CONTROL 2 MA26B

Otoño 1997

Pregunta 1

a) Demuestre que la función
$$u(x,y) = \log(x^2+y^2), \quad (x,y) \in \Omega$$
es armónica y encuentre sus armónicas conjugadas. Aquí $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\ /\ x \leq 0\}$.

b) Calcular de dos maneras distintas la integral
$$\oint_C \frac{dz}{z},$$
donde C es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, para concluir que
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2 \mathrm{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

Pregunta 2

a) Encuentre una fórmula para $\arccos(z)$ y calcule su derivada.

b) Encuentre la serie de potencias en torno a 0 de la función
$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{(\xi-1)(\xi-2)}\, d\xi, \quad |z| < 1.$$
Calcule el radio de convergencia de la serie.
Indicación. Use fracciones parciales.

Pregunta 3 Considere la función
$$f(z) = \frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{z^2} = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \mathrm{sen}(\pi z)}$$

a) (4 ptos.) Muestre que los polos de f son todos los puntos $k \in \mathbb{Z}$. Encuentre el orden de cada uno de los polos y muestre que
$$\mathrm{Res}(f,k) = \begin{cases} \frac{1}{\pi k^2} & k \neq 0 \\ -\frac{\pi}{3} & k = 0 \end{cases}$$

b) (1 pto.) Para $n \in \mathbb{N}$ designaremos por γ_n el círculo de centro 0 y radio $n + 1/2$. Pruebe que
$$\oint_{\gamma_n} f(z)\, dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)$$

c) (1 pto.) Demuestre que
$$\oint_{\gamma_n} f(z)\, dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
y deduzca a partir de esto el valor de la sarie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Indicación. En c) puede utilizar el siguiente hecho sin demostrarlo:
$$\text{existe } M > 0 \text{ tal que} \quad |\mathrm{cotg}(\pi z)| \leq M \quad \forall z \in \gamma_n \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

Pauta control 2, pregunta 1

a) Demuestre que la función

$$u(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

es armónica y encuentre su armónica conjugada.

b) Calcule de dos maneras distintas la integral

$$\oint_C \frac{dz}{z}$$

donde C es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, para concluir que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

Solución

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4(x^2+y^2) - 4x^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$, por lo tanto u es armónica (1 pto)

Cálculo de la armónica conjugada v.

1ª condición $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. (0,5 ptos) (por la condición)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{2}{x} \frac{1}{1+y^2/x^2} \Rightarrow v(x,y) = 2\operatorname{arctg}(y/x) + c(x)$$

2ª condición: $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. (0,5 ptos) (por la condición)

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2+y^2} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + c'(x)$$

$\Rightarrow c'(x) = 0$

y 1 pto más por hacer bien el desarrollo.

$\Rightarrow v(x,y) = 2\operatorname{arctg}(y/x) + \text{cte}.$

b) Usando el teorema de los residuos, o cambiando la elipse C por un círculo de centro 0 (y usando el teorema de Cauchy) o usando la fórmula de Cauchy:

$$(**) \quad \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

(1 pto, no es necesario ningún desarrollo, basta un argumento)

Por otro lado, parametrizemos la elipse C mediante

$$\gamma(\theta) = a\cos\theta + ib\,\text{sen}\,\theta \quad , \theta \in [0, 2\pi].$$

(0,5 ptos, por parametrizar correctamente)

Por definición tenemos entonces

$$(*) = \oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\,\text{sen}\,\theta + ib\cos\theta}{a\cos\theta + ib\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-a\,\text{sen}\,\theta + ib\cos\theta}{a\cos\theta + ib\,\text{sen}\,\theta} \cdot \frac{a\cos\theta - ib\,\text{sen}\,\theta}{a\cos\theta - ib\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta$$

Escribamos sólo la parte imaginaria de esta integral:

$$\text{Im}\,(*) = \int_0^{2\pi} \frac{ab\cos^2\theta + ab\,\text{sen}^2\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta}\, d\theta$$

Igualando las partes imaginarias de ambos lados de $(**)$ se tiene

$$ab\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta}\, d\theta = 2\pi \iff \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{ab}.$$

1,5 ptos más por el desarrollo y concluir correctamente.

