \end{aligned}$$

pero notemos que para $k \neq k_0$

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{-i(k-k_0)\pi x}{\ell}} = -\frac{\ell}{i(k-k_0)\pi} e^{-\frac{i(k-k_0)\pi x}{\ell}} \Big|_{-\ell}^{\ell} = 0,$$

donde hemos usado la $2\pi i$-periodicidad de la exponencial compleja, y por lo tanto

$$C_{k_0} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{\frac{-ik_0\pi\xi}{\ell}} d\xi$$

Ahora podemos regresar a los coeficientes reales. Primero, es claro que

$$a_0 = 2C_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

Si $n \geq 1$ entonces:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} a_n &= 2\Re(C_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \\ b_n &= -2\,\mathrm{Im}(C_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \end{aligned}$$

Observemos que de las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{in\pi x}{\ell}} e^{-\frac{im\pi x}{\ell}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2\ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

se deducen las correspondientes relaciones

$$\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{\ell}) \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{\ell}) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos(\frac{n\pi x}{\ell}) \cos(\frac{m\pi x}{\ell}) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{\ell}) \cos(\frac{m\pi x}{\ell}) dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathcal{N}$$

Recapitulando, si f es expresable en serie de Fourier entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{ik\pi\xi/\ell} d\xi \right] e^{ik\pi x/\ell} \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \left[\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) d\xi \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right\} \end{aligned}$$

Aunque supusimos que f es continua, en realidad basta que sea integrable para que los coeficientes de Fourier estén bien definidos. Dada una función f integrable en $[-\ell, \ell]$, definamos

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{\ell}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{\ell}),$$

donde los coeficientes se calculan como antes. En general, no se tiene que $f(x) = S_f(x)$, $\forall x \in [-\ell, \ell]$. Desde ya para tener esta propiedad es necesario que $f(\ell) = f(-\ell)$, esto es la 2ℓ-periodicidad de f.

Sin embargo se pueden demostrar las siguientes propiedades:

Sea

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{\pi x}{\ell} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}$$

la serie de Fourier truncada al orden N para $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$.

Propiedad 1. Si f es de cuadrado integrable ($\int_{-\ell}^{\ell} f^2(t)dt < \infty$), y en particular si f es acotada, se tiene $S_N \to f$ en media cuadrática:

$$\int_{-\ell}^{\ell} [f(t) - S_N(t)]^2 dt \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

Propiedad 2. Si f es derivable en $[-\ell, \ell]$, es decir continua en $[-\ell, \ell]$, derivable en $]-\ell, \ell[$, derivable a la derecha en $-\ell$ y a la izquierda en ℓ, entonces S_N converge puntualmente hacia f, salvo en los extremos $\pm\ell$ cuando $f(\ell) \neq f(-\ell)$, es decir

$$\begin{aligned} f(x) &= S_f(x) \quad \forall x \in]-\ell, \ell[\\ S_f(\ell) &= S_f(-\ell) = \frac{1}{2}[f(\ell) + f(-\ell)]. \end{aligned}$$

Propiedad 3. Si f es derivable en $[-\ell,\ell]$ y $f(\ell)=f(-\ell)$ entonces $f=S_f$ en $[-\ell,\ell]$. Si además f' es de cuadrado integrable la convergencia de S_N hacia f es uniforme.

Corolario. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es 2ℓ-periódica de clase $\mathcal{C}^1$ entonces $f=S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_N converge uniformemente hacia f.

Observación 13.2.1. Dadas dos funciones $f,g:[-\ell,\ell]\to\mathcal{C}$ definimos

$$\langle f,g\rangle_{\ell^2}\equiv\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\overline{g}(x)dx$$

Notemos, que dada la definición anterior, se cumple que

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle_{\ell^2}&=\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\overline{f}(x)dx\\&=\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2\,dx\geq 0.\end{aligned}$$

De esta forma tiene sentido definir

$$\begin{aligned}\|f\|_{\ell^2}&\equiv\sqrt{\langle f,f\rangle_{\ell^2}}\\&=\left(\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2\,dx]\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

En el caso de la exponencial compleja de la serie de Fourier

$$\begin{aligned}\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2}&=\left(\int_{-\ell}^{\ell}e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}e^{\frac{-ik\pi x}{\ell}}dx\right)^{1/2}\\&=\sqrt{2\ell}\end{aligned}$$

Luego, los coeficientes de Fourier (en su forma compleja) vienen dados por

$$C_k=\frac{1}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2}}\left\langle f,e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\right\rangle_{\ell^2}$$

y por lo tanto, la descomposición de f viene dada por

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\langle f,e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\right\rangle_{\ell^2}}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2}}\cdot\frac{e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}}{\|e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}\|_{\ell^2}}$$

Además, se tiene que para $k\neq j$

$$\begin{aligned}\left\langle e^{\frac{ik\pi x}{\ell}},e^{\frac{ij\pi x}{\ell}}\right\rangle_{\ell^2}&=\int_{-\ell}^{\ell}e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}e^{\frac{ij\pi x}{\ell}}dx\\&=\int_{-\ell}^{\ell}e^{\frac{i(k-j)\pi x}{\ell}}dx\\&=0,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene gracias a la periodicidad de la función exponencial compleja.

Notemos la analogía con $\mathbb{R}^n$ al momento de descomponer un vector $\vec{x}$ en una base ortogonal $\{e_1,\ldots,e_n\}$

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\langle\vec{x},e_k\rangle}{\|e_k\|}\frac{e_k}{\|e_k\|}$$

donde la base cumple

$$\langle e_k, e_j \rangle = 0, \quad \forall k \neq j.$$

Así, la serie de Fourier de f ,en forma compleja, se puede interpretar como una descomposición en una base ortogonal de la función exponencial.

Observación importante

Si $g : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ es una función impar, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx &= \int_{-\ell}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\ell} g(x)dx = -\int_{-\ell}^{0} g(-x)dx + \int_{0}^{\ell} g(x)dx \\
&= \int_{0}^{\ell} g(-x)dx + \int_{0}^{\ell} g(x)dx = \int_{0}^{\ell} [g(-x) + g(x)]dx = 0
\end{aligned}$$

luego:

(1) Si f es par entonces $f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{\ell})$ es impar de donde $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$.
Luego $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$.

(2) Si f es impar entonces $f(t)\cos(\frac{n\pi t}{\ell})$ es impar de donde $a_n = 0$, $\forall n \geq 1$.
Luego $S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}$.

En el primer caso f admite un desarrollo en términos de sólo cosenos, mientras que en el segundo aparecen sólo senos.

Ejemplo. Desarrollo en serie de Fourier de $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$. Como f es impar $a_n = 0$ $\forall n \in \mathcal{N}$, de donde $S_f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen} nx$ y los coeficientes b_n vienen dados por

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \; dx = \frac{1}{\pi} - \frac{x}{n}\cos nx|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \frac{\cos nx}{n} dx = -\frac{2}{n}(-1)^n \\
b_1 &= 2, b_2 = \frac{-2}{2}, b_3 = \frac{2}{3}, b_4 = \frac{-2}{4}, \ldots
\end{aligned}$$

Es decir

$$S_f(x) = 2[senx - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \ldots$$

En particular, se deduce

$$\frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2}) = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ...\right],$$

lo que se puede escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo. Serie de Fourier de $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$

Como f es par entonces $\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen} n\pi x dx = 0$, lo que implica que $b_n = 0$.

Luego $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ donde

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} x^2 \cos(n\pi x) dx \\ &= x^2 \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= \frac{-2}{n\pi}\left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx\right] \end{aligned}$$

es decir

$$a_n = \frac{2}{(n\pi)^2}[\cos n\pi + \cos(-n\pi)] = \frac{4}{(n\pi)^2}(-1)^n.$$

En consecuencia

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left[-\cos(\pi x) + \frac{1}{4}\cos(2\pi x) - \frac{1}{9}\cos(3\pi x) + \frac{1}{16}\cos(4\pi x) - \frac{1}{25}\cos(5\pi x) + \dots\right].$$

Un corolario interesante de la fórmula anterior es

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots\right]$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

13.3. Aplicación a la resolución de EDPs

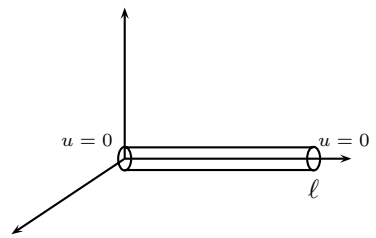
El método de separación de variables consiste en encontrar la solución u de una EDP como superposición de soluciones elementales U_k de la ecuación, es decir $u = \sum \alpha_k U_k$. Los coeficientes α_k se ajustan de manera que u satisfaga las condiciones de borde y/o iniciales.

13.3.1. Ecuación del calor en una barra finita: condiciones de borde de tipo Dirichlet

Retomemos la ecuación del calor para el caso de una barra finita:

$$\begin{array}{lcl} (EC) & u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, 0 \le x \le \ell \\ (CB) & u(0,x) = f(x) & 0 \le x \le \ell \\ (CI) & u(t,0) = u(t,\ell) = 0 & t > 0 \end{array}$$

donde $\alpha > 0$.



