Guía de ejercicios # 2 - MA26B Matemáticas Aplicadas
Variable Compleja
Semestre 2007-2

Profesor: J. Dávila

Auxiliar: Miguel Concha

Derivación

1. Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones:

$i) f(z) = \bar{z}, \quad ii) f(z) = e^{x}(\cos y - i \operatorname{sen} y), \quad iii) f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y), \quad iv) f(z) = (z^3+1)e^{-y}(\cos y + i \operatorname{sen} y),$

y calcule su derivada ($z = x + iy$).

2. a) Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g = u + iv$ holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, pruebe que $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω.

b) Dados $u(x, y) = x \sin(x) \cosh(y) - y \cos(x) \sinh(y)$, encuentre $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que la función $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ entonces $f'(z_0) = 0$.

4. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante, entonces f también lo es. Diga por qué es importante que Ω sea conexo.

5. Dado λ en $\mathbb{C}$ definimos $p^{\lambda} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante:

$$p^{\lambda}(z) = \exp(\lambda \log(z)), \quad z \neq 0$$

(i) Muestre que $p^{i}(i) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ y que para todo $k \in \mathbb{Z}, p^{k}(z) = z^{k}$.

(ii) Dado $\lambda = \alpha + i\beta$, pruebe que para todo $t > 0$ real

$$p^{\lambda}(t) = t^{\alpha}[\cos(\beta \log(t)) + i \operatorname{sen}(\beta \log(t))]$$

(iii) Dados λ, μ en $\mathbb{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^{\lambda}(z) \cdot p^{\mu}(z)$. Determine además el dominio donde p^{λ} es holomorfa y pruebe que:

$$(p^{\lambda})'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z)$$

6. Pruebe que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $z = x, iy$, definida por:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

es continua y satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en el origen, aunque $f'(0)$ no existe.

7. Si definimos la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f(0) = 0$ y $f(z) = \frac{x^3 y(y-ix)}{x^6+y^2}$ para $z \neq 0$, pruebe que $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$, $z \longrightarrow 0$ existe sobre cualquier camino radial, pero no cuando $z \longrightarrow 0$ por cualquier camino.

8. Si $f(z)$ es una función de clase $C^2(\mathbb{C})$, pruebe que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log |f'(z)| = 0.$$

Si $|f'(z)|$ es el producto de una función de x y una función de y muestre que

$$f'(z) = \exp(\alpha z^2 + \beta z + \gamma),$$

donde $\alpha,\ \beta$ y γ son constantes complejas.

Series de potencia

9. Determine la expanción en serie de potencias de la función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ en torno a $z = 1$.

10. Sea $S_n(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + ... + nz^n, T_n(z) = z + z^2 + z^3 + ... + z^n$.

a) Mostrar que $S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z}$.

b) Determine el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ y usando (a) calcule la suma de dicha serie.

11. Determine los radios de convergencia de las series siguientes:

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n))^2 x^n, \quad ii) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n.$$

12. Sabiendo que el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ es R (donde $0 \leq R \leq +\infty$), estudia los radios de convergencia de:

$$i) \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n}(z - z_0)^n, \quad ii) \sum_{n=0}^{+\infty} c_{kn}(z - z_0)^n, \quad iii) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^{2n}, \quad iv) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^{kn}.$$

13. Pruebe que la función

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} z^n$$

es holomorfa en $|z| < 1$ y que su derivada es $af(z)/(1+z)$. Deduzca de aquí que $f(z) = (1+z)^a$.

Integración

14. Calcule directamente

$$\int_{[0,z_0]} \mathrm{Re}(z)\, dz, \quad \int_{[0,z_0]} \mathrm{Im}(z)\, dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}, \quad \int_{|z|=1} \bar{z}^n\, dz.$$

15. Calcule $\int_\gamma \frac{|z|}{|R-z|^2} |dz|$ donde γ es la circunferencia de radio r, $0 < r < R$, y centro el origen.

Indicación: Pruebe previamente que si $0 \leq r < R$, se tiene:

$$\frac{1}{R^2 - 2rR\cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(nt)\right)$$

y use que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \rho^n$ converge a $\frac{\rho}{1-\rho}$ uniformemente en $|\rho| \leq a$, para todo $0 < a < 1$.

16. Dada la función $f(z)$, holomorfa en $|z - a| < R$; pruebe que, si $0 < r < R$,

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} d\theta,$$

donde $P(\theta)$ es la parte real de $f(a+re^{i\theta})$.

