Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 4 de Septiembre de 2003.

Profs.: Salomón Alarcón y Felipe Alvarez.
Tiempo: 3:15 hrs.

CONTROL 1: MA26B-01 Matemáticas Aplicadas 2003

Problema 1.

(a) Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada por $\vec{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = \operatorname{sen} t\hat{\imath} + [\cos t + \ln \tan(t/2)]\hat{\jmath}$.

(a.1) (1.5 ptos.) Calcule $\dot{\vec{r}}(t)$ y muestre que $\vec{r}(t)$ es regular salvo en $t = \pi/2$.

(a.2) (1.5 ptos.) Dado $t_0 \in [0, \pi/2[$, encuentre la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $\vec{r}(t_0)$. Sea $P_0 = (0, y_0)$ el punto de intersección de esta recta tangente con el eje OY. Pruebe que la longitud del segmento de la tangente entre $\vec{r}(t_0)$ y P_0 es igual a 1.

(b) Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L]$, $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa'(s) \neq 0$, donde $\tau(s)$ es la torsión y $\kappa'(s)$ es la derivada con respecto a s de la curvatura $\kappa(s)$ en el punto $\vec{\sigma}(s)$.

(b.1) (1.5 ptos.) Pruebe que si Γ pertenece a una esfera (i.e. existen $a > 0$ y $\vec{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\vec{\sigma}(s) - \vec{p}_0\| = a$) entonces

$$R(s)^2 + (R'(s)/\tau(s))^2 \equiv \text{ constante}, \tag{1}$$

donde $R(s)$ es el radio de curvatura en el punto $\vec{\sigma}(s)$.

(b.2) (1.5 ptos.) Demuestre la recíproca: si $\vec{\sigma}(s)$ satisface (1) entonces Γ pertenece a una esfera. Ind.: pruebe que si se tiene (1) entonces la función $\vec{p}(s) := \vec{\sigma}(s) + R(s)N(s) + R'(s)/\tau(s)B(s)$ es constante (con $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ los vectores tangente, normal y binormal respectivamente).

Problema 2.

(a) Considere el casquete elipsoidal S dado por $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ $(a, b, c > 0)$.

(a.1) (1.0 pto.) Pruebe que el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está dado por $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

(a.2) (1.0 pto.) Pruebe que la recta que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y que es perpendicular al plano de la parte (a.1) está dada por $\frac{xa^2}{x_0} = \frac{yb^2}{y_0} = \frac{zc^2}{z_0}$.

(a.3) (1.0 pto.) Verifique que las proyecciones ortogonales del origen sobre los planos tangentes a S satisfacen la ecuación $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

(b) (3.0 ptos.) Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z^2(x^2 + y^2) = y^2$, $x, y, z \geq 0$. Calcule el trabajo de $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{xy}{x^2+y^2}\hat{\jmath} + e^z\hat{k}$.

Problema 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie caracterizada por $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

(a) (2.0 ptos.) Encuentre una parametrización regular de S y obtenga un campo de normales a S. Bosqueje S en un gráfico.

(b) (2.0 ptos.) Calcule la masa y determine el centro de masa de S, asumiendo una densidad superficial de masa dada por $f(x, y, z) = 1/\sqrt{1 + 2z}$.

(c) (2.0 ptos.) Calcule el flujo a través de S orientada según el campo de normales obtenido en (a), para el campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\jmath} + \hat{k}$.