Proponemos buscar soluciones elementales en variables separadas: $U(t,x) = T(t)X(x)$

$$(EC) \quad T'(t)X(x) = \alpha T(x)X''(x) \Rightarrow \underbrace{\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{indep. de x}} = \alpha \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{indep. de t}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T'(t)}{T(x)} = \lambda \text{ cte} \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda/\alpha \text{ cte} \end{cases}$$

Se obtienen de este modo las siguientes E.D.O's:

$$\begin{cases} T(t) = ae^{\lambda t} \\ X(x) = be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x} + ce^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} \end{cases}$$

Luego

$$U(t,x) = a \cdot e^{\lambda t}[be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x} + ce^{\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$$

Notemos que la constante a puede ser absorbida en α_k; es por eso que la podemos suprimir de la familia de soluciones $U(t,x)$. Examinemos ahora la condición de borde en $x = 0$

$$(CB) \quad u(t,0) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evaluando, se obtiene $b + c = 0$ equivalentemente $c = -b$. Luego

$$U(t,x) = b \cdot \left[e^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}\right] e^{\lambda t}$$

Análogamente a lo anterior, hemos absorbido en α_k la constante b.

Incorporemos al análisis la otra condición de borde (en $x = \ell$)

$$(CB) \quad u(t,\ell) = 0 \quad \forall t$$

Evaluando, se obtiene $e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} = e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}$, es decir

$$e^{2\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} = 1$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda/\alpha}\ell &= 2k\pi i \quad k \in \mathcal{Z} \\ \frac{\lambda}{\alpha} &= -(\frac{k\pi}{\ell})^2 \\ \lambda &= -\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$U(t,x) = [e^{\frac{k\pi i}{\ell}x} - e^{-\frac{k\pi i}{\ell}x}]e^{-\alpha(\frac{k\pi i}{\ell}x)^2 t} = 2i \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi x}{\ell})^2 t}$$

Donde la constante $2i$ es absorbida en α_k.

De esta forma, se obtiene que para cada $k \in \mathcal{Z}$ se tiene la solución elemental

$$U_k(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) e^{-\alpha(\frac{k\pi x}{\ell})^2 t}$$

Nota: Como $U_{-k}(t,x) = -U_k(t,x)$ basta considerar el conjunto de soluciones elementales tales $U_k(t,x); k = 1,2,3,...$ $(k \in \mathcal{N})$

Cada función U_k satisface (EC) y (CB), de modo que $\sum \alpha_t U_t(t,x)$ también. Solo nos queda ajustar las constantes α_k de manera de satisfacer (CI). Postulamos

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t}$$

Para $t = 0$ se debe tener

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell}$$

por lo cual α_k corresponde al coeficiente de Fourier de la extensión impar $\tilde{f} : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & x \in [0,\ell] \\ -f(x) & x \in [-\ell, 0] \end{cases} \\ \alpha_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} dx \end{aligned}$$

En conclusión

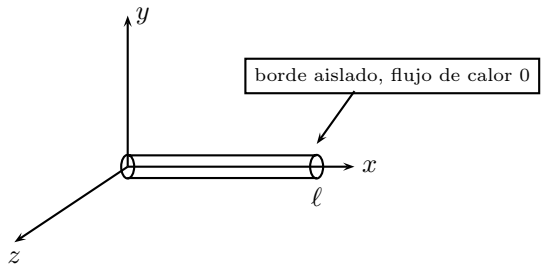
$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{k\pi \xi}{\ell} d\xi \right] \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t}$$

Notemos que $u(t,x) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y que las frecuencias más altas decaen más rápidamente.

13.3.2. Ecuación del calor en una barra finita. Condiciones de borde de tipo Neumann

Analicemos el ejemplo anterior con condición de borde tipo Neumann:

$$\begin{array}{rrcll} (EC) & u_t & = & \alpha u_{xx} & t > 0, 0 < x < \ell \\ (CB) & u_x(t,0) & = & u_x(t,\ell) = 0 & t > 0 \\ (CI) & u(0,x) & = & f(x) & 0 < x < \ell \end{array}$$



Soluciones elementales: Se obtienen de la misma forma que en el caso anterior

$$U(t,x) = T(t)X(x) = ... = e^{\lambda t}\left[ae^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} + be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}\right]$$

$$(CB) \quad u_x(t,0) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evaluando en $x = 0$ se obtiene $a\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} - b\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = 0$, lo que equivale a $\lambda = 0$ o bien $a = b$.
En el primer caso $U_o = cte = 1$, y en el segundo se tiene:

$$U(x,t) = a \cdot e^{\lambda t}\left[e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x}\right]$$

Como se ha hecho en casos anteriores absorbemos a en α_k. Veamos ahora qué pasa con la condición en $x = \ell$

$$(CB) \quad U_x(t,\ell) = 0 \quad \forall t > 0$$

Evaluando en $x = \ell$ se obtiene

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\left[e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell}\right] = 0$$

de donde $\lambda = 0$ (ya visto) o bien $e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell} = e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\ell}$ Desarrollando esto último llegamos a

$$\lambda = -\alpha\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \quad k \in \mathcal{Z}$$

Encontramos así, dado $k \in \mathcal{Z}$, la solución elemental asociada a ese k que se escribe

$$U_k(t,x) = [e^{\frac{k\pi i}{\ell}x} + e^{-\frac{k\pi i}{\ell}x}]e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t} = \cos\frac{k\pi x}{\ell}e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t},$$

donde el factor 2 producido por el coseno es absorbido en forma clásica.
Aplicando el principio de superposición podemos concluir que

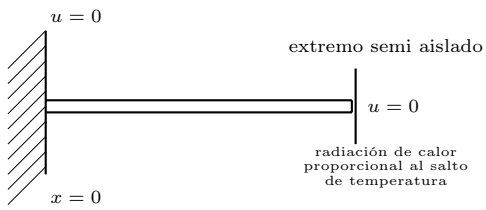
$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi\right]\cos\frac{k\pi x}{\ell}e^{-\alpha(\frac{k\pi}{\ell})^2 t}$$

Para esto último hubo que extender f de forma par sobre $[-\ell,\ell]$.

13.3.3. Ecuación del calor en barra finita. Condiciones mixtas

Veamos la ecuación del calor en el caso con condiciones mixtas, es decir Dirichlet en un extremo y Neumann en el otro:

$$\begin{array}{rrcl} (EC) & u_t & = & \alpha u_{xx} \quad t>0, 0<x<\ell \\ (CI) & u(0,x) & = & f(x) \quad 0<x<\ell \\ (CB) & u(t,0) & = & 0 \quad t>0 \quad \text{temperatura fija} \\ & u_x(t,\ell) & = & -\beta u(t,\ell) \quad t>0 \quad \text{extremo semi-aislado} \end{array}$$



Como antes se obtiene $U(t,x) = e^{\lambda t}\left[ae^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} + be^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}\right]$ y la (CB) $u(t,0)=0 \quad t>0$ implica $a+b=0$ de modo que nos reducimos a

$$U(t,x) = e^{\lambda t}[e^{\sqrt{\lambda/\alpha}x} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}x}]$$

La (CB) en el extremo semi-abierto se escribe

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\left[e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} + e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}\right] = -\beta[e^{\sqrt{\lambda/\alpha}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha}\ell}]$$

Supongamos que $\lambda<0$ (ya que es el único caso interesante de analizar, pues los otros casos entregan soluciones triviales) y definamos $i\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$. Tras el desarrollo correspondiente de las exponenciales se llega a

$$2i\mu\cos\mu\ell = -\beta x i \operatorname{sen}\mu\ell$$

o equivalentemente, tomando $y=\mu\ell$.

$$\frac{y}{\ell}\cos y \quad = \quad -\beta\operatorname{sen} y$$

o bien

$$-\frac{y}{\ell\beta} \quad = \quad \tan y$$

Esta ecuación trascendente entrega una familia de soluciones numerables, digamos $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ la cual se puede encontrar mediante métodos numéricos. Estas se pueden representar como las intersecciones de los gráficos de las funciones $-\frac{y}{l\beta}$ con $\tan y$ (lo que se puede apreciar en el siguiente gráfico).

