Clase Auxiliar
Semestre 2007-2

1. Considere la función $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ y los conjuntos definidos a continuación:

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$

(a) Calcule la serie de potencias de f en torno a 0 en D_1

(b) Calcule la serie de Laurent de f en D_2

(c) Calcule la serie de Laurent de f en D_3

2. Sean u, v funciones armónicas en $\mathbb{R}^2$. ¿Bajo qué condiciones uv es una función armónica?. Pruebe que entonces u^2 es armónica sólo si u es constante.

3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función Holomorfa en todo Ω talque $f(s+it) = u(s,t) + iv(s,t)$. Pruebe que si ϕ es un función armónca en $f(\Omega)$ entonces $\varphi = \phi\,(u(s,t), v(s,t))$ es un afunción armónica en Ω.

4. Dada una función $f = u + iv$, se define el laplaceano de f por $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$. Si $\Delta f = 0$ se dice que f es armónica (es claro que para que f sera armónica se debe tener que u y v deben ser dos veces diferenciables). La idea es probar que f es holomorfa si y sólo si f y zf son armónicas.

Definamos los operadores diferenciales $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ por

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(a) Pruebe que si f es holomorfa entonces f es armónica.

(b) Pruebe que $f = u + iv$ satisface Cauchy Riemman si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

(c) Prube que si f es armónica entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$

(d) Pruebe que $\dfrac{\partial^2 zf}{\partial z \partial \bar{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$

(e) Pruebe que si f y zf son armónicas entonces f es holomorfa.