Guía de Ejercicios 1. **MA26B Matemáticas Aplicadas**. Semestre 2007-2

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Omar Larre, Victor Riquelme.

Cálculo Vectorial

P1. (a) Sea Γ la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio R_0, la cual rueda sin resbalar sobre otra circunferencia de radio mayor $R > R_0$. Parametrice la curva resultante y determine la función de longitud de arco. Estudie la curvatura y la torsión donde tenga sentido.

(b) Parametrizar la circunferencia que pasa por los puntos $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Indicación : Note que el vector $(1,1,1)$ es normal al plano que contiene a la circunferencia.

P2. Dada una función continua y no nula $g:[0,\ell_0]\to\mathbb{R}$, pruebe que existe una curva plana $\Gamma\subset\mathbb{R}$ de longitud ℓ_0 tal que su curvatura está dada por $|g|$. Indicación : Defina

$$\theta(s)=\int_0^s g(u)du,\quad x(s)=\int_0^s \cos\theta(u)du,\quad y(s)=\int_0^s \sin\theta(u)du$$

y estudie $\vec{r}(s)=x(s)\hat{\imath}+y(s)\hat{\jmath}$.

P3. **Espirales de MacLaurin.** Corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descrita en coordenadas polares las variables ρ y θ satisfacen la relación

$$\rho(\theta)=a\left(\sin(n\theta)\right)^{\frac{1}{n}}$$

donde $a>0$ y $n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ corresponde al orden de la espiral. Pruebe que la curvatura de una espiral de MacLaurin de orden n es:

$$k(\theta) \;=\; \frac{n+1}{a}\left(\sin(n\theta)\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

P4. Considere la curva plana Γ descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho \;=\; a\left(1-\cos(\theta)\right)\quad a>0,\ \theta\in[0,2\pi]$$

(i) Encuentre una parametrización para Γ. Gráfique esta parametrización detalladamente y encuentre sus posibles irregularidades.

(ii) Calcule el largo de Γ.

(iii) Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F} \;=\; \left(2xy^2\cos\left(x^2y^2\right)+\frac{2x}{x^2+y^2+1},2x^2y\cos\left(x^2y^2\right)+\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$$

al dar una vuelta completa a la curva en el sentido anti-horario.

P5. Calcule el área de la intersección entre $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+z^2=a^2$ donde a es una constante.

P6. Considere el paraboloide de ecuación $x^2+y^2+z=4R^2$ con $R>0$ y el cilindro $x^2+y^2=2Ry$. Calcule el área de la superficie definida por la porción del cilindro que queda fuera del paraboloide.

P7. Sea Γ una curva suave y regular. Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ su parametrización en longitud de arco. Sea S la superficie definida por

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &: [0, \ell(\Gamma)] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{\phi}(s,\theta) &= \vec{r}(s) + a\cos(\theta)\vec{B}(s) - a\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{N}(s) \end{aligned}$$

donde $a > 0$ constante y $\vec{N}(s), \vec{B}(s)$ denota el vector normal y binormal de Γ, respectivamente. Suponga que $a\kappa(s) < 1$, donde $\kappa(s)$ es la curvatura de Γ en longitud de arco. Demuestre que

$$\iint_S dA = 2\pi a \ell(\Gamma)$$

P8. Calcular la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$, cuando la densidad de masa es igual a la distancia de (x,y,z) a un punto fijo (x_0, y_0, z_0).

P9. (a) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x - y\cos z, y - x, z - e^y)$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z, centrado en el origen y de radios R_0 y r_0 ($R_0 > r_0$).

(b) Calcular la integral de superficie $\iint_\Sigma \nabla\phi \cdot d\vec{S}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y ϕ es el campo escalar $\phi(x,y,z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$.

P10. Sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 tal que:

$$\left\| \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) \right\| \leq \frac{1}{\|\overrightarrow{r}\|^b + 1} \qquad \forall \overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^3$$

con $b > 2$. Demuestre que:

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} div(\overrightarrow{F}) = 0$$

Indicación: Escriba el teorema de la divergencia para el campo $\overrightarrow{F}$ en la bola de centro en el origen y radio R y acote adecuadamente el módulo de la integral de superficie, haga luego el límite de $R \to \infty$ y conluya.

P11. Calcule el flujo del campo $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ a través de la cara curva de cuarto de cono, ubicado en el octante positivo, con base $B = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a,\ z = 0\}$ y vértice en $(0,0,h)$.

Indicación: Calcule $\mathrm{div}(F)$.

P12. Sea $v(x,y,z) = r^2(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule usando el Teorema de la Divergencia:

$$\int_S \vec{v} \cdot \hat{n},$$

donde S es la superficie de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

P13. Consideremos una región $R \subset \mathbb{R}^3$ encerrada por un superficie suave S y ocupada por dos gases cuyas distribuciones de temperatura están dadas por las funciones $u(x,y,z,t)$ y $v(x,y,z,t)$ de clase C^2 (donde $u(x,y,z,t)$ es la temperatura de la partícula del primer gas que en el instante t ocupa la posición (x,y,z), lo cual es análogo para $v(x,y,z,t)$).