17. Considere la integral,

$$J(R) = \int\limits_{C(R)} z^3 + \bar{z}\left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right) dz,$$

donde $C(R)$ es el borde del círculo de radio R, recorrido en sentido antihorario. Escribiendo $z = Re^{iz}$, evalúe la integral y muestre que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{J(R)}{R^2} = 0$$

18. Usando la representación integral de $f^{(n)}(a)$ dada por la fórmula de Cauchy, pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz,$$

donde C es cualquier curva cerrada que encierra el origen. De aquí pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta} d\theta.$$

Residuos

19. Calcule los residuos, de existir, de las siguientes funciones en torno a $z = 0$

1. $cotg(z)$
2. $\frac{\operatorname{sen}(z)-z}{z^4}$
3. $\frac{\log(\cos(z))}{z(1-\cos(z))}$
4. $\frac{\cos(z)}{z^2}$
5. $\exp(\frac{1}{z})z^3$

20. Considere la función

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)(z-i)(z^2-2z+2)}$$

a) Determine los polos de f, el orden de cada uno de ellos y calcule el valor de los correspondientes residuos.

b) Sea $R > 0$ y C_R la circunferencia de radio R y centro en el origen recorrida en sentido antihorario. Determine los valores de R tal que la integral

$$I(R) = \int_{C_R} f(z) dz$$

existe y calcule su valor en función de R.

21. Encuentre las singularidades, y de qué tipo son, de la función $\frac{1}{z(e^z-1)}$. Muestre que, si $0 < |z| < 2\pi$, la función puede ser expresada en la forma

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots$$

y encuentre los valores de a_0 y a_2.

22.

a) Muestre que,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)}d\theta = -\int_\gamma f(z)dz$$

en donde $f(z) = \frac{4iz}{(b^2-a^2)z^4+2(b^2+a^2)z^2+(b^2-a^2)}$ y γ es el círuclo unitario recorrido en sentido antihorario.

b) Muestre que los polos de f son:

$$z = \pm\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

y que para $a \neq b$ y $a, b > 0$ los polos son simples. Determine los polos que quedan al interior de la curva y el valor de la integral.

23. Calcule $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}dx$ para $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

Indicación: Considere el camino desde el origen a R, luego a $Re^{i\frac{\pi}{n}}$ y luego de vuelta al origen.

24. Calcule, a través del mismo camino del problema anterior y para todo entero $n \geq 2$ y $0 < 1+\alpha < n$, la siguient integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^{2n}}dx.$$

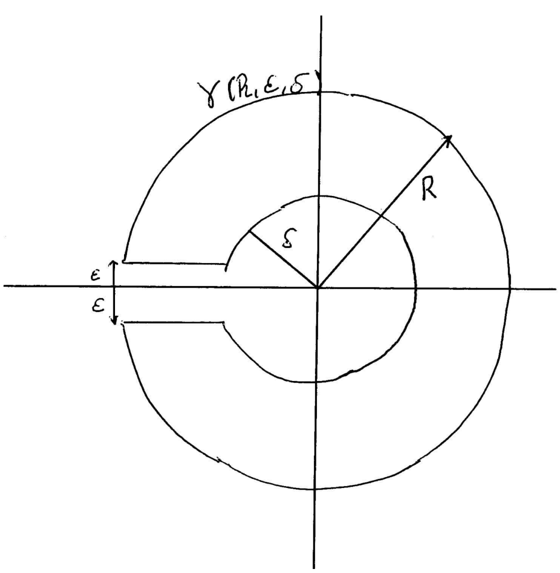
25. Pruebe que para $a > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)\left(\log^2(x)+\pi^2\right)}dx = \frac{\pi}{2a\left((\log(a))^2+(\frac{\pi}{2})^2\right)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

Ind.: considere $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)\log(z)}$ donde $\log(z)$ es la rama principal del logaritmo, definida por

$$\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \quad r > 0, \quad \theta \in (-\pi, \pi],$$

y el camino $\gamma_{R,\epsilon,\delta}$ de la figura:



Hacer primero $\epsilon \to 0$, luego $\delta \to 0$, $R \to \infty$.