GRAFICO

Como $y_k \neq k\pi$, los coeficientes α_k no corresponden a los coeficientes de Fourier clásicos, pero para encontrarlos se razona de manera análoga. En efecto

$$u(t,x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k(t,x) \quad \forall t>0,\ 0<x<\ell$$

en particular

$$u(0,x) \;=\; f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(0,x)$$

con

$$U_k(t,x) \;=\; e^{y_k^2/\ell^2 \alpha t}\left[e^{y_k/\ell x} - e^{-y_k/\ell x}\right]$$

Así

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left[e^{y_k/\ell x} - e^{-y_k/\ell x}\right]$$

Como $\frac{y_k}{\ell} = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha}}$ se tiene $y_k \in \mathcal{C}$, y el problema se reduce a encontrar los coeficientes α_k de modo que

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell}$$

Ahora, multiplicando por $\operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell}$ e integrando sobre $[0,\ell]$ (donde supondremos que el intercambio de la sumatoria con la integral es válido) se obtiene

$$\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\ell} \alpha_k \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx$$

Ahora notemos que

$$\int_0^{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} \equiv 0 \quad \forall k \neq j$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx = \alpha_j \int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2 \frac{y_j x}{\ell} dx$$

$$\alpha_j = \frac{\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx}{\int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2 \frac{y_j x}{\ell} dx}$$

Demostración.
Sea $k \neq j$; entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_k x}{\ell} \operatorname{sen} \frac{y_j x}{\ell} dx &= \left.\frac{\operatorname{sen}(y_k - y_j)\frac{x}{\ell}}{2(y_k - y_j)/\ell} - \frac{\operatorname{sen}(y_k + y_j)\frac{x}{\ell}}{2(y_k + y_j)/\ell}\right|_0^{\ell} \\
&= \frac{\ell}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(y_k - y_j)}{y_k - y_j} - \frac{\operatorname{sen}(y_k + y_j)}{y_k + y_j}\right] \\
&= \frac{\ell}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} y_k \cos y_j - \cos y_k \operatorname{sen} y_j}{y_k - y_j} - \frac{\operatorname{sen} y_k \cos y_j + \cos y_k \operatorname{sen} y_j}{y_k + y_j}\right] \\
&= \frac{1}{2\beta}\left[\frac{y_k \cos y_k \cos y_j - y_j \cos y_k \cos y_j}{y_k - y_j} - \frac{y_k \cos y_k \cos y_j + y_j \cos y_k \cos y_j}{y_k + y_j}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

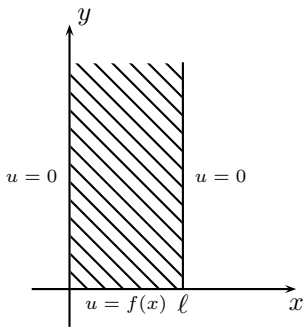


Figura 13.2: Dominio semi-infinito para la ecuación de Laplace

13.3.4. Ecuación de Laplace en banda semi-infinita.

En esta sección consideramos la ecuación de Laplace

$$\begin{array}{rrcl} (EC) & 0 & = & u_{xx} + u_{yy} \quad y > 0, \quad 0 < x < \ell \\ (CB) & u(0,y) & = & u(\ell, y) = 0 \quad y > 0 \\ & u(x,0) & = & f(x) \quad 0 < x < \ell \\ & u(x,\infty) & = & 0 \quad 0 < x < \ell \end{array}$$

en una región como se muestra a continuación **Soluciones elementales:** Las suponemos en variables separadas

$$U(x,y) = X(x)Y(y)$$

Se tiene $X''(x)Y(y) + X(x)Y(y)'' = 0$. Dividiendo por XY se obtiene

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = cte.$$

Esto nos conduce a dos E.D.O's, una para X y otra para Y que resolvemos para llegar a

$$\begin{cases} X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{\sqrt{\lambda}x} \\ Y(y) = ce^{\sqrt{-\lambda}y} + de^{\sqrt{-\lambda}y} \end{cases}$$

Utilizando la condición de borde

$$U(0,y) = 0 \quad \forall y$$

obtenemos $a + b = 0$, de donde

$$X(x) = e^{\sqrt{\lambda x}} - e^{-\sqrt{\lambda x}}$$

Por otro lado

$$U(\ell, y) = 0 \quad \forall y$$

Evaluando se tiene $e^{\sqrt{\lambda}\ell} = e^{-\sqrt{\lambda}\ell}$ que resulta equivalente a $e^{2\sqrt{\lambda}\ell} = 1$. De esto último se desprende que

$$2\sqrt{\lambda}\ell = 2k\pi i \quad k \in \mathcal{Z}$$

Así

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$$

Podemos entonces reescribir las expresiones de $X(x)$ y de $Y(y)$, módulo una constante

$$\begin{cases} X(x) = \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} \\ Y(y) = c \cdot e^{\frac{k\pi}{\ell}y} + d \cdot e^{-\frac{k\pi}{\ell}y} \end{cases}$$

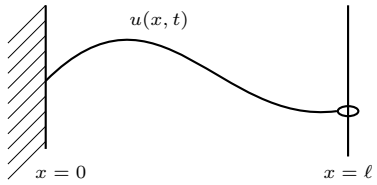


Figura 13.3: Cuerda de largo ℓ con un extremo fijo y el otro libre

De la condición

$$U(x,\infty)=0$$

se desprende que $c=0$, pues de otro modo la solución diverge, cosa que no es aceptable desde el punto de vista de la física. Tenemos que $\forall k\in\mathcal{Z}$

$$U_k(x,y)=e^{\frac{-k\pi y}{\ell}}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{\ell}$$

Luego, en virtud del principio de superposición, la solución tiene la forma

$$u(x,y)=\sum\alpha_k e^{\frac{-k\pi y}{\ell}}sen\frac{k\pi x}{\ell}$$

Ahora bien $u(x,0)=f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{\ell}$, lo que nos permite expresar los coeficientes α_k como

$$\alpha_k=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}f(\xi)\operatorname{sen}\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi$$

Finalmente, obtenemos una fórmula explícita para la solución

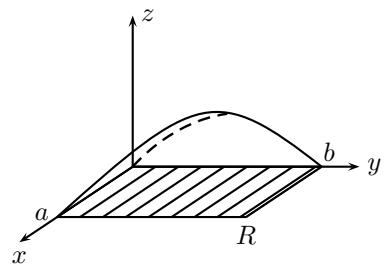
$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}f(\xi)\operatorname{sen}\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi\right]e^{-k\pi y/\ell}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{\ell}$$

Ejercicio. Resolver la ecuación de ondas de una cuerda de largo ℓ con un extremo fijo y el otro libre.

13.3.5. Oscilaciones en una membrana rectangular

Consideremos una membrana rectangular. Como se vio en la sección 12.3.1 la ecuación que modela esta situación es

$$\begin{array}{lcl}
(EO) & u_{tt}=\gamma^2(u_{xx}+u_{yy}) & \text{en } R\subseteq\mathbb{R}^2\\
(CB) & u=0 & \text{sobre } \partial R\\
(CI) & u(0,x,y)=f(x,y) & \text{en } R\\
 & u_t(0,x,y)=g(x,y) & \text{en } R
\end{array}$$



donde la región viene dada por $R = [0, a] \times [0, b]$.

Como antes, separamos variables: $U(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$. Reemplazando, llegamos a

$$T''XY = \gamma^2[TX''Y + TXY''].$$

Dividiendo por XYT se obtiene

$$\frac{T''}{T} = \gamma^2 \left[\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right] \quad 0 < x < a, 0 < y < b, t \in \mathbb{R}_+$$

Como la igualdad anterior es cierta para cualquier valor que tomen las variables x, y y t, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{T''}{T} &= K_0 \\ \frac{X''}{X} &= K_1 \\ \frac{Y''}{Y} &= K_2 \end{aligned}$$

donde K_0, K_1 y K_2, constantes, para las cuales además se satisface la relación $K_0 = \gamma^2(K_1 + K_2)$.

Escribimos las soluciones de las E.D.O's correspondientes

$$\begin{aligned} T(t) &= a_0 e^{\sqrt{K_0}t} + b_0 e^{-\sqrt{K_0}t} \\ X(x) &= a_1 e^{\sqrt{K_1}x} + b_1 e^{-\sqrt{K_1}x} \\ Y(y) &= a_2 e^{\sqrt{K_2}y} + b_2 e^{-\sqrt{K_2}y} \end{aligned}$$

Impongamos las condiciones de borde

$$u(t, 0, y) = 0 \quad \forall t > 0, \forall y \in [0, b]$$

Evaluando obtenemos $a_1 + b_1 = 0$. Por otra parte

$$u(t, a, y) = 0 \quad \forall t > 0, \forall y \in [0, b]$$

Luego, podemos escribir $e^{\sqrt{K_1}a} = e^{-\sqrt{K_1}a}$, que equivale a

$$2\sqrt{K_1}a = 2k_1\pi i, \quad k_1 \in \mathcal{Z}$$

Desarrollando ésto último obtenemos

$$K_1 = -\left(\frac{k_1\pi}{a}\right)^2$$

Llegamos a una expresión para X

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k_1\pi}{a}x\right) \quad k_1 \in \mathcal{Z}$$

Análogamente, utilizando las condiciones

$$\begin{aligned} CB: u(t,x,0) &= 0 \quad \forall t>0, \forall x \in [0,a] \\ u(t,x,b) &= 0 \quad \forall t>0, \forall x \in [0,a] \end{aligned}$$

obtenemos una expresión para Y

$$Y(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{k_2\pi}{b}y\right) \quad k_2 \in \mathcal{Z}$$

