Control 1 MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

2 de septiembre de 2004

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

Problema 1. a) Sea $r(s) = (x(s), y(s), 0)$ una curva plana parametrizada con respecto a longitud de arco con curvatura $k > 0$ constante y tal que

$$r(0) = (0,0,0), \quad T(0) = (0,1,0), \quad N(0) = (-1,0,0).$$

i) (1.5 ptos.) Pruebe, utilizando las fórmulas de Frenet, que

$$\frac{d^2T}{ds^2} + k^2 T = 0.$$

ii) (1.5 ptos.) Encuentre $r(s)$ explícitamente.

b) Considere el campo vectorial conservativo

$$\vec{G}(x,y,z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \operatorname{sen} x - 4, 3xz^2 + 2).$$

i) (2 ptos.) Encuentre g tal que $\nabla g = \vec{G}$.

ii) (1 pto.) Calcule $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2\pi - t}\cos t \\ y(t) &= \sqrt{2\pi - t}\operatorname{sen} t \\ z(t) &= t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Problema 2. a) (4.5 ptos.) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z \sin y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, x^2)$$

a través del manto del cono de ecuación $z = r - 1$, $-1 \leq z \leq 0$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) (1.5 ptos.) ¿Es el campo $\vec{F}$ de la parte anterior el rotor de un campo $\vec{G}$ de clase C^2?

Problema 3. Considere el toro de radio mayor R y de radio menor a, donde $R > a > 0$ son constantes. Sea Σ la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la cual orientamos según la normal exterior al toro.

a) (3 ptos.) Demuestre que si $\vec{F}$ es un campo continuamente diferenciable en Σ, entonces se satisface:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C_1 y C_2 son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$ respectivamente, con $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$, $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ y $z_2 = -z_1$, ambas orientadas en el sentido antihorario.

b) (3 ptos.) Para el campo $\vec{F} = (e^{-z^2}/\rho)\hat{\rho} + z\hat{\theta} + z\sin(\theta)\cos^2(\theta)\hat{k}$ calcule:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA.$$

TIEMPO: 3 HORAS.

FORMULARIO

Curvas

s: parámetro de longitud de arco, T: vector tangente unitario, N: vector normal unitario, B: vector binormal, κ: curvatura, τ: torsión

Se tiene

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$$
$$\frac{dB}{ds} = -\tau N.$$

Operadores diferenciales

Si F y G son campos C^1, f es C^1 escalar

$$\nabla \cdot (fF) = \nabla f \cdot F + f \nabla \cdot F$$
$$\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f \nabla \times F$$
$$\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)$$

Divergencia y rotor en algunas coordenadas

Divergencia en cilíndricas:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Divergencia en esféricas:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \operatorname{sen}\theta)$$

Rotor en cilíndricas:

$$\nabla \times F = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}$$

Rotor en esféricas:

$$\nabla \times F = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi \rho \operatorname{sen}\theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\theta \rho)\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho}(F_\varphi \rho \operatorname{sen}\theta)\right)\hat{\theta}$$
$$+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(F_\theta \rho) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right)\hat{\varphi}$$