26. Sea

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x)^3} dx$$

donde $\alpha \in [0,1]$.

a) Utilizando métodos reales determine para qué valores de α la integral converge . Además calcule $I(0)$ e $I(1)$ (con métodos reales).

b) Muestre que si $0 < \alpha < 1$ entonces

$$I(\alpha) = \frac{\pi\alpha(1-\alpha)}{2\,\mathrm{sen}(\pi\alpha)}$$

y que $I(\alpha)$ es continua en $\alpha = 1$ y $\alpha = 0$.

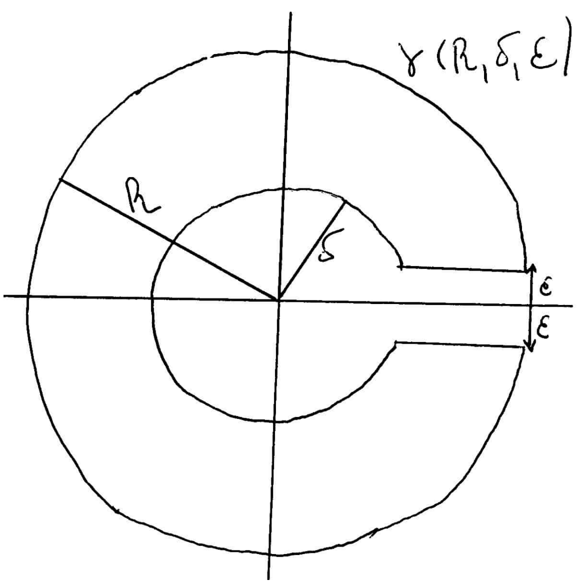
Ind.: considere la integral compleja:

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon,\delta}} \frac{z^\alpha}{(1+z)^3} dz$$

donde z^α se define como

$$\left(re^{i\theta}\right)^\alpha = r^\alpha e^{i\theta\alpha} \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

y resulta analítica en $\mathbb{C} - [0,\infty)$, y $\gamma_{R,\epsilon,\delta}$ es el camino de la figura:



27.

a) Sean g y h funciones analíticas en z_0 tales que $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$ y $h(z_0) = h'(z_0) = h''(z_0)$ y $h'''(z_0) \neq 0$. Muestre que $\frac{g}{h}$ tiene un polo de segundo orden en z_0, con:

$$Res\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{3g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3g'(z_0)h^{iv}(z_0)}{2\left(h'''(z_0)\right)^2}$$

b) Sean r y s funciones analíticas en 0 tales que $r(0) \neq 0$ y $s(0) = s'(0) = 0$ y $s''(0) \neq 0$. Muestre que:

$$Res\left(\frac{r}{s}, 0\right) = \frac{6r'(0)s''(0) - 2r(0)s'''(0)}{3\left(s''(0)\right)^2}.$$

28. Pruebe que a)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2} dx \quad = \quad \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}$$

donde $\lambda \geq 0$ y $a > 0$.

b)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x\left(x^2+a^2\right)} dx \quad = \quad \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)$$

donde $a > 0$.

c)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{a+b\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{2\pi(1-a(a^2-b^2)^{-1/2})}{b} \qquad \text{si } 0 < b < a$$

d) Calcule para $1 > |a| > 0$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+a\cos(\theta))^2} d\theta.$$

29. Pruebe que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2\cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}$$

donde $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Hint: Considere la función $f(z) = \frac{\pi\,\mathrm{cosec}(\pi z)}{(z+a)^2}$ integrada en el camino Γ_N correspondiente al borde del cuadrado con vértices $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pm i \pm 1)$.

30. a) Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{5-4\cos(t)} dt$$

b) Demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2} dx \quad = \quad \frac{\pi}{16}$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx \quad = \quad \frac{\pi}{4}.$$

31. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} sech(x)\, dx = \pi sec(\lambda\pi/2)$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ satisface $-1 < Re(\lambda) < 1$. Ind.: considere $f(z) = e^{\lambda z} sech(z)$ y el rectángulo cerrado de vértices $-c, c, c+i\pi, -c+i\pi$ donce $c \to +\infty$.