Se tiene además

$$K_0 = \gamma^2(K_1+K_2) = -\gamma^2\pi^2\left[\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{b}\right)^2\right]$$

Podemos con esto escribir una solución elemental. En este caso queda parametrizada por k_1 y k_2.

$$U_{k_1,k_2} = \operatorname{sen}\frac{k_1\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{k_2\pi y}{b}[\alpha_{k_1k_2}\operatorname{sen} w_{k_1k_2}t + \beta_{k_1k_2}\cos w_{k_1k_2}t]$$

donde

$$w_{k_1k_2} = \gamma\pi\sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{b}\right)^2}$$

Aplicando el principio de superposición, escribimos la solución general

$$u(t,x,y) = \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{k_1\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{k_2\pi y}{b}[\alpha_{k_1k_2}\operatorname{sen} w_{k_1k_2}t + \beta_{k_1k_2}\cos w_{k_1k_2}t]$$

Los coeficientes $\alpha_{k_1k_2}$ y $\beta_{k_1k_2}$ se ajustan de modo de reproducir las condiciones iniciales (CI):

$$u(0,x,y) = \sum_{k_1k_2}\beta_{k_1k_2}\operatorname{sen}\frac{k_1\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{k_2\pi y}{b} = f(x,y)$$

De este modo

$$\beta_{k_1k_2} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\operatorname{sen}\frac{k_1\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{k_2\pi y}{b}dydx$$

Para la otra condición

$$u_t(0,x,y) = \sum_{k_1k_2}\alpha_{k_1k_2}w_{k_1k_2}\operatorname{sen}\frac{k_1\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{k_2\pi y}{b} = g(x,y)$$

Y el coeficiente $\alpha_{k_1k_2}$ queda entonces determinado por

$$\alpha_{k_1k_2} = \frac{4}{abw_{k_1k_2}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\operatorname{sen}\frac{k_1\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{k_2\pi y}{b}dydx$$

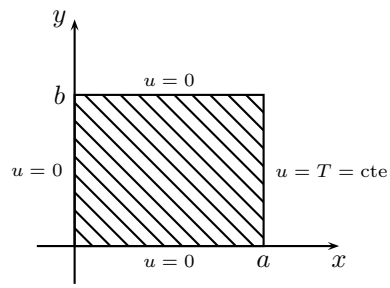


Figura 13.4: Dominio rectangular para la ecuación de Laplace

13.3.6. Ecuación de Laplace en un rectángulo

Analicemos ahora el caso de una membrana rectangular en régimen estacionario, es decir

$$\begin{array}{rrcl} (L) & u_{xx}+u_{yy} & = & 0 \quad 0<x<a, 0<y<b \\ (CB) & u(x,0) & = & u(x,b)=0 \quad 0<x<a \\ & u(0,y) & = & 0 \qquad 0<y<b \\ & u(a,y) & = & T \qquad 0<y<b, \end{array}$$

donde T es una constante.

Separando variables se obtiene $\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda = \text{cte}$. Esto conduce a dos EDO's cuyas soluciones son

$$\begin{cases} Y = ae^{\sqrt{\lambda}y} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ X = ce^{\sqrt{-\lambda}x} + de^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{cases}$$

donde a, b, c y d son constantes a determinar. Imponemos la condición de borde $u(x,0)=0$, la cual nos entrega $a+b=0$. Luego

$$Y(y) = a\left(e^{\sqrt{\lambda}y} - e^{-\sqrt{\lambda}y}\right)$$

Utilizando ahora $u(0,y)=0$, se obtiene $c+d=0$, con lo que se concluye que

$$X(x) = c\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{\sqrt{\lambda}x}\right)$$

Ocupando $u(x,b)=0$, se tiene que $e^{2\sqrt{\lambda}b}=1$, lo que nos lleva a una ecuación para λ

$$\sqrt{\lambda}b = 2k\pi i$$

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$$

Así, se encuentra que

$$Y(y) = 2ai \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

y

$$X(x) = 2c \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b}$$

Luego, escribimos la solución elemental

$$U_k(x,y) = \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

Aplicando el principio de superposición

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{senh} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b}$$

Luego, para calcular las constantes α_k definimos $\overline{T}$ mediante

$$\overline{T}(y) = \begin{cases} T & 0 < y < b \\ -T & -b < y < 0, \end{cases}$$

es decir, $\overline{T}$ es la extensión impar de la función que vale la constante T sobre el intervalo $(0,b)$. Notar que el valor de $\overline{T}$ en 0 no es relevante.

Gracias a la condición de borde

$$u(a,y) = T = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{sen} h \frac{k\pi a}{b} \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b},$$

el coeficiente de Fourier α_k, viene dado por

$$\alpha_k \operatorname{sen} h \frac{k\pi a}{b} = \frac{2T}{b} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{2T}{k\pi}[1-(-1)^k]$$

Finalmente obtenemos

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4T}{(2k-1)\pi \operatorname{senh}[(2k-1)\pi a/b)]} \operatorname{senh}\left((k-1)\frac{\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left((2k-1)\frac{\pi y}{b}\right).$$

13.3.7. Ecuación de ondas. Cuerda finita.

Las oscilaciones de una cuerda elástica vienen descritas por la ecuación

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} &= 0 && 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\ell) &= 0 && t > 0 \\ u(0,x) &= f(x) && 0 < x < \ell \\ u_t(0,x) &= g(x) && 0 < x < \ell \end{aligned} \tag{EO}$$

Separamos variables: $U(t,x) = T(t)X(x)$. Al reemplazar esto en la ecuación se obtiene $T''X = \alpha^2 T X''$, es decir

$$\frac{T''}{T} = \alpha^2 \frac{X''}{X} = cte = \lambda$$

De este modo, una vez más aparecen dos E.D.O's

$$\begin{cases} T'' = \lambda T \\ X'' = \frac{\lambda}{\alpha^2} X \end{cases}$$

cuyas respectivas soluciones son

$$\begin{cases} T(t) = ae^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t} \\ X(x) = ce^{\sqrt{\lambda}x/\alpha} + de^{-\sqrt{\lambda}x/\alpha} \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de borde

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow c + d = 0. \\ u(t,\ell) &= 0 \Rightarrow X(\ell) = 0 \Rightarrow e^{\sqrt{\lambda}\ell/\alpha} - e^{-\lambda\ell/\alpha} = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}\ell/\alpha} = 1 \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda}\ell/\alpha &= 2k\pi i \ \ k \in \mathcal{Z} \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{\alpha k\pi i}{\ell} \ \ k \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

Escribimos la solución elemental

$$U_k(t,\alpha) = \left[ae^{\frac{\alpha k\pi t i}{\ell}} + be^{-\frac{\alpha k\pi t i}{\ell}}\right] \cdot c \cdot \underbrace{\left[e^{\frac{\alpha k\pi x i}{\ell}} - e^{-\frac{\alpha k\pi x i}{\ell}}\right]}_{2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)}$$

Reemplazando y absorbiendo constantes, llegamos a

$$U_k(t,\alpha) = \left[\tilde{a}\cos\frac{\alpha k\pi t}{\ell} + \tilde{b}\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha k\pi t}{\ell}\right]\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{\ell}\ , \quad k \in \mathcal{N}$$

Por el principio de superposición

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos\frac{\alpha k\pi t}{\ell} + b_k\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha k\pi t}{\ell}]\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{\ell}$$

es solución de la ecuación.

Tenemos dos familias de constantes que determinar: a_k y b_k. Para las primeras utilizamos la condición inicial sobre u

$$u(0,x) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{\ell}$$

y obtenemos

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

que corresponde al coeficiente de Fourier de la extensión impar de $f(x)$.

Para encontrar b_k debemos imponemos la condición sobre u_t:

$$u_t(0,x) = g(x)$$

lo que equivale a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k\frac{\alpha k\pi}{\ell}\right)\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{\ell}.$$

De esta relación observamos que $\left(b_k\frac{\alpha k\pi}{\ell}\right)$ debe ser el coeficiente de Fourier de la extensión impar de g, y deducimos que

$$b_k = \frac{2}{\alpha k\pi}\int_0^{\ell} g(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{\ell}dx.$$

Capítulo 14

La transformada de Fourier

14.1. Definición y el teorema de inversión

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Es posible demostrar que en este caso, dado $\ell > 0$, se tiene que para todo $x \in [-\ell, \ell]$

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} C_k e^{i\frac{k\pi x}{\ell}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}$$

donde

$$C_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) e^{-i\frac{k\pi\xi}{\ell}} d\xi, \quad C_k \in \mathcal{C}.$$

¿Qué ocurre cuando $\ell \to +\infty$?

