Control No. 3
Matemáticas Aplicadas

1. (a) Encuentre la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}$$

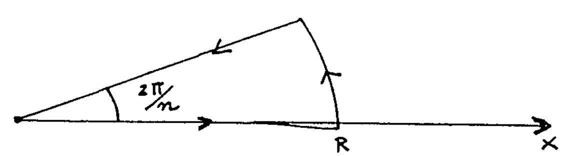
en torno a $z_0 = 1$, en el anillo definido como

$$0 < |z-1| < R.$$

Indique cual es el mayor valor de R para que el desarrollo sea válido.
(b) Muestre que para $n \geq 2$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{sen(\pi/n)}.$$

Use integración sobre el camino de la figura.



Estudie en detalle los límites que se requieran.
(c) Si α es un real tal que $n > 1 + \alpha > 0$, evalúe

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^n}.$$

Ind.: Use el camino de (b).

2. a) Encuentre la serie de Fourier de senos de la función

$$g(x) = -1 - x \quad 0 \leq x \leq 1.$$

b) Encuentre la solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 1 \\ u(1,t) = 2 \end{array}\right\} \qquad t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

usando el método de separación de variables.
c) Encuentre la función

$$v(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$$

y grafíquela. Interprete físicamente considerando u = temperatura.
d) Si a la ecuación en b) se cambia la condición inicial por

$$u(x,0) = f(x).$$

Indique si $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ cambia e interprete físicamente.
Indicación: Al calcular los límites requeridos proceda formalmente **intercambiando** el límite con la serie.

3. a) Encuentre

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-x^2})$$

b) Encuentre la transformada de Fourier $\hat{f}(w)$ de la función

$$f(x) = \frac{x}{4+x^2}$$

para $w < 0$.
Ind.: No necesita analizar en detalle los límites que aparezcan.
c) Si u es solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (x,y) \in I\!R \times (0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = e^{-2|x|} \\ u(x,1) = 0 \end{array}\right\} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Encuentre la transformada $\hat{u}(w,y)$.

Pauta Control 3

Pregunta 1

a) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$

Usamos fracciones parciales

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{Az - 2A + Bz - B}{(z-1)(z-2)}$$

1 pto por fracciones parciales

De aquí:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ -2A - B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -2 \\ B = 3 \end{array}$$

$$f(z) = -2\,\frac{1}{z-1} + 3\,\frac{1}{z-2} = -2\,\frac{1}{z-1} + 3\,\frac{1}{-1+(z-1)} = -\frac{2}{z-1} - \frac{3}{1-(z-1)}$$

1 pto por la serie geométrica

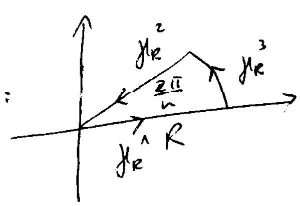
$$\underbrace{= -\frac{2}{z-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n}.$$

Serie de Laurent de f. Converge para $0 < |z-1| < 1 \Rightarrow R = 1$

$\boxed{\text{castigar 0.2 por no decir cuál es } R}$

b) Calculemos

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^n} \quad \text{con} \quad \gamma_R:$$



Primero notemos que:

$$\left|\int_{\gamma_R^3} \frac{dz}{1+z^n}\right| = \left|\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{Rie^{i\theta}\,d\theta}{1+R^n e^{in\theta}}\right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{R^n-1}\,d\theta = \frac{2\pi}{n}\,\frac{R}{R^n-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\gamma_R^3(\theta) = Re^{i\theta} \qquad \theta \in [0, \tfrac{2\pi}{n}]$$

0.5 ptos por este cálculo y límite

Por otro lado

$$-\int_{\gamma_R^2} \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^R \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}}\,dt}{1+t^n e^{2\pi i}} = \left(\int_0^R \frac{dt}{1+t^n}\right) e^{\frac{2\pi i}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_{\gamma_R^1} \frac{dz}{1+z^n}$$

0,5 ptos por relacionar las integrales sobre γ_R^1 y γ_R^2

$$-\gamma_R^2(t) = t\,e^{\frac{2\pi i}{n}} \qquad t \in [0, R]$$

Calculemos $\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4}$ por el método de los residuos.

Las raíces de $1+z^4$ son $e^{\pi i/4 + 2k\pi i/4}$ $k = 0 .. 4-1$,

es decir,

$e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, \dots$ etc,

y la única de ellas encerrada por γ_R es $e^{\pi i/4}$.