Se sabe que las funciones de distribución de temperatura satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - k(u - v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v - l(v - u) \end{aligned}$$

donde k y l son constantes estrictamente positivas.

Se sabe también que sobre la superficie S se tiene:

$$\nabla u \cdot \widehat{n} = \nabla v \cdot \widehat{n} = 0,$$

donde $\widehat{n}$ es la normal esterior a la superficie S. También es conocido que en $t = 0$ la temperatura de cada gas es constante en toda la región R. Denote por u_0 la temperatura del primer gas en $t = 0$ y por v_0 la del segundo en el mismo instante.

(a) Si definimos las siguientes funciones de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

$$U(t) = \int\int\int_R u(x, y, z, t)dxdydz \qquad V(t) = \int\int\int_R v(x, y, z, t)dxdydz$$

Demuestre que U y V cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dU}{dt} = -k[U(t) - V(t)] \qquad \frac{dV}{dt} = -l[V(t) - U(t)]$$

Indicación: Use la regla de derivación de Leibnitz y la definición del Laplaciano.

(b) Demuestre que $lU(t) + kV(t) = (lu_0 + kv_0)vol(R), \forall t > 0$.

Indicación: Primero demuestre que es constante, manipulando las ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente, y luego evalúe la condición inicial.

(c) Demuestre que:

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = \frac{(lu_0 + kv_0)}{k + l} vol(R)$$

Indicación: A partir de 1), encuentre una ecuación diferencial para $U(t) - V(t)$, resuélvala, y llegue a $U(t) - V(t) \to 0$, y aplique esto a lo obtenido en 2), luego concluya.

(d) Asuma ahora que las distribuciones de temperatura son independientes del tiempo. Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} \Delta u &= k(u - v) \\ \Delta v &= l(v - u) \end{aligned}$$

demuestre que $w \equiv \bar{u} - \bar{v} = 0$ en R. Para esto demuestre que $\Delta w = (k + l)w$ en R y que $\nabla w \cdot \vec{n} = 0$ en S. Para concluir que $w \equiv 0$, use la identidad

$$div(g\nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f$$

y el Teorema de la Divergencia.

P14. (a) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que

$$\text{rot}\, \vec{F}(a) \cdot \hat{n} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\mathcal{C}_r} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

con $\mathcal{C}_r$ el círculo de radio r, centro en a, que vive en el plano de normal $\hat{n}$.

(b) Use el resultado anterior para calcular rot $\vec{F}(0)$ con $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, x_2)$ (use $\hat{n} = \vec{e}_i, i = 1, 2, 3$).

P15. Sea Γ una curva simple, cerrada y regular por pedazos que se encuentra inmersa en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calcular el trabajo realizado por la acción de una fuerza $\vec{F}(x, y, z) = (2y^2, x^2, 3z^2)$ a lo largo de Γ.

P16. Utilice el teorema de Green en el plano para calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

Indicación: considere la curva plana parametrizada por $x = 8\cos^3\theta$ y $y = 8\,\text{sen}^3\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

P17. (a) Sea el campo

$$F(x,y,z) = (\operatorname{sen}(x+y), \sqrt{x^2+z^2}+y, -z\cos(x+y)).$$

Calcule el flujo de F sobre la semiesfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y \geq 0$.

(b) Para $k \geq 2$ entero definamos la curva

$$\vec{r}(t) = \{ka\cos(t) - b\cos(kt), ka\operatorname{sen}(t) - b\operatorname{sen}(kt)\}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

(i) Verifique que es cerrada y muestre que si la curva no es regular entonces $a = b$ y que posee $k-1$ puntos no regulares. Finalmente encuentre los valores de t en los cuales la curva no es regular.
Se puede probar (no lo haga) que cuando $a \geq b$ la curva es simple y que cuando $a < b$ la curva no es simple.

Tomemos en lo que sigue el caso de una curva simple y regular con $b = a/2$.

(ii) Muestre que la longitud de la curva es:

$$L = \frac{ka}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4\cos((k-1)t)}\, dt.$$

(iii) Muestre usando el Teorema de Green que el área encerrada por una curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t = [0, 2\pi)$, esta dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-y(t)x'(t) + x(t)y'(t))\, dt.$$

En particular muestre que el área encerrada por la curva definida arriba es $A = \frac{\pi}{2}(4k+1)ka^2$.

P18. Las ecuaciones de Euler de un fluido $\vec{v}$ en régimen estacionario y en presencia de un campo gravitacional vienen dadas por

$$\rho\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} + \nabla p = -\rho g\widehat{k},$$

donde g es la aceleración de gravedad (constante).

(a) Demuestre la identidad vectorial

$$\nabla\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}).$$

(b) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible ($\rho \equiv$ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho(v_1^2+v_2^2+v_3^2) + p + \rho g z = \text{constante}.$$

(c) Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura $h > 0$. En el fondo del estanque se practica una abertura de radio $\varepsilon << R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique brevemente las aproximaciones que haga.