32. Considere el borde del cuadrado C_N de vértices:

$$(N+\frac{1}{2})(-1-i), (N+\frac{1}{2})(1-i), (N+\frac{1}{2})(1+i), (N+\frac{1}{2})(-1+i),$$

con $N \in \mathbb{N}$.

a) Considere la función $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$. Indique donde f es holomorfa, encuentre sus polos y determine los órdenes correspondientes.

b) Calcule los residuos de los polos de f.

c) Calculando $\oint_{\partial C_N} f(z)dz$ concluya que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

33. Integrando en un cuadrado cuyas esquinas son $\pm N$, $\pm N + 2Ni$, donde N es un entero, y haciendo $N \longrightarrow \infty$, pruebe que

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)\cosh(\frac{1}{2}\pi x)} dx = \log 2.$$

34. Integrando $\frac{\pi \operatorname{sen}(az)}{z^3 \operatorname{sen}(\pi z)}$ sobre un contorno <u>adecuado</u>, pruebe que:

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}.$$

35. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x-i}\, dx.$$

Ind.: usando $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ descomponer la integral en dos términos. Calcular uno de ellos integrando en un semi-círculo en $Im(z) \geq 0$ y el otro integrando en un semi-círculo en $Im(z) \leq 0$.

Liouville

36. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|^4) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que 4.

10)

$$S_n(z) = z + 2z^2 + \dots + nz^n$$

$$T_n(z) = z + z^2 + \dots + z^n$$

a) $$S_n(z)(1-z) = S_n(z) - z S_n z$$
$$= z + 2z^2 + \dots + nz^n - z(z + 2z^2 + \dots + nz^n)$$
$$= z + 2z^2 + \dots + nz^n - z^2 - 2z^3 - \dots - nz^{n+1}$$
$$= z + z^2 + \dots + z^n - nz^{n+1}$$
$$= T_n(z) - nz^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z} \qquad (\text{si } z \neq 1)$$

b) Cuando $|z|<1$ se tiene que

$$nz^{n+1} \to 0$$

$$T_n(z) \to \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}.$$

Luego para $|z|<1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \frac{\frac{z}{1-z}}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

es decir $$\sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

11) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(n)^2 x^n$

Para $n \geq 3$ $\quad 1 \leq \log n \leq n$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq (\log n)^2 \leq n^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \left[(\log n)^2\right]^{1/n} \leq n^{2/n}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\log n)^2} = 1$$

luego el radio de convergencia es 1

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$$

y el radio de convergencia es $\frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = e$.

18)

Si f es analítica en el disco $D_R(0)=\{z\in\mathbb{C} : |z|<R\}$

entonces

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad , \text{ si } \quad C=\{z\in\mathbb{C} : |z|<r\} \quad 0<r<R$$

y $|z|<r$.

También

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{con} \qquad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw$$

Consideremos la función

$$f(z)=e^{xz} \qquad \text{donde } x\in\mathbb{C} \text{ es un parámetro.}$$

Entonces $$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{xz}}{z^{n+1}}\,dz.$$

Por otro lado $f(z)=e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n z^n}{n!}$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=x^n$$

Así

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{xz}}{z^{n+1}}\,dz$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{x^n e^{xz}}{n!\,z^{n+1}}\,dz$$

Sumando

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!\,z^n}\right)\frac{e^{xz}}{z}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{x/z}e^{xz}\,\frac{1}{z}\,dz$$

Elijamos C el círculo de radio 1 y centro 0: $z=e^{i\theta}$

18)
(cont.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{xe^{-i\theta} + xe^{i\theta}}}{e^{i\theta}} \, ie^{i\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta$$

21) $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$

f es analítica en $\mathbb{C}$ excepto 0 y los puntos z tales que $e^z=1$, es decir en $\mathbb{C} - \{2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Veamos que 0 es un polo.

$\lim_{z\to 0} z f(z)$ no existe

$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{e^z-1} = 1 \Rightarrow 0$ es un polo de orden 2

Sea $z_0 = 2\pi i k$, con $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$. Entonces

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z(e^z-1)}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z(e^{z-z_0}-1)} = \frac{1}{z_0} \Rightarrow z_0 \text{ es polo de orden } 1$$

(aquí usamos que que $e^{z_0} = e^{2\pi i k} = 1$.).