Reescribamos lo anterior de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(y) e^{i(x-y)\frac{k\pi}{\ell}} dy \qquad \forall x \in [-\ell, \ell].$$

Definimos

$$g_{x,\ell}(s) = \int_{-\ell}^{\ell} f(y) e^{i(x-y)s} dy.$$

De esta forma, f se escribe

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{x,\ell}\Big(\frac{k\pi}{\ell}\Big)\frac{\pi}{\ell} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{x,\ell}\Big(\frac{k\pi}{\ell}\Big)\Big[(k+1)\frac{\pi}{\ell} - k\frac{\pi}{\ell}\Big]. \end{aligned}$$

Esta última expresión puede verse como la suma de Riemann de la función $g_{x,\ell}$ sobre $(-\infty, \infty)$ con un paso $\Delta = \frac{\pi}{\ell}$. Es claro que si $\ell \to \infty$ entonces el paso de la partición $\Delta = \frac{\pi}{\ell}$ tiende a cero y que

$$g_{x,\ell}(s) \to g_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i(x-y)s} dy.$$

Bajo ciertas condiciones se puede argumentar entonces que las sumas de Riemann de $g_{x,\ell}$ convergen a la integral $\int_{\infty}^{\infty} g(s)\, ds$. De este modo deducimos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_x(s)\, ds \quad \text{donde} \quad g_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i(x-y)s} dy \tag{14.1}$$

Observación 14.1.1. Lo anterior no se hizo rigurosamente pues las sumas de Riemann corresponden a funciones que dependen de l y **no a una función fija**, sin embargo, dado que $g_{x,l} \to g_x$ cuando $l \to \infty$, este "paso al límite" sí se puede justificar de manera rigurosa.

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(x-y)s}dy\Big]ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys}dy\Big]ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys}dy\Big]ds \end{aligned} \tag{14.2}$$

Definición 14.1.2. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ una función integrable (i.e $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy < \infty$).*

Se define la Transformada de Fourier *de la función f como*

$$\begin{aligned} \hat{f}\colon \mathbb{R} &\to \mathcal{C} \\ s &\to \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys}dy \end{aligned} \tag{14.3}$$

Notación. $Tf(s), \hat{f}(s), \mathcal{F}f(s)$

Motivados por la fórmula (14.2) definimos lo que denominamos la antitransformada de una función g como sigue

Definición 14.1.3. *Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ una función integrable*

Se define así la Antitransformada de Fourier *de g como*

$$\begin{aligned} \check{g}\colon \mathbb{R} &\to \mathcal{C} \\ x &\to \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{ixs}ds \end{aligned} \tag{14.4}$$

Notación. $T^{-1}g(x),\ \check{g}(x),\ \mathcal{F}^{-1}g(x)$

Teorema 14.1.4 (de inversión)**.** *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ una función integrable (y por lo tanto posee transformada de Fourier) y supongamos además que $Tf = \hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ es integrable. Entonces se tiene que si f es continua:*

$$f(x) = T^{-1}\big(Tf\big)(x) = \check{\hat{f}}(x)$$

es decir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys}dy\right]ds \tag{14.5}$$

Corolario 14.1.5. *Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ son continuas e integrables, y $\hat{f} = \hat{g}$, entonces $f = g$.*

Observación. T y T^{-1} son lineales. Esto se desprende directamente de la linealidad de la integral.

14.2. Propiedades fundamentales

14.2.1. La transformada de una derivada

Proposición 14.2.1. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ una función integrable con derivada $f'\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ también integrable (o sea f y f' poseen transformada de Fourier). Entonces*

$$\hat{f'}(s) = is\hat{f}(s) \tag{14.6}$$

Proposición 14.2.2. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ una función integrable, k veces derivable, tal que $f^{(k)}\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ también es integrable, es decir f, f', f'',...., $f^{(k)}$ poseen transformada de Fourier. Entonces*

$$\widehat{f^{(k)}(x)}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

Ejemplo 14.2.3 (Resolución de una EDO)**.** *Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:*

$$3y'' + 2y' + y = f(x), \tag{14.7}$$

donde $f(x)$ es una función conocida.

Aplicamos transformada de Fourier

$$\begin{aligned} 3\widehat{y''} + 2\widehat{y'} + \widehat{y} &= \hat{f}(s) \\ (-3s^2 + 2is + 1)\hat{y}(s) &= \hat{f}(s) \end{aligned}$$

y concluimos que

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1}.$$

Aplicando antitransformada

$$\begin{aligned} y(x) &= T^{-1}(\hat{u}(s)) \\ &= T^{-1}\Big(\frac{\hat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{\hat{f}(s)}{-3s^2 + 2is + 1} ds. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Para una función $f = f(x)$ particular se hace el cálculo explícito de esta integral cuando sea posible.

Observación 14.2.4. *Notar que de la teoría de EDOs lineales sabemos que el espacio de las soluciones de* (14.7) *es de dimensión 2. En otras palabras, en la solución* (14.8) *faltan dos constantes libres. ¿Puede explicar esto?*

14.2.2. El teorema de convolución

Definición 14.2.5. *Dadas f, g integrables, definimos el producto de convolución de f y g mediante*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy$$

Teorema 14.2.6 (de convolución)**.** *Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ funciones integrables. Entonces se cumple que*

$$\widehat{f * g}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)\sqrt{2\pi} \tag{14.9}$$

o bien en forma inversa

$$T^{-1}\big(\hat{f}(s)\hat{g}(s)\big)(x) = (f * g)(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{14.10}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy}(f * g)(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-\xi)g(\xi)d\xi dy \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\xi}g(\xi)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(y-\xi)}f(y-\xi)dy}_{\sqrt{2\pi}\hat{f}(s)}\,d\xi \\ &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)\end{aligned}$$

■

14.2.3. Propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad

$$\widehat{\alpha f+\beta g} = \alpha\hat{f}+\beta\hat{g}$$

- Crecimiento en espacio

$$\widehat{f(x-x_0)}(s) = e^{isx_0}\hat{f}(s)$$

- Crecimiento en frecuencia

$$\widehat{e^{is_0x}f(x)}(s) = \hat{f}(s-s_0)$$

- Modulación

$$\begin{aligned}\widehat{f(x)\cos(w_0x)}(s) &= \frac{1}{2}[\hat{f}(s-w_o)+\hat{f}(s+w_o)] \\ \widehat{f(x)\operatorname{sen}(w_0x)}(s) &= \frac{1}{2i}[\hat{f}(s+w_o)-\hat{f}(s-w_o)]\end{aligned}$$

- Cambio de escala

$$\widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{s}{a}) \quad a\neq 0$$

- Inversión del espacio (o del tiempo)

$$\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$$

- Convolución

$$\widehat{f*g}(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$$

- Derivación

$$\widehat{f'(x)}(s) = is\hat{f}(s)$$

de esto último se deduce que

$$\widehat{f^{(k)}(x)}(s) = (is)^k\hat{f}(s)$$

14.3. Ejemplos de transformadas de Fourier

Ejemplo 14.3.1. *Calcular la transformada de Fourier de*

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Tenemos que $f(x)$ es integrable más aún $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{\pi}$ y es una función positiva. Por definición

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-isx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2-\frac{s^2}{4}}dx \\ &= \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2}dx.\end{aligned}$$

Llamemos I a la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+\frac{is}{2})^2}dx$. Para calcularla consideremos el siguiente camino (ver figura 14.1) y la función definida en el plano complejo $f(z) = e^{-z^2}$ la cual es holomorfa por ser composición de funciones holomorfas. Entonces

$$0 = \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{R}}} e^{-z^2}dz = \sum_{j=1}^{4}\int_{\mathcal{C}_R^j} e^{-z^2}dz.$$

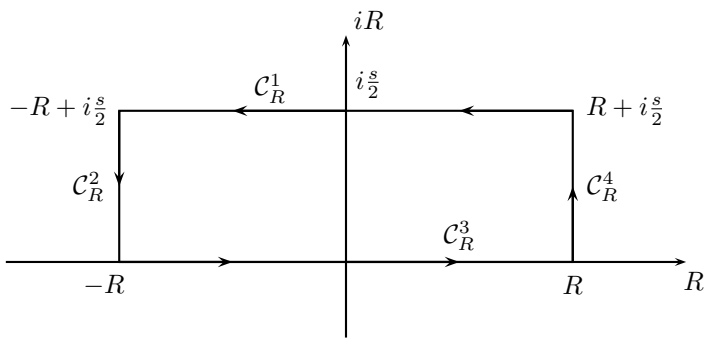


Figura 14.1: Camino de integración para calcular $\widehat{e^{-x^2}}$

Para cada uno de los segmentos de este camino tenemos:

1.
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_R^1} e^{-z^2}dz &= \int_{R}^{-R} e^{-(x+i\frac{s}{2})^2}dx \\ &= -\int_{-R}^{R} e^{-(x+i\frac{s}{2})^2}dx\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_R^2} e^{-z^2}dz &= \int_{\frac{s}{2}}^{0} e^{-(-R+iy)^2}idy \\ &= -i\int_{0}^{\frac{s}{2}} e^{-(-R+iy)^2}dy\end{aligned}$$