Pauta control 2, pregunta 2

a) Encuentre una fórmula para $\arccos(z)$ y calcule su derivada

b) Encuentre la serie de potencias en torno a 0 de la función

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{(\xi-1)(\xi-2)}\, d\xi, \qquad |z|<1$$

Calcule el radio de convergencia de la serie.

Solución

a) Dado $u \in \mathbb{C}$ queremos encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que $\cos z = u$.
Usando $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$, debemos resolver la ecuación (en z)

$$e^{iz}+e^{-iz} = 2u$$ (0,5 ptos por plantear la ecuación)

$$\Leftrightarrow \quad (e^{iz})^2 - 2u\, e^{iz} + 1 = 0$$

$$e^{iz} = u \pm (u^2-1)^{1/2}$$. Nos quedamos con una de las raíces:

$$e^{iz} = u + (u^2-1)^{1/2}$$

$$iz = \log(u+(u^2-1)^{1/2})$$

$$z = -i\log(u+(u^2-1)^{1/2})$$ (1,5 ptos por resolverla correctamente)

$$\therefore \quad \arccos u = -i\log(u+(u^2-1)^{1/2})$$

Para calcular la derivada, lo más fácil es notar que

$$\arccos(\cos(z)) = z$$

$$\Rightarrow -\arccos'(\cos(z))\,\text{sen}(z) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \arccos'(u) = \frac{-1}{\text{sen}(\arccos(z))} = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}$$ (1 pto por la derivada)
(También se puede derivar la fórmula).

b) Primero separemos $\frac{1}{(\xi-1)(\xi-2)}$ usando fracciones parciales:

$$\frac{A}{\xi-1} + \frac{B}{\xi-2} = \frac{A\xi - 2A + B\xi - B}{(\xi-1)(\xi-2)} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \end{array}$$

Luego $$\underbrace{\frac{1}{(\xi-1)(\xi-2)} = \frac{-1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi-2}}_{\text{(1 pto. por separar mediante fracciones parciales)}} = \frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{2-\xi} = \sum_{n\geq 0} \xi^n + \frac{-1/2}{1-\xi/2}$$

$$\frac{1}{(\xi-1)(\xi-2)} = \sum_{n\geq 0} \xi^n + (-1/2) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \xi^n$$

(1 pto por encontrar ambas series, 0.5 por cada 1)

$$= \sum_{n\geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\xi^n = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \xi^n$$

La serie converge para $|\xi|<1$ y $|\xi/2|<1$, es decir para $|\xi|<1$.
$\Rightarrow$ radio de convergencia es 1.

(0.5 ptos por el radio de convergencia)

Luego $f(z) = \int_0^z \sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \xi^n \, d\xi$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}(n+1)} z^{n+1}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{2^n-1}{n2^n} z^n.$$

(0.5 ptos por integrar)

Algunos pueden deducir el radio de convergencia directamente de aquí:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-1}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{2^n-1}} = 1.$$

Pauta Pregunta 3, Control 2

a) Claramente $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{z^2 \operatorname{sen} \pi z}$ es no analítica sólo en los puntos $p_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Veamos que estos puntos son polos. Distinguimos $p_k \neq 0$ y 0:

→ 0 es polo pues (0,5 ptos por ver que 0 es polo y el orden)

$$\lim_{z \to 0} z^3 \frac{\cos \pi z}{z^2 \operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \cos \pi z \quad \text{existe.}$$

Más aun, el orden de 0 es 3.

→ $p_k \neq 0$ es polo pues (0,5 ptos por ver que $k \neq 0$ es polo y el orden)

$$\lim_{z \to p_k} (z - p_k) \frac{\cos \pi z}{z^2 \operatorname{sen} \pi z} \underset{\text{l'Hopital}}{=} \frac{\cos \pi p_k}{p_k^2} \lim_{z \to p_k} \frac{1}{\pi \cos \pi z} \quad \text{existe}$$

y el orden del polo es 1.