Luego $$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, e^{\pi i/4}\right) = 2\pi i \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{1+z^4}$$

$$\overset{(\text{l'Hopital})}{=} 2\pi i \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4 z^{4-1}} = \frac{2\pi i}{4} e^{-\pi i \frac{4-1}{4}}$$

0,5 ptos por el calculo del residuo

$$= \oint_{\gamma_R^1} \frac{dz}{1+z^4} + \oint_{\gamma_R^2} \frac{dz}{1+z^4} + \underbrace{\oint_{\gamma_R^3} \frac{dz}{1+z^4}}_{\to 0 \text{ cuando } R \to \infty}$$

$$= \int_{\gamma_R^1} \frac{dz}{1+z^4} \left(1 - e^{2\pi i/4}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\frac{2\pi i}{4} e^{-\pi i \frac{4-1}{4}}}{1 - e^{2\pi i/4}} = \frac{\frac{2\pi i}{4} e^{-\pi i \frac{4-1}{4}} \cdot e^{-\pi i/4}}{e^{-\pi i/4} - e^{\pi i/4}}$$

0,5 ptos por conclusión.

$$= \frac{\pi/4 \; e^{-\pi i \left(\frac{4-1}{4} + \frac{1}{4}\right)}}{-\operatorname{sen}(\pi/4)} = \frac{\pi/4}{-\operatorname{sen}(\pi/4)} e^{-\pi i} = \frac{\pi/4}{\operatorname{sen}(\pi/4)}.$$

c)

El cálculo es parecido.

Usamos el residuo

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^4}, e^{\pi i/4}\right) = \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{1+z^4} z^\alpha$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} e^{-\pi i \left(\frac{4-1}{4}\right)}}_{\text{este cálculo ya lo hicimos.}} \left(e^{\pi i/4}\right)^\alpha$$

0,5 ptos

$$\left|\int_{\gamma_R^3} \frac{z^\alpha dz}{1+z^n}\right| = \left|\int_0^{2\pi/n} \frac{(Re^{i\theta})^\alpha Rie^{i\theta}d\theta}{1+R^n e^{in\theta}}\right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{\alpha+1}}{R^n-1}\,ds = \frac{2\pi}{n}\,\frac{R^{\alpha+1}}{R^n-1} = \frac{2\pi}{n}\,\frac{1}{R^{n-(\alpha+1)}-R^{-(\alpha+1)}}$$

Para que esto tienda a 0 cuando $R\to\infty$, necesitamos que $n-(\alpha+1)>0$
$\iff n>\alpha+1$.

0,5 ptos por ver que se necesita $n>\alpha+1$, y calcular el límite

Por otro lado

$$-\int_{\gamma_R^2} \frac{z^\alpha dz}{1+z^n} = \int_0^R \frac{t^\alpha (e^{\frac{2\pi i}{n}})^\alpha e^{\frac{2\pi i}{n}}dt}{1+t^n e^{2\pi i}} = \left(\int_0^R \frac{t^\alpha dt}{1+t^n}\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{\alpha+1}$$

$$= \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^\alpha \int_{\gamma_R^1} \frac{z^\alpha dz}{1+z^n}$$

0,5 ptos por esta fórmula

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^1} \frac{z^\alpha dz}{1+z^n}\left(1-\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{\alpha+1}\right) = \frac{2\pi i}{n}\, e^{-\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)}\left(e^{\pi i/n}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^n} = \frac{\frac{2\pi i}{n}\, e^{-\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)}\left(e^{\pi i/n}\right)^\alpha}{1-\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{\alpha+1}}$$

$$= \frac{\frac{2\pi i}{n}\, e^{-\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)}\, e^{\alpha\pi i/n}}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}(\alpha+1)}}$$

$$= \frac{\frac{2\pi i}{n}\, e^{-\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)}\, e^{\alpha\pi i/n}\cdot e^{-\frac{\pi i}{n}(\alpha+1)}}{e^{-\frac{\pi i}{n}(\alpha+1)}-e^{\frac{\pi i}{n}(\alpha+1)}}$$

0,5 ptos por finalizar.

$$= \frac{\pi/n}{-\operatorname{sen}((\alpha+1)\pi/n)}\, e^{\pi i\Big[\underbrace{-\frac{n-1}{n}+\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha+1}{n}}_{=-1}\Big]} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}((\alpha+1)\pi/n)}$$