3.
$$\int_{\mathcal{C}_R^3} e^{-z^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx$$

4.
$$\int_{\mathcal{C}_R^4} e^{-z^2}dz = i\int_{0}^{\frac{s}{2}} e^{-(R+iy)^2}dy$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_R^2} e^{-z^2}dz + \int_{\mathcal{C}_R^4} e^{-z^2}dz &= i\int_0^{\frac{s}{2}} e^{-(R+iy)^2} - e^{-(-R+iy)^2}dy \\ &= ie^{-R^2}\int_0^{\frac{s}{2}} e^{y^2}\left[e^{-i2Ry} - e^{i2Ry}\right]dy \\ &= 2e^{-R^2}\int_0^{\frac{s}{2}} e^{y^2}\operatorname{sen}(2Ry)dy.\end{aligned}$$

Esta última igualdad implica que

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R^2} e^{-z^2}dz + \int_{\mathcal{C}_R^4} e^{-z^2}dz\right| \leq 2e^{-R^2}\int_0^{\frac{s}{2}} e^{y^2}dy \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Tomando límite cuando $R \to \infty$ en $\oint_{\mathcal{C}_\mathcal{R}} e^{-z^2}dz$ se deduce que

$$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 0$$

y por lo tanto

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{is}{2})^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

En consecuencia

$$\hat{f}(s) = \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}}I = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

Proposición 14.3.2. *Si $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $g(x) = f(ax)$ entonces*

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{s}{a}) \tag{14.11}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}g(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}f(ax)dx\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $y = ax$

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\frac{y}{a}}f(y)\frac{1}{a}dy \\ &= \begin{cases}\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\frac{y}{a}}f(y)dy & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-is\frac{y}{a}}f(y)dy & \text{si } a < 0\end{cases} \\ &= \begin{cases}\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{s}{a}) & \text{si } a > 0 \\ -\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{s}{a}) & \text{si } a < 0\end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{s}{a})\end{aligned}$$

■ **Observación.** Tomando $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $f(x) = e^{-x^2}$ tenemos

$$g(x) = f(ax) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y luego

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \sqrt{2}\hat{f}(\sqrt{2}s)\\ &= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{(\sqrt{2}s)^2}{4}}\\ &= e^{-\frac{s^2}{2}}\end{aligned}$$

Algunas transformadas de Fourier se resumen en la tabla 14.3.

	$f(x)$	$\hat{f}(x)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+is}$
2	$e^{-a\|x\|},\ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+s^2}$
3	$e^{-ax^2},\ a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$
4	$\frac{1}{a^2+x^2},\ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a\|s\|}$
5	$\begin{cases} -k & \|x\| \leq a \\ 0 & \|x\| > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{\operatorname{sen}(as)}{s}$

Cuadro 14.1: Algunas transformadas de Fourier

14.4. Aplicación a la resolución de EDPs

La transformada de Fourier es utilizable para ecuaciones en que una o más variables se mueven sobre dominios infinitos como $\mathbb{R}$ o $[0, \infty)$. Ilustremos el método a través de algunos ejemplos.

14.4.1. Ecuación del calor en una barra infinita

Consideremos la ecuación del calor en una barra infinita

$$\begin{array}{lrll} (EC) & u_t & = \alpha u_{xx} & t > 0, -\infty < x < \infty \\ (CI) & u(0,x) & = f(x) & -\infty < x < \infty \\ (CB) & \int\limits_{-\infty}^{\infty} & |u(t,x)|dx < \infty & t > 0 \end{array}$$

La condición $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ tiene una doble finalidad. Por un lado nos garantiza que $u(t, \cdot)$ posee transformada de Fourier, pero también dice que "$u(t, -\infty) = u(t, \infty) = 0$", es decir, sirve como condición de *borde en infinito*.

Aplicando TF en la variable x a la ecuación EC se obtiene

$$\widehat{u}_t = \alpha\widehat{u_{xx}} = -s^2\alpha\widehat{u}$$

Ahora bien

$$\widehat{u}_t(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(t,s)$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(t,s) = -s^2\alpha\widehat{u}(t,s).$$

Esto conduce a

$$\widehat{u}(t,s) = \widehat{u}(0,s)e^{-s^2\alpha t} = \widehat{f}(s)e^{-s^2\alpha t}$$

y de aquí

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}e^{-s^2\alpha t}\widehat{f}(s)ds.$$

Usando la fórmula de la convolución y le hecho que $T^-1(e^{-s^2\alpha t}) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}}e^{-x^2/4\alpha t}$ deducimos que

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}}e^{-(x-y)^2/4\alpha t}f(y)dy$$

Definamos

$$G(t,x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}e^{-x^2/4\alpha t}$$

que se conoce como la función de Green de la ecuación (EC). Vemos entonces que

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,x-y)f(y)dy.$$

Ejercicio. Probar $u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(s(\xi-x))e^{-s^2\alpha t}d\xi ds$

Interpretación: Notemos que

$$\lim_{t\to 0^+} G(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¡Pareciera que $G(0,x)$ está mal definido !

Sin embargo, observemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t,x)dx = 1 \quad \forall t > 0.$$

Así $G(0,\cdot)$ puede interpretarse como la función $\delta(\cdot)$ de Dirac. Notemos además que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\left[\frac{x^2}{4\alpha t^2} - \frac{1}{2t}\right] \\
&= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\alpha t\sqrt{4\pi\alpha t}}\left[\frac{x^2}{2t} - \alpha\right] \\
\frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{x}{2\alpha t}\frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial^2 x} &= \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\alpha t\sqrt{4\pi\alpha t}}\left[\frac{x^2}{2\alpha t} - 1\right] = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial t}
\end{aligned}$$

de modo tal que $G(t,x)$ puede interpretarse como la solución de

$$\begin{array}{rrcl} (EC) & u_t & = & \alpha u_{xx} \\ (CI) & u(0,x) & = & \delta(x) \end{array}$$

Asimismo $v_y(x,t) = G(t,x-y)f(y)$ puede verse como solución de

$$\begin{array}{rrcl} (EC) & u_t & = & \alpha u_{xx} \\ (CI) & u(0,x) & = & \delta(x-y)f(y) \end{array}$$

es decir $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t,x-y)dy$ es solución de

$$\begin{array}{rrcl} (EC) & u_t & = & \alpha u_{xx} \\ (CI) & u(0,x) & = & \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y)dy = f(x) \end{array}$$

Formalmente:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t,x-y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\partial G}{\partial t}(t,x-y)dy = \alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t,x-y)dy$$

$$= \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t,x-y)dy$$

$$(2) \quad \lim_{t\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t,x-y)dy = f(x).$$

Lo que verifica (EC) y (CI).

14.4.2. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición en el extremo de tipo Dirichlet

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & t>0, x>0 \\ u(0,x) = f(x) & x>0 \\ u(t,0) = 0 & t>0 \end{cases} \tag{14.12}$$

Para resolver este problema es útil la noción de extensión par de una función $w : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (que por simplicidad seguimos denotando por $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$w(x) = \begin{cases} w(x) & x \geq 0 \\ -w(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Notar w es continua en $\mathbb{R}$ si y sólo si w es continua en $[0,\infty)$ y $w(0) = 0$.

Supongamos que u es solución de (14.12) y definamos v como la extensión impar de u con respecto a la variable x, es decir

$$v(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & x > 0 \\ -u(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

La función $v(t,x)$ satisface

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha v_{xx} \\ v(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, si resolvemos la ecuación para v y encontramos una solución impar, como las soluciones de esta ecuación son continuas se tiene $v(t,0) = 0$, $\forall t > 0$ y en consecuencia restringiendo v a $[0,\infty)$ obtenemos la solución del problema original.

Notemos que f es impar de modo que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\int_0^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{0} -f(-\xi) e^{-is\xi} d\xi] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\int_0^{\infty} f(\xi) e^{-is\xi} d\xi + \int_{\infty}^{0} f(\xi) e^{is\xi} d\xi] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \underbrace{[e^{-is\xi} - e^{is\xi}]}_{-2i\,\mathrm{sen}(s\xi)} d\xi \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(s\xi) d\xi \end{aligned}$$

Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} e^{-s^2\alpha t} \widehat{f}(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2\alpha t} e^{isx} [\int_0^{\infty} f(\xi) i\,\mathrm{sen}(s\xi) d\xi] ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(s\xi)[-i\cos sx + \mathrm{sen}(sx)] e^{-s^2\alpha t} ds d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}(s\xi)\,\mathrm{sen}(sx) e^{-s^2\alpha t} ds d\xi \end{aligned}$$

y notemos finalmente que v es impar con respecto a la variable x.

