El teorema de la divergencia de Gauss

El operador divergencia

Consideremos un campo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ de clase C^1. Se define la divergencia como

$$\boxed{div\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}$$

El teorema de la divergencia o de Gauss

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ sea una unión finita de superficies regulares.

Sea $\vec{F}$ un campo C^1 definido en unan vecindad de $\bar{\Omega}$. Entonces

$$\boxed{\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{\Omega} div \vec{F}\, dV}$$

donde cada superficie de $\partial\Omega$ está orientada según la normal exterior a Ω.

<u>Observación:</u> $\partial\Omega$ es automáticamente orientable.

El caso de un rectángulo

Supongamos que $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$.
Entonces

$$\int\int\int_{\Omega} div\vec{F}\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right] dz\, dy\, dx$$

Consideremos el último término. Usando el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz\, dy\, dx = \int_a^b \int_c^d F_3(x,y,f)\, dy\, dx$$

$$- \int_a^b \int_c^d F_3(x,y,e)\, dy\, dx$$

La integral

$$\int_a^b \int_c^d F_3(x, y, f)\, dy\, dx$$

puede verse como la integral de flujo

$$\int_a^b \int_c^d F_3(x, y, f)\, dy\, dx = \int \int_{S_{sup}} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

donde S_{sup} es la “cara superior”:
$S_{sup} = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, z = f\}.$

Similarmente

$$-\int_a^b \int_c^d F_3(x,y,e)\,dy\,dx = \int\int_{S_{inf}} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

donde S_{inf} es la “cara inferior”. (Notar el signo “-”).
Luego

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz\,dy\,dx = \int\int_{S_{sup}} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS + \int\int_{S_{inf}} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS.$$

Un cálculo análogo muestra que

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dz\, dy\, dx = \int\int_{S_{izq}} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS + \int\int_{S_{der}} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS.$$

donde S_{izq} y S_{der} son las caras izquierda y derecha respectivamente, y

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dz\, dy\, dx = \int\int_{S_{ant}} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS + \int\int_{S_{post}} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS.$$

donde S_{ant}, S_{post} corresponden a la cara anterior y posterior.

Tomando en cuenta que

$$\partial\Omega = S_{sup} \cup S_{\inf} \cup S_{izq} \cup S_{der} \cup S_{ant} \cup S_{post}$$

se deduce que

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f div\vec{F}\, dz\, dy\, dx = \int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS.$$

div es invariante bajo rotaciones de los ejes

Escribamos $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = \sum_{i=1}^{3} F_i e_i$ donde e_1, e_2, e_3 forman la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Consideremos una base ortonormal v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$.
Entonces

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{F}_i v_i$$

donde

$$\tilde{F}_i = \langle \vec{F}, v_i \rangle$$

Introduzcamos el cambio de variables $x = Ry$ donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad R = [v_1, v_2, v_3] \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(R es de 3×3)
Entonces en las variables y y usando la base v_1, v_2, v_3 el campo se puede expresar como

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^{3} \tilde{F}_i(y) v_i \qquad \tilde{F}_i(y) = \langle \vec{F}(Ry), v_i \rangle$$

Con la notación

$$\tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^{3} \tilde{F}_i(y) v_i \qquad \tilde{F}_i(y) = \langle \vec{F}(Ry), v_i \rangle$$

se tiene

$$\boxed{div \vec{F} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i}}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{3} \langle \frac{\partial F(Ry)}{\partial y_i}, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \langle \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, v_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \langle \frac{\partial F}{\partial x_j} R_{ji}, v_i \rangle \text{ (ya que } x_j = \textstyle\sum_{i=1}^{3} R_{ji} y_i\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} R_{ji} \langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, R_{ki} e_k \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} R_{ji} \langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, R_{ki} e_k \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} R_{ji} R_{ki} \right) \langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_k \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{kj} \langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{3} \langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

ya que $R^T R = I = R R^T$.

Versión local del teorema de la divergencia

Se tiene que para cualquier $x_0 \in \overline{\Omega}$ existe un $R > 0$ (pequeño, que depende de x_0) tal que:
si $\vec{F}$ es un campo C^1 que se anula fuera de $B_R(x_0)$ entonces

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{\Omega} div\vec{F}\, dV$$

El caso $x_0 \in \partial\Omega$

Rotando los ejes podemos suponer que $\hat{n}(x_0) = (1,1,1)/\sqrt{3}$.
Usando la definición de superficie regular y el teorema de la función inversa, existe $R > 0$ tal que la superficie $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ es el grafo de funciones

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq 3$$

es decir

$$\begin{aligned}\partial\Omega \cap B_R(x_0) &= \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 = \varphi_1(x_2,x_3), (x_2,x_3) \in U_1\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) : x_2 = \varphi_2(x_1,x_3), (x_1,x_3) \in U_2\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) : x_3 = \varphi_3(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in U_3\}\end{aligned}$$

$$\int\int\int_{\Omega} div\vec{F}\,dV = \int\int\int_{\Omega\cap B_R(x_0)} div\vec{F}\,dV$$
$$= \int\int\int_{\Omega\cap B_R(x_0)} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right] dV.$$