Pauta Control 3

Pregunta 2

a) La serie en senos para la función

$$g(x) = -x-1 \quad \text{es}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,\text{sen}\,(n\pi x)$$

con $C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l (-x-1)\,\text{sen}\,(n\pi x)\,dx$ con $l=1$

0.7 ptos por la fórmula general

$$= 2\int_0^1 (-x-1)\,\text{sen}\,(n\pi x)\,dx.$$

$$= -2\int_0^1 x\,\text{sen}\,(n\pi x)\,dx - 2\int_0^1 \text{sen}\,(n\pi x)\,dx$$

$$= -2\left[\frac{-x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx\right] + 2\,\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1$$

$$= -2\left[-\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{\text{sen}\,(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\right] + \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}$$

$$= 2\frac{(-1)^n}{n\pi} + 2\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} = \frac{4(-1)^n-2}{n\pi}.$$

0,8 ptos por hacer el cálculo.

b) Buscaremos una solución de la forma

$$u(x,t) = v(x,t) + \alpha x + \beta,$$

donde pediremos que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(0,t) = v(1,t) = 0$$

$$v(x,0) = g(x).$$

y $g(x)$ es tal que $u(x,0) = 0$, es decir

$$g(x) + \alpha x + \beta = 0 \Rightarrow g(x) = -\alpha x - \beta.$$

α y β las encontramos de modo que se cumplan las condiciones de borde:

$1 = u(0,t) = v(0,t) + \beta = \beta \Rightarrow \beta = 1$

$2 = u(1,t) = v(1,t) + \alpha + \beta = \alpha+\beta \Rightarrow \alpha+\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 1.$

Luego $\alpha = \beta = 1$ y $g(x) = -x-1$.

0,5 ptos por determinar α, β y g.

Encontremos ahora v mediante separación de variables:

$v(x) = H(x)\,G(t)$

$\Rightarrow H(x)\,G'(t) = H''(x)\,G(t)$

$$\Rightarrow \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{H''(x)}{H(x)} = -\lambda^2.$$

Luego

$H(x) = A\cos(\lambda x) + B\,\mathrm{sen}(\lambda x)$, pero

$H(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0$

$H(1) = B\,\mathrm{sen}(\lambda) \Rightarrow \lambda_n = n\pi$.

y así encontramos la familia

$H_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}(n\pi x)$

0.3 ptos por encontrar H

La ecuación para G queda

$G'(t) = -\lambda_n^2\,G(t) \Rightarrow G(t) = G(0)\,e^{-\lambda_n^2 t}$

0.3 ptos por encontrar G

y finalmente

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,e^{-\lambda_n^2 t}\,\mathrm{sen}(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,e^{-n^2\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(n\pi x).$$

En $t=0$

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}(n\pi x) = -x-1.$$

0.4 ptos por identificar los C_n.

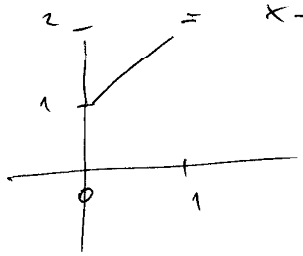
$\Rightarrow$ C_n deben ser los que encontramos en a)

Finalmente $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,e^{-n^2\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(n\pi x) + x + 1$

c) Cuando $t \to \infty$ y si podemos intercambiar límite con integral, vemos que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x) + x + 1 \quad \text{, ya que}$$

1,5 ptos



$= x + 1$

d) Si a la ecuación original se le agrega $u(x,0) = f(x)$, entonces cambiarán los coeficientes C_n, pero el límite sigue siendo el mismo.

1,5 ptos

Pauta Control 3

Pregunta 3

a) Calcular $\widehat{x^2 e^{-x^2}}$.