Cálculo de residuos.

→ 0 Como el orden es 3, el residuo se calcula como

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z).$$

Calculamos $$\frac{d}{dz} \frac{z \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{(\cos \pi z - z \pi \operatorname{sen} \pi z) \operatorname{sen} \pi z - z \pi \cos^2 \pi z}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$$

$$= \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} - \frac{z \pi}{\operatorname{sen}^2 \pi z}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{z \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} - \frac{z \pi}{\operatorname{sen}^2 \pi z} \right)$$

$$= \frac{-\pi \operatorname{sen}^2 \pi z - \pi \cos^2 \pi z}{\operatorname{sen}^2 \pi z} - \frac{\pi \operatorname{sen}^2 \pi z - z \pi^2 2 \operatorname{sen} \pi z \cos \pi z}{\operatorname{sen}^4 \pi z}$$

$$= \frac{-\pi}{\operatorname{sen}^2 \pi z} - \frac{\pi}{\operatorname{sen}^2 \pi z} + \frac{2z\pi^2 \cos \pi z}{\operatorname{sen}^3 \pi z}$$

$$= \frac{-2\pi \operatorname{sen} \pi z + 2z\pi^2 \cos \pi z}{\operatorname{sen}^3 \pi z}$$

Calculamos $\lim\limits_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{-2\pi \operatorname{sen} \pi z + 2z\pi^2 \cos \pi z}{\operatorname{sen}^3 \pi z}$

$$\overset{(\text{l'Hôpital})}{=} \lim_{z \to 0} \frac{\cancel{-2\pi^2 \cos \pi z} + \cancel{2\pi^2 \cos \pi z} - 2z\pi^3 \operatorname{sen} \pi z}{3\pi \operatorname{sen}^2 \pi z \cos \pi z}$$

$$= \lim_{z \to 0} -\frac{2}{3}\pi \, \frac{z\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \cdot \frac{1}{\cos \pi z} = -\frac{2}{3}\pi \Rightarrow \operatorname{Res}(f,0) = -\frac{\pi}{3}$$

(2,5 ptos por este residuo)

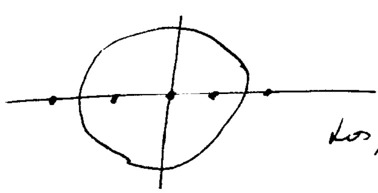
$\to p_k$. Aquí el cálculo es más simple:

$$\operatorname{Res}(f, p_k) = \lim_{z \to p_k} (z - p_k) \frac{\cos \pi z}{z^2 \operatorname{sen} \pi z} = \frac{\cos \pi p_k}{p_k^2} \lim_{z \to p_k} \frac{1}{\pi \cos \pi z}$$

$$= \frac{1}{\pi p_k^2} = \frac{1}{\pi k^2}$$

(0,5 ptos por este residuo)

b) Tenemos, gráficamente



Los polos encerrados por γ_n son $-n, -n+1, \ldots, 0, 1 \ldots, n-1, n$; luego, por el teorema de los residuos

$$\oint_{\gamma_n} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,0) + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(f,k) \right)$$

(0,5 ptos por la fórmula de los residuos).

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\pi + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,k) + \sum_{k=-n}^{-1} \operatorname{Res}(f,k) \right)$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{k^2} \right)$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right).$$

(0,5 por concluir correctamente)

c) Usamos la desigualdad de la indicación

$$\left|\oint_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| \leq \oint_{\gamma_n} \frac{|\cot \pi z|}{|z|^2}\,ds \leq \frac{M}{(n+1/2)^2} \oint_{\gamma_n} ds = \frac{2\pi M\,(n+1/2)}{(n+\frac{1}{2})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(0,5 ptos por un desarrollo correcto)

De b) vemos que

$$-\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(0,5 ptos por concluir correctamente)