14.4.3. Ecuación del calor en una barra semi-infinita. Condición de Neumann

El problema es análogo al anterior, excepto por la condición de borde:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} & t > 0, x > 0 \\ u(0,x) = f(x) & x > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 & t > 0 \end{cases} \tag{14.13}$$

Para tratar este problema conviene utilizar la noción de extensión par de una función $w : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, que denotamos por $\bar{w} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} w(x) & x \geq 0 \\ w(-x) & x < 0. \end{cases}$$

$\bar{w}$ resulta ser continua si y sólo si w es continua. Además $\bar{w}$ es derivable en 0 si y sólo w es derivable en 0 (utilizando la definición de derivada con límite lateral) y $\frac{dw}{dx} = 0$.

Si u es solución de (14.13) y se define $v(t,x)$ como

$$v(t,x) = \begin{cases} v(t,x) & x \geq 0 \\ v(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

entonces $v(t,x)$ satisface

$$\begin{array}{rcll} v_t & = & \alpha v_{xx} & t > 0, -\infty < x < \infty \\ v(0,x) & = & \bar{f}(x) & -\infty < x < \infty \end{array}$$

Por otro lado, si resolvemos la ecuación para v y encontramos que v es par, derivable y que $\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = 0$, entonces tenemos la solución de (14.13) (restringiendo v a $[0,\infty)$).

Ejercicio. Probar que

$$v(t,x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi)\cos(s\xi)\cos(sx)e^{-s^2\alpha t} ds d\xi.$$

14.4.4. Problema de Dirichlet en un semiplano

En esta sección consideramos el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & y > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \\ u(x,\infty) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{14.14}$$

Aplicando TF en la variable x se obtiene

$$\widehat{u_{xx}} + \widehat{u_{yy}} = 0$$

y por lo tanto

$$-s^2\hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = s^2\hat{u} \Rightarrow \hat{u}(s,y) = a(s)e^{sy} + b(s)e^{-sy}$$

Usando las condiciones de borde

$$\left.\begin{array}{rcl} \hat{u}(s,0) & = & \hat{f}(s) = a(s) + b(s) \\ \hat{u}(s,\infty) & = & 0 \Rightarrow \begin{cases} a(s) = 0 & s > 0 \\ b(s) = 0 & s < 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{u}(s,y) = \hat{f}(s)e^{-y|s|}$$

de donde

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} e^{-y(s)} \hat{f}(s) ds$$

Usando el Teorema de la convolución y el hecho que $A(e^{-s|y|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2+x^2}$ resulta

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2+z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2+z^2} f(x-z) dz$$

Definamos

$$G(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2},$$

que se le llama función de Green de asociada al problema del semiplano.

Resulta

$$u(x,y) = [G(\cdot,y) * f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)G(z,y)dz = \int_{\infty}^{-\infty} f(z)G(x-z,y)dz \tag{14.15}$$

Ejercicio. Probar que

$$1) \quad \lim_{y\to 0} G(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)dx = 1$$

$$3) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$$

Interpretar G como solución de (14.14) con condición de borde $u(x,y) = \delta(x)$, e interpretar fórmula (14.15).

Capítulo 15

Tópicos adicionales en EDPs

15.1. Propiedad de la media para funciones armónicas

Consideremos un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica en Ω, es decir

$$u \in C^2(\Omega), \quad \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Dado un punto $p \in \Omega$ la bola

$$B_R(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < R\}$$

está contenida en Ω si $R > 0$ es suficientemente pequeño.

Definamos la función

$$f(r) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} u(x)\, dA(x), \qquad r \in [0, R]$$

donde α_n es el área del manto de la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha_n r^{n-1}$ corresponde al área del manto de la esfera de radio r. La cantidad $f(r)$ es el promedio de la función u sobre la esfera con centro p y radio r.

Nuestro objetivo es calcular la derivada de f, y para tal efecto conviene introducir un cambio de variables

$$f(r) = \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(p + ry)\, dA(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dr}(r) &= \frac{d}{dr} \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} u(p + ry)\, dA(y) \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{dr} u(p + ry)\, dA(y) \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(p + ry) \cdot y\, dA(y) \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(p + ry) \cdot \hat{n}\, dA(y)
\end{aligned}$$

ya que sobre la superficie $\partial B_1(0)$ se tiene $\hat{n}(y) = y$. Por lo tanto, cambiando de variables nuevamente

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dr}(r) &= \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dA \\
&= \frac{1}{\alpha_n r^{n-1}} \int_{B_r(p)} \Delta u \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ya que u es armónica. Luego f es constante y para averiguar cuál es esta constante observemos que

$$\begin{aligned}|f(r)-u(p)| &= \left|\frac{1}{\alpha_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(p)}(u(x)-u(p))\,dA(x)\right| \\ &\leq \operatorname*{máx}_{x\in\overline{B}_r(p)}|u(x)-u(p)| \to 0 \quad \text{cuando } r\to 0,\end{aligned}$$

debido a la continuidad de u.

Hemos probado así

Teorema 15.1.1. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$ una función armónica. Entonces si $p\in\Omega$ y $B_R(p)\subset\Omega$ se tiene*

$$u(p)=\frac{1}{\alpha_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(p)}u\,dA,\quad \forall 0<r<R,$$

y

$$u(p)=\frac{n}{\alpha_n r^{n}}\int_{B_r(p)}u\,dV,\quad \forall 0<r<R.$$

La segunda igualdad se deduce de multiplicar la primera por r^{n-1} e integrar. Observemos que la primera de estas fórmulas dice que si u es armónica entonces $u(p)$ es igual al promedio de u sobre la esfera $\partial B_r(p)$ y la segunda afirma que $u(p)$ es igual al promedio de u sobre la bola $B_r(p)$.

15.2. Principio del máximo para funciones armónicas

Teorema 15.2.1. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y sea $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$ una función armónica* no constante. *Entonces u no alcanza su máximo ni su mínimo en Ω.*

Demostración. Supongamos que u alcanza su máximo en Ω, es decir, que existe $x_0\in\Omega$ tal que

$$u(x)\leq u(x_0)\quad \forall x\in\Omega.$$

Consideremos $R>0$ tal que $B_R(x_0)\subset\Omega$. Entonces para todo $0<r<R$ por la fórmula de la media deducimos que

$$0=\frac{1}{\alpha_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x_0)}(u(x_0)-u(x))\,dA(x).$$

Pero por hipótesis $u(x_0)-u(x)\geq 0$ para todo $x\in\partial B_r(x_0)$ por lo que $u(x_0)-u(x)=0$ para todo $x\in\partial B_r(x_0)$ (si $u(x_0)-u(x)>0$ para algún punto $x\in\partial B_r(x_0)$ la integral resultaría positiva.)

Esto muestra que $u(x)=u(x_0)$ para todo $x\in B_R(x_0)$. Veamos ahora que $u(x)=u(x_0)$ para todo $x\in\Omega$. Recordemos que dado $\bar{x}\in\Omega$ como Ω es conexo existe un camino γ continuo que une x_0 con $\bar{x}$ y que está contenido en Ω. Utilizando el hecho que Ω es abierto y el camino γ es compacto se puede encontrar una secuencia finita de puntos x_1, x_2, $x_3,\ldots,x_m=\bar{x}$ en γ y $R>0$, tales que las bolas $B_R(x_k)$ $k=0,1,\ldots,m$ están contenidas en Ω y $x_{k+1}\in B_R(x_k)$ para $k=0,1,\ldots,m-1$. Hemos probado que $u(x)=u(x_0)$ para todo $x\in B_{R_0}(x_0)$ y luego $u(x_1)=u(x_0)=\operatorname{máx}_\Omega u$. Repitiendo el argumento anterior se encuentra que $u(x)=u(x_1)$ para todo $x\in B_R(x_1)$, y por inducción se prueba que $u(\bar{x})=u(x_0)$. Luego u es constante en Ω, lo cual es una contradicción.

Mediante una demostración análoga se prueba que u no puede alcanzar su mínimo en Ω. □

Corolario 15.2.2. *Supongamos que $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ es abierto, conexo y acotado y que $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ es continua y armónica en Ω. Entonces*

$$\operatorname*{máx}_{\overline{\Omega}}u=\operatorname*{máx}_{\partial\Omega}u$$

y

$$\operatorname*{mín}_{\overline{\Omega}}u=\operatorname*{mín}_{\partial\Omega}u.$$

Recordemos que $\overline{\Omega}$ denota la adherencia de Ω.

Demostración. Bajo las hipótesis de este corolario, el máximo de u se alcanza en algún punto $x_0 \in \overline{\Omega}$. Si $x_0 \in \Omega$ por el teorema anterior u es constante y (15.2) es cierto. Si $x_0 \in \partial\Omega$ vemos que (15.2) también vale. □

El teorema 15.2.1 es más fuerte que el corolario 15.2.2, ya que mientras este último resultado dice que si u es armónica entonces u siempre alcanza un máximo en Ω, el teorema afirma que si el máximo se llegara a alcanzar dentro de Ω entonces u sería constante. Por este motivo al primero de estos resultados se le llama el principio del máximo fuerte, mientras que al segundo se le dice principio del máximo débil.