Como 0 es polo de orden 2, $h(z) = z^2 f(z) = \dfrac{z}{e^z-1}$ es analítica en un disco en torno de 0. Luego $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

y $c_n = \dfrac{h^{(n)}(0)}{n!}$. Calculemos c_0, c_1, c_2, c_3, c_4

$h(z) = \dfrac{z}{e^z-1} \Rightarrow c_0 = h(0) = 1$

$h'(z) = \dfrac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}$ $\quad c_1 = h'(0) = \lim_{z\to 0} \dfrac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2} = \lim_{z\to 0} \dfrac{e^z-e^z-ze^z}{2(e^z-1)} = -\dfrac{1}{2}$

21) $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{z}{e^z - 1}$

cont)

$$h(z) \cdot \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)\frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1\right)}{z} = 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\right) = 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}\right) = 1$$

Pero para series absolutamente convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ se tiene

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n b_{m-n}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} c_n \frac{1}{(m-n+1)!}\right) z^m = 1$$

Identificando coeficientes:

$m=0$: $\quad c_0 = 1$

$m=1$: $\quad \frac{c_0}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$

$m=2$: $\quad \frac{c_0}{3!} + \frac{c_1}{2} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{6} - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$m=3$: $\quad \frac{c_0}{4!} + \frac{c_1}{3!} + \frac{c_2}{2} + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{c_0}{24} - \frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{2} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{} = 0$

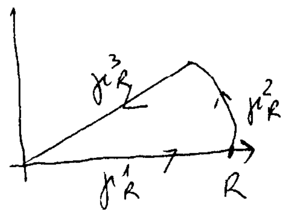
$m=4$: $\quad \frac{c_0}{5!} + \frac{c_1}{4!} + \frac{c_2}{3!} + \frac{c_3}{2} + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = -\frac{c_0}{5!} - \frac{c_1}{4!} - \frac{c_2}{3!} - c_3 = -\frac{1}{120} + \frac{1}{48} - \frac{1}{72} = -\frac{1}{720}$

Luego $\quad \frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720} z^2 + \ldots$

~~19)~~ Calcular $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx$, $n \geq 2$

23)

Consideramos el camino



con ángulo π/n

y $R \to +\infty$,

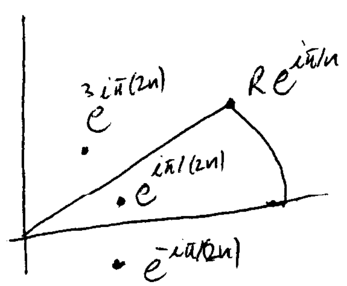
y $f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$.

f es meromorfa con polos en los puntos z tales que $1 + z^{2n} = 0$.

$$z^{2n} = e^{i\pi} = e^{i\pi + 2\pi i j} \qquad j \in \mathbb{Z}$$

$$z_j = e^{i\pi/(2n) + 2\pi i j/2n} \qquad 0 \leq j \leq 2n-1 \text{ , esto es}$$

$$e^{i\pi/(2n)}, e^{i\pi/(2n)}, \dots, e^{i\pi/(2n) + \frac{i\pi}{n}(2n-1)} = e^{-i\pi/(2n)}$$



Notamos que los polos son simples pués z_j es raíz simple de $1+z^{2n}$.

El único polo de f encerrado por $\gamma_R = \gamma_R^1 \cup \gamma_R^2 \cup \gamma_R^3$ es $e^{i\pi/(2n)}$.

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^{2n}}\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n}}, e^{i\pi/(2n)}\right)$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n}}, e^{i\pi/(2n)}\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{1+z^{2n}} \qquad \text{con } z_0 = e^{i\pi/(2n)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{2n z_0^{2n-1}} = \frac{1}{2n\, e^{\frac{i\pi}{2n}(2n-1)}} = -\frac{e^{i\pi/(2n)}}{2n}$$

23) (continuación)

Por otro lado

$$\int_{\gamma_R^1} \frac{1}{1+z^{2n}}\, dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx$$

$$\int_{\gamma_R^3} \frac{1}{1+z^{2n}}\, dz = - \int_0^R \frac{1}{1+(te^{i\pi/n})^{2n}}\, dt \cdot e^{i\pi/n} \qquad (z = te^{i\pi/n},\ t\in [0,R]$$
con la orientación opuesta)

Veamos que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^2} \frac{1}{1+z^{2n}}\, dz = 0.$

En efecto, si $|z| = R$ $\quad R^{2n} = |1+z^{2n}-1| \leq |1+z^{2n}| + 1$

$$\Rightarrow |1+z^{2n}| \geq R^{2n} - 1$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_R^2} \frac{1}{1+z^{2n}}\, dz \right| \leq \int_{\gamma_R^2} \frac{1}{|1+z^{2n}|}\, dr \leq \frac{1}{R^{2n-1}} \int_{\gamma_R^2} dr \qquad (\text{si } R>1)$$

$$\leq \frac{\pi/n \cdot R}{R^{2n-1}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } R\to\infty.$$

