Trabajo Dirigido, 2 de Noviembre
Semestre 2007-2

Profesor: Juan Dávila Auxiliar: Miguel Concha

1. Considere la función $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $u(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy$. Verifique que la función así definida es armónica y encuentre su armónica conjugada.

2.

(a) Pruebe que si $u \in C^3(\mathbb{R})$ es una función armónica entonces $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$ son funciones armónicas.

(b) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en todo el plano complejo. Se define $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x,y) = \mathrm{Re}\left(\bar{z} f(z)\right)$ con la convención $z = x + iy$. Pruebe que g satisface la relación $\Delta\left(\Delta g\right) = 0$.

3. Desarrolle en serie de Fourier la fucnión $f(x) = x^2$ y deduzca que:

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

(iii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

4.

La idea de este problema es resolver una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) por el método de separación de variables. Para ello se procederá a través de los siguientes pasos.

Considere para $\tau > 0$ la ecuación:

$$\text{EDP}\begin{cases} (i) & \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \tau \dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\infty) \\ (ii) & f(0,t) = f(L,t) = 0 & \forall t > 0 \\ (iii) & f(x,0) = x & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

(a) Proponga una solución de la forma $f(x,t) = X(x)T(t)$ y muestre utilizando la ecuación (i) que X, T satisfacen

$$\frac{T'}{T} = \tau \frac{X''}{X} = C$$

En donde C es una constante por determinar.

(b) Resuelva la EDO siguiente para encontrar las soluciones generales de la ecuación anterior.

$$\text{EDO}\begin{cases} X'' = \dfrac{C}{\tau} X \\ T' = CT \end{cases}$$

(c) Imponga las condiciones de borde (ii) y pruebe que las soluciones particulares son:

$$X_k(x) = A_k \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \text{ y } T_k(t) = B_k e^{\tau\left(\frac{\pi l}{L}\right)^2 t}$$

En donde $k \in \mathbb{Z}$ y A_k y B_k son constantes por determinar.

(d) Proponga una solución para la EDP de la forma (¿Por qué es solución?):

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{\tau\left(\frac{\pi l}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

e imponga qué valor deben tener las constantes A_k de modo que se satisfaga la condición inicial (iii).

Para ello note que la solución propuesta para $t = 0$ corresponde a una expanción en serie de Fourier con su k-ésimo término libre e igual a A_k. De este modo tomando A_k el término k-ésimo de la descomposición en serie de Foruier de la función g(x)=x, se obtendrá lo buscado.

Recuerde además que el A_k de la descomposición en serie de Fourier de una función g se calcula con la fórmula:

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) dx$$