15.3. Principio del máximo para la ecuación del calor

Consideramos la ecuación del calor en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierta y acotada. En realidad, la región donde se plantea la ecuación del calor es

$$Q_T = (0, T) \times \Omega,$$

donde $T > 0$.

Supondremos que $u = u(t, x)$ está definida para $(t, x) \in \overline{Q}_T$ y que u es una función continua en $\overline{Q}_T$ y $C^2(Q_T)$. Diremos que u satisface la ecuación del calor si

$$u_t(t, x) = \Delta u(t, x) \quad \forall (t, x) \in Q_T = (0, T) \times \Omega. \tag{15.1}$$

Definamos

$$\Gamma_T = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega).$$

Intuitivamente Q_T es un cilindro no uniforme con base igual a Ω y altura T, y Γ_T es una parte de la frontera de Q_T que corresponde a la base y el manto lateral (sin incluir la "tapa" superior).

Teorema 15.3.1. *Sea $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $u \in C^2(Q_T)$ que satisface la ecuación del calor* (15.1) *en Q_T. Entonces*

$$\operatorname*{máx}_{\overline{Q}_T} u = \operatorname*{máx}_{\Gamma_T} u, \tag{15.2}$$

y

$$\operatorname*{mín}_{\overline{Q}_T} u = \operatorname*{mín}_{\Gamma_T} u.$$

Observación. Este teorema se conoce como el *principio del máximo débil* para la ecuación del calor y establece que el máximo de u siempre se alcanza en algún punto de Γ_T. En otras palabras el comportamiento de u sólo toma en cuenta los valores de esta función en Γ_T, es decir los valores en el instante inicial ($t = 0$) y los valores en el borde de Ω para todo $t \in (0, T)$. Esto concuerda con la noción de que la variable t representa el tiempo, y que lo que ocurre en el tiempo $t = T$ viene descrito por la condiciones del problema.

Demostración. Probaremos que si $0 < S < T$ entonces

$$\operatorname*{máx}_{\overline{Q}_S} u = \operatorname*{máx}_{\Gamma_S} u.$$

La conclusión se obtiene luego haciendo $S \nearrow T$.Supongamos que $\operatorname{máx}_{\overline{Q}_S} u$ se alcanza en un punto (t_0, x_0) que no pertenece a Γ_S. Entonces, gracias a las condiciones necesarias de optimalidad sabemos que $\nabla_x u(t_0, x_0) = 0$, la matriz Hessiana $\nabla^2 u(t_0, x_0)$ es semi-definida negativa y $u_t(t_0, x_0) \geq 0$. Tomando la traza de $\nabla^2 u(x_0)$ vemos que $\Delta u(t_0, x_0) \leq 0$, por lo que

$$u_t(t_0, x_0) - \Delta u(t_0, x_0) \geq 0.$$

Esto no es suficiente para una demostración pero sólo falta un pequeño *truco*. En efecto, consideremos $\varepsilon > 0$ y la función

$$v(t, x) = u(t, x) + \varepsilon \|x\|^2.$$

v es continua en $\overline{Q}_S$ y por lo tanto $\text{máx}_{\overline{Q}_S} v$ se alcanza, digamos en $(t_1, x_1) \in \overline{Q}_S$. Si (t_1, x_1) no pertenece a Γ_S repitiendo el argumento anterior podemos afirmar que $\Delta v(t_1, x_1) \leq 0$ y $v_t(t_1, x_1) \geq 0$, por lo que

$$v_t(t_1, x_1) - \Delta v(t_1, x_1) \geq 0.$$

Pero un cálculo directo muestra que

$$v_t(t_1, x_1) - \Delta v(t_1, x_1) = u_t(t_1, x_1) - \Delta u(t_1, x_1) - 2n\varepsilon = -2n\varepsilon < 0,$$

lo que es una contradicción. Hemos probado que necesariamente $(t_1, x_1) \in \Gamma_S$, por lo que

$$\operatorname*{máx}_{(t,x)\in\overline{Q}_S} \left(u(t,x) + \varepsilon\|x\|^2\right) = \operatorname*{máx}_{(t,x)\in\Gamma_S} \left(u(t,x) + \varepsilon\|x\|^2\right).$$

De aquí se deduce

$$\operatorname*{máx}_{(t,x)\in\overline{Q}_S} u(t,x) \leq \operatorname*{máx}_{(t,x)\in\Gamma_S} \left(u(t,x) + \varepsilon\|x\|^2\right) \leq \left(\operatorname*{máx}_{(t,x)\in\Gamma_S} u(t,x)\right) + \varepsilon \left(\operatorname*{máx}_{(t,x)\in\Gamma_S} \|x\|^2\right)$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$ obtenemos

$$\operatorname*{máx}_{(t,x)\in\overline{Q}_S} u(t,x) \leq \operatorname*{máx}_{(t,x)\in\Gamma_S} u(t,x).$$

La desigualdad $\operatorname*{máx}_{(t,x)\in\overline{Q}_S} u(t,x) \geq \operatorname*{máx}_{(t,x)\in\Gamma_S} u(t,x)$ es siempre cierta dado que $\Gamma_S \subset \overline{Q}_S$. Esto prueba (15.2). □

15.4. Unicidad para la ecuación de Laplace y el calor

Teorema 15.4.1. *Sea Ω una región abierta y acotada en $\mathbb{R}^n$, y sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funciones. Entonces existe a lo más una función u en $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostración. Si u_1, u_2 son dos soluciones del problema anterior, entonces $u = u_1 - u_2$ satisface $\Delta u = 0$ en Ω y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Es decir u es armónica en Ω y por el principio del máximo (corolario 15.2.2) se deduce que $u \equiv 0$ en Ω. □

Teorema 15.4.2. *Sea Ω una región abierta y acotada en $\mathbb{R}^n$, y sean $f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi : (0,T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ y $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones. Entonces existe a lo más una función u en $C([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap C^2((0,T) \times \Omega)$ solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } (0,T) \times \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

La demostración es una aplicación directa del teorema 15.3.1.

Ejercicio.

De una demostración del teorema de unicidad para la ecuación de Laplace (teorema 15.4.1) bajo la hipótesis que u_1, u_2 son soluciones de clase $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

utilizando el siguiente esquema

a) Pruebe la siguiente fórmula: si u, $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega \Delta u v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_\Omega \nabla u \nabla v, \tag{15.3}$$

donde n es el vector unitario normal a la frontera de Ω.

Indicación: utilice el teorema de la divergencia con el campo vectorial $v\nabla u$.

b) Pruebe que si $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en Ω y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ entonces aplicando la fórmula anterior se deduce que $\nabla u = 0$ en Ω y concluya.

Ejercicio. Pruebe el principio del máximo débil (corolario 15.2.2) en el siguiente caso: si $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisface

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces

$$u \leq 0 \qquad \text{en } \Omega.$$

Siga los siguientes pasos:

a) Construya una función $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 con la siguientes propiedades

i) $\rho(t) = 0$ para todo $t \leq 0$,

ii) $\rho(t) > 0$ para todo $t > 0$.

b) Aplique la fórmula (15.3) a $v = \rho \circ u$ y deduzca que si $x \in \Omega$ y $u(x) > 0$ entonces $\nabla u(x) = 0$.

c) Podemos suponer que Ω es conexo. Supongamos que existe un punto $x \in \Omega$ con $u(x) > 0$ y sea γ un camino diferenciable con $\gamma(t) \in \Omega$ para $t \in (0, 1]$, $\gamma(0) = x_0 \in \partial\Omega$ y $\gamma(1) = x$. Sea t_1 el *último* t donde $u(\gamma(t)) = 0$, en otras palabras

$$t_1 = \sup\{t \in [0, 1] : u(\gamma(t)) = 0\}$$

Observe que $u(\gamma(t_1)) = 0$ y por la parte anterior $\frac{d}{dt}u(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in (t_1, 1)$. Concluya.

Ejercicio. Para la ecuación del calor también es posible probar el teorema de unicidad y el principio del máximo débil *integrando por partes*. Para el teorema de unicidad puede proceder del siguiente modo: suponga que $u \in C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^2((0, T) \times \Omega)$ satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Defina

$$E(t) = \int_\Omega |\nabla u(t, \cdot)|^2$$

y pruebe que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2\int_\Omega u_t(t, \cdot)^2 \leq 0.$$

(∇ se refiere solo a las variables espaciales.) Deduzca que si $u_0 \equiv 0$ entonces $\nabla u(t, \cdot) \equiv 0$ y concluya.

Bibliografía

[1] J. Bak, D.J. Newman, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[2] A. Castro, *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[3] R.V. Churchill, *Teoría de Funciones de Variable Compleja*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] P.V. O'Neil, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol. 2, Compañía Editorial Continental, México D.F., 1994.

[5] C Pita Ruiz, *Cálculo vectorial*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1995

[6] A.D. Wunsch, *Variable compleja con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, Buenos Aires, 1997.