Luego, después de hacer $R\to\infty$ tenemos

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx - e^{i\pi/n} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx = 2\pi i \left(- \frac{e^{i\pi/(2n)}}{2n} \right)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx \, (1 - e^{i\pi/n}) = - \frac{i\pi}{n} e^{i\pi/(2n)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx = - \frac{i\pi}{n} \frac{e^{i\pi/(2n)}}{1-e^{i\pi/n}} = - \frac{i\pi}{n} \frac{1}{e^{-i\pi/(2n)} - e^{i\pi/(2n)}}$$

$$= \frac{\pi}{2n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

28) a) $I=\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\, e^{-\lambda a}$, $\lambda \geq 0,\ a>0$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(I_2) \text{ donde } I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2+a^2}\,dx$$

$$I_2 = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2}, z_j\right)\Big]$$ donde z_j son los polos de $\frac{1}{z^2+a^2}$ en el semi-plano $\operatorname{Im} z>0$.

$$2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2}, ia\right)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to ia} \frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2}(z-ia) = 2\pi i \lim_{z\to ia} \frac{e^{\lambda z}}{z+ia}$$

$$= 2\pi i\, \frac{e^{-\lambda a}}{2ia} = \frac{\pi}{a}\, e^{-\lambda a}$$

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{a}\, e^{-\lambda a}\right) = \frac{\pi}{2a}\, e^{-\lambda a}$$

---

b) $$I=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)}\,dx}_{I_2}\Big)$$

$$I_2 = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}, ia\right) + \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+a)}, 0\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}, ia\right) = \lim_{z\to} (z-ia)\frac{e^{iz}}{z(z-ia)(z+ia)}$$

$$= \frac{e^{-a}}{ia(2ia)} = -\frac{e^{-a}}{2a^2}$$

28) (continuación)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}, 0\right) = \lim_{z\to 0} z\,\frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)} = \frac{1}{a^2}$$

$$I_2 = 2\pi i\left(-\frac{e^{-a}}{2a^2}\right) + \pi i\,\frac{1}{a^2} = i\pi\left[-\frac{e^{-a}}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right] = \frac{i\pi}{a^2}\left(1-e^{-a}\right)$$

$$I = \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)$$

---

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta = I$ con $0 < b < a$

$$I = \frac{1}{b}\int_0^{2\pi} \frac{a+b\cos\theta - a}{a+b\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{b} - \frac{a}{b}\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos\theta}\,d\theta}_{I_2}$$

$$I_2 = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz}\,\frac{1}{a+b\,\frac{z+z^{-1}}{2}}\,dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{az+\frac{bz^2}{2}+b/2}\,dz$$

Busquemos las raíces de $\frac{b}{2}z^2 + az + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)$

$$z_\pm = -\frac{a}{b} \pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = \frac{1}{b}\left(-a\pm\sqrt{a^2-b^2}\right)$$

Como $\frac{a}{b} > 1$, $z_- = -\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}$ está fuera del círculo $|z|=1$.

En cambio $z_+ = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}$ cumple $-1 < z_+ < 0$

ya que $-1 < z_+ \iff 1 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} > \frac{a}{b}$

$$\iff 1 + 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a^2}{b^2} - 1 > \frac{a^2}{b^2} \iff 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} > 0.$$

28) (continuación)

luego

$$I_2 = \frac{1}{i}\,\frac{2}{b}\,2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+\frac{2a}{b}z+1},\, z_+\right)$$

$$= \frac{2}{b}\,2\pi \lim_{z\to z_+} (z-z_+)\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)}$$

$$= \frac{4\pi}{b}\,\frac{1}{z_+-z_-} = \frac{4\pi}{b}\,\frac{1}{\left(-\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)-\left(-\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)}$$

$$= \frac{4\pi}{b}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$I = \frac{2\pi}{b} - \frac{2\pi a}{b\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\pi}{b}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

31)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \operatorname{sech}(x)\,dx$$

$$f(z) = e^{\lambda z}\operatorname{sech}(z) = \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)}$$