Veamos el último término: se puede elegir $0 < r < R$ tal que si $\vec{F}$ se anula fuera de $B_r(x_0)$ entonces

$$\int\int\int_{\Omega\cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\,dV = \int\int_{U_3}\int_{\bar{x}_3}^{\varphi_3(x_1,x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\,dx_3\,dx_1 dx_2$$

$$\int\int\int_{\Omega\cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\,dV = \int\int_{U_3}\int_{\bar{x}_3}^{\varphi_3(x_1,x_2)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\,dx_3\,dx_1 dx_2$$
$$= \int\int_{U_3} F_3(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2))dx_1 dx_2.$$

Como $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ se puede parametrizar por $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2))$ tenemos

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_1} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial x_2} = (-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}, 1)$$

Luego, si $\vec{F}$ se anula fuera de $B_r(x_0)$

$$\int\int_{\partial\Omega} (0,0,F_3)\cdot\hat{n}\,dS = \int\int_{U_3} F_3(x_1,x_2,\varphi_3(x_1,x_2))dx_1dx_2.$$

Se deduce que

$$\int\int\int_{\Omega\cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\,dV = \int\int_{\partial\Omega} (0,0,F_3)\cdot\hat{n}\,dS.$$

Similarmente, utilizando la parametrización $\vec{r}(x_1, x_3) = (x_1, \varphi_2(x_1, x_3), x_3)$ se encuentra

$$\int\int\int_{\Omega\cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\, dV = \int\int_{\partial\Omega} (0, F_2, 0) \cdot \hat{n}\, dS.$$

y también

$$\int\int\int_{\Omega\cap B_R(x_0)} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\, dV = \int\int_{\partial\Omega} (F_1, 0, 0) \cdot \hat{n}\, dS.$$

Sumando las fórmulas anteriores

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{\Omega} div\vec{F}\, dV$$

El caso $x_0 \in \Omega$

En este caso basta encontrar un cubo Q de centro x_0 contenido en Ω y luego elegir $R > 0$ pequeño tal que $B_R(x_0) \subseteq Q$.
Podemos aplicar entonces el cálculo en el caso de un cubo y obtener

$$\int\int\int_{\Omega} div\vec{F} = \int\int\int_{Q} div\vec{F} = \int\int_{\partial Q} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS = 0$$

Notar que

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS = 0$$

Versión global

Tenemos: para cada $x \in \overline{\Omega}$ existe un $R_x > 0$ tal que si $\vec{F}$ se anula fuera de $B_{R_x}(x)$ entonces vale la fórmula del teorema de la divergencia.

Usando la compacidad de $\overline{\Omega}$ (cerrado y acotado) podemos encontrar una familia finita de puntos x_i, $1 \leq i \leq m$ con sus respectivos $R_i = R_{x_i} > 0$ tales que

- $\overline{\Omega}$ se puede cubrir por la unión $\cup_{i=1}^m B_{R_i}(x_i)$,
- y para cualquier bola $B_{R_i}(x_i)$, si $\vec{F}$ se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$ entonces vale el teorema.

Para cada bola $B_{R_i}(x_i)$ podemos encontrar una función $\tilde{\eta}_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $\tilde{\eta}_i > 0$ en $B_{R_i}(x_i)$ y $\tilde{\eta}_i$ se anula fuera de la bola.
Para $x \in \overline{\Omega}$ definamos

$$\eta_i(x) = \frac{\tilde{\eta}_i(x)}{\sum_{j=1}^m \tilde{\eta}_j(x)}$$

Entonces

- η_i es C^1 en una vecindad de $\overline{\Omega}$
- η_i se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$
- para cualquier $x \in \overline{\Omega}$: $\quad \sum_{i=1}^m \eta_i(x) = 1.$

Consideremos un campo $\vec{F}$ de clase C^1.

Como $\sum_{i=1}^{m} \eta_i(x) = 1 \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{m}(\eta_i \vec{F})$

Cada función $\eta_i \vec{F}$ es un campo C^1 que se anula fuera de $B_{R_i}(x_i)$ por lo que podemos aplicar la versión local del teorema de la divergencia

$$\int\int_{\partial\Omega} \eta_i \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{\Omega} div(\eta_i F)\, dV$$

Sumando

$$\int\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{m} \eta_i \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} div(\eta_i \vec{F})\, dV$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS &= \int\!\!\int\!\!\int_{\Omega} div\Big(\sum_{i=1}^{m}\eta_i\vec{F}\Big)\,dV \\
&= \int\!\!\int\!\!\int_{\Omega} div(\vec{F})\,dV
\end{aligned}
$$