Gracias a la regla $\widehat{ixf(x)}(y) = \frac{d}{dy}\hat{f}(y) \leftarrow (1)$

vemos que

$$\widehat{x^2e^{-x^2}}(y) = -\widehat{i^2x^2e^{-x^2}}(y)$$

$$= -\frac{d^2}{dy^2}\widehat{e^{-x^2}}(y).$$

0.7 ptos por usar correctamente la propiedad (1)

Por otro lado, se sabe que $\widehat{e^{-\frac{1}{2}x^2}}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}$

$$\widehat{f(x/\lambda)}(y) = \lambda\hat{f}(\lambda y).$$

Aplicando lo anterior con $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sale que

$$\widehat{e^{-x^2}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{e^{-\frac{1}{2}x^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}(y/\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-y^2/4}.$$

0,7 ptos por este cálculo

Luego $\widehat{x^2e^{-x^2}} = -\frac{d^2}{dy^2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-y^2/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dy}\left(-\frac{y}{2}e^{-y^2/4}\right)$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-y^2/4} + \frac{y^2}{4}e^{-y^2/4}\right)$$

$$= +\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-y^2/4}\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)$$

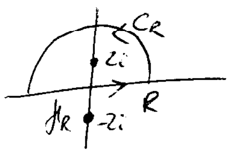
0,6 ptos por el desarrollo siguiente.

b) Calculemos $\hat{f}(\omega)$ donde

$$f(x)=\frac{x}{4+x^2}.$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x e^{-i\omega x}}{4+x^2}\,dx.$$

Para esto usamos integración compleja sobre el camino



Los polos son $2i, -2i$.

0,5 ptos por proponer el camino de la figura.

$$\oint_{C_R\cup I_R}\frac{z e^{-i\omega z}}{4+z^2}\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{z e^{-i\omega z}}{4+z^2}, 2i\right)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\frac{z e^{-i\omega z}}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)}$$

$$= 2\pi i\,\frac{2i\,e^{2\omega}}{4i} = \pi i e^{2\omega}.$$

1 pto por el cálculo del residuo

Se puede ver que cuando $\omega<0$ (nuestro caso)

$$\left|\int_{C_R}\frac{z e^{-i\omega z}}{4+z^2}\,dz\right| \le \int_{C_R}\frac{R}{R^2-4}\left|e^{-i\omega(\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z)}\right|ds$$

$$\le \int_{C_R}\frac{R}{R^2-4}e^{\omega\,\mathrm{Im}\,z}\,ds \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

y luego

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x e^{-i\omega x}}{4+x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,i e^{2\omega}$$

0,5 ptos por terminar correctamente.

En general

$$\widehat{\frac{x}{4+x^2}}(\omega) = -\,\mathrm{signo}(\omega)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,i\,e^{-2|\omega|}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,1) \\ u(x,0) = e^{-2|x|} \\ u(x,1) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos TF con respecto a x

$$(*) \quad -s^2 \hat{u}(s,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(s,y) = 0$$

0,5 ptos por transformar la ecuación

$$(**) \quad \begin{cases} \hat{u}(s,0) = \widehat{e^{-2|x|}}(s) = f(s) \quad (\text{por el momento}) \\ \hat{u}(s,1) = 0 \end{cases}$$

0,3 ptos por transformar las condiciones de borde, sin el cálculo de $\widehat{e^{-2|x|}}$.

Debemos resolver la ecuación diferencial ordinaria con condiciones de borde $(**)$.

La solución general de $(*)$ es

$$\hat{u}(s,y) = A\, e^{sy} + B\, e^{-sy}.$$

0,4 ptos por dar la solución general de $(*)$.

Usando $(**)$ vemos que $\quad A + B = f(s)$

$$A e^{s} + B e^{-s} = 0 \Rightarrow A\, e^{2s} = -B$$

y reemplazando:

$$A - A e^{2s} = f(s) \Rightarrow A = \frac{f(s)}{1-e^{2s}}$$

$$\Rightarrow B = -A e^{2s} = \frac{e^{2s}}{e^{2s}-1} f(s)$$

0,3 ptos por encontrar A, B.

Luego $\quad \hat{u}(s,y) = \left[\dfrac{e^{sy}}{1-e^{2s}} + \dfrac{e^{2s}}{e^{2s}-1} e^{-sy} \right] f(s)$

Calculamos $f(s)$:

$$\widehat{e^{-2|x|}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} e^{-ixs} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{-2x-ixs} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{2x-ixs} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-2x-ixs}}{-2-is} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{2x-ixs}}{2-is} \Big|_{-\infty}^{0} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2+is} + \frac{1}{2-is} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2-\cancel{is}+2+\cancel{is}}{4+s^2} = \frac{4}{4+s^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

0,5 ptos por el cálculo de $\widehat{e^{-2|x|}}$

Finalmente

$$\hat{u}(s,y) = \left[\frac{e^{sy}}{1-e^{2s}} + \frac{e^{2s}}{e^{2s}-1} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{4+s^2}$$