Los polos de f : $\cosh(z) = 0$

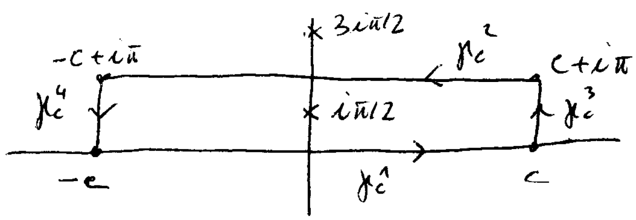
$$\Leftrightarrow \quad e^{z} + e^{-z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2z} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2z} = -1 = e^{i\pi + 2\pi i n} \qquad , n \in \mathbb{Z}$$

$$z = \frac{i\pi}{2} + i\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Consideremos el camino γ_c :



El único polo encerrado por γ_c es $i\pi/2$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_c} e^{\lambda z}\operatorname{sech}(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)}, i\pi/2\right)$$

El polo $i\pi/2$ es simple: $\displaystyle\lim_{z\to i\pi/2} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)}(z - i\pi/2)$

$$= e^{\lambda i\pi/2} \lim_{z\to i\pi/2} \frac{z - i\pi/2}{\cosh(z)} = e^{\lambda i\pi/2} \lim_{z\to i\pi/2} \frac{1}{\operatorname{senh}(z)}$$

Pero $\operatorname{senh}\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \dfrac{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}}{2} = \dfrac{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}}{2i}\, i = i\operatorname{sen}(\pi/2) = i$

Este cálculo también muestra que $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)}, i\pi/2\right) = \frac{1}{i}\, e^{\lambda i\pi/2}$

31) (continuación)

Por otro lado

$$\int_{\gamma_c^1} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)} dz = \int_{-c}^{c} e^{\lambda x} \operatorname{sech}(x) dx$$

$$\int_{\gamma_c^2} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)} dz = -\int_{-c}^{c} \frac{e^{\lambda(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx$$

$$z = x + i\pi \quad , \quad x \in [-c, c]$$

Pero

$$\cosh(x+i\pi) = \cosh(i\mu) \qquad \text{con } \mu = \frac{x}{i} + \pi$$

$$= \frac{e^{i\mu} + e^{-i\mu}}{2} = \cos(\mu) = \cos\left(\frac{x}{i} + \pi\right)$$

$$= \cos(x/i)\cos(\pi) - \operatorname{sen}(x/i)\operatorname{sen}(\pi)$$

$$= -\cos(x/i) = -\cosh(x)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_c^2} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)} dz = -\int_{-c}^{c} \frac{e^{\lambda x}}{-\cosh(x)} e^{\lambda i\pi} dx = e^{\lambda i \pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{\lambda x}}{\cosh(x)} dx$$

Veamos que $\lim_{c \to \infty} \int_{\gamma_c^3} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)} dz = 0$

$$\left| \int_{\gamma_c^3} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)} dz \right| \leq \int_{\gamma_c^3} \frac{2 e^{Re(\lambda z)}}{|e^z + e^{-z}|} d\varepsilon$$

Para acotar escribamos $z = c + it$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$

$$\lambda z = (\lambda_1 + i\lambda_2)(c+it) = \lambda_1 c - \lambda_2 t + i(\lambda_2 c + \lambda_1 t)$$

$$Re(\lambda z) = \lambda_1 c - \lambda_2 t$$

31) (continuación)

$$|e^{z}+e^{-z}| = | e^{c+it} + e^{-c-it}|$$

$$\geq |e^{c+it}| - |e^{-c-it}|$$

$$= e^{c}-e^{-c}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma^3_c} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)}dz\right| \leq 2 \int_0^{\pi} \frac{e^{\lambda_1 c}\, e^{-\lambda_2 t}}{e^{c}-e^{-c}}\, dt$$

$$= 2 \underbrace{\frac{1}{e^{c(1-\lambda_1)}-e^{-c(1+\lambda_1)}}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-\lambda_2 t}\, dt}_{\text{una constante}}$$

cuando $c\to\infty$ porque $1-\lambda_1>0$.

Similarmente

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{\gamma^4_c} \frac{e^{\lambda z}}{\cosh(z)}\, dz = 0.$$

Así obtenemos

$$(1+ e^{\lambda i\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{\cosh(x)}\, dx = 2\pi i\, \frac{1}{i}\, e^{\lambda i\pi/2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{\cosh(x)}\, dx = 2\pi \frac{e^{\lambda i\pi/2}}{1+e^{\lambda i\pi}} = \pi \frac{2}{e^{-\lambda i\pi/2}+e^{\lambda i\pi/2}}$$

$$= \frac{\pi}{\cos(\lambda\pi/2)}$$