

# Control 1 MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

2 de Septiembre de 2004

## Pauta

### Problema 1

- a) Sea  $r(s) = (x(s), y(s), 0)$  una curva plana parametrizada con respecto a longitud de arco con curvatura  $k > 0$  constante y tal que

$$r(0) = (0, 0, 0), \quad T(0) = (0, 1, 0), \quad N(0) = (-1, 0, 0).$$

- i) (1.5 ptos.) Pruebe, utilizando las fórmulas de Frenet, que

$$\frac{d^2 T}{ds^2} + k^2 T = 0.$$

- ii) (1.5 ptos.) Encuentre  $r(s)$  explícitamente.

- b) Considere el campo vectorial conservativo

$$\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2).$$

- i) (2 ptos.) Encuentre  $g$  tal que  $\nabla g = \vec{G}$ .

- ii) (1 pto.) Calcule  $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$  donde  $C$  es la curva

$$x(t) = \sqrt{2\pi - t} \cos t$$

$$y(t) = \sqrt{2\pi - t} \sin t$$

$$z(t) = t \quad t \in [0, 2\pi].$$

### Solución.

- a) i) Usando la relación entre la derivada del vector tangente  $T$  y el vector normal  $N$  y el hecho de que la curvatura es constante:

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N \implies \frac{d^2 T}{ds^2} = \kappa \frac{dN}{ds}$$

Pero por Frenet, y dado que la curva es plana lo que asegura que la torsión  $\tau$  de la curva es idénticamente nula, se sigue que:

$$\frac{d^2 T}{ds^2} = \kappa [-\kappa T + \tau B] = -\kappa^2 T,$$

es decir

$$\frac{d^2 T}{ds^2} + \kappa^2 T = 0. \quad (0.1)$$

ii) La ecuación (??), dado que  $\kappa > 0$  es un número real, tiene la conocida solución

$$T(s) = A \operatorname{sen}(\kappa s) + B \cos(\kappa s) \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}^3.$$

Dado que  $T'(s) = \kappa N$  se tienen las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} T(0) &= (0, 1, 0) = \hat{j} = B \\ T'(0) &= \kappa N(0) = \kappa(-1, 0, 0) = -\kappa \hat{i} = \kappa A \end{aligned}$$

de donde  $A = -\hat{i}$ ,  $B = \hat{j}$ . De esta manera el vector tangente queda definido por  $T(s) = (-\operatorname{sen}(\kappa s), \cos(\kappa s), 0)$  y dado que la parametrización está dada en longitud de arco se tiene que  $r'(s) = T(s)$  por lo que, integrando esta ecuación:

$$\begin{aligned} x(s) &= -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s) + x_0 \\ y(s) &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{sen}(\kappa s) + y_0. \end{aligned}$$

Finalmente como  $r(s=0) = (0, 0, 0)$  entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{\kappa} \\ y_0 &= 0, \end{aligned}$$

y la parametrización queda:

$$r(s) = \frac{1}{\kappa} (\cos(\kappa s) - 1, \operatorname{sen}(\kappa s), 0).$$

b) Tenemos  $\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \operatorname{sen} x - 4, 3xz^2 + 2)$ .

i) Buscamos  $g$  talque  $\nabla g = \vec{G}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= y^2 \cos x + z^3 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + z^3 x + h_1(y, z) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y \operatorname{sen} x - 4 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x - 4y + h_2(x, z) \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 3xz^2 + 2 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, z) = 2z + xz^3 + h_3(x, y). \end{aligned}$$

Comparamos y proponemos

$$g(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + z^3 x - 4y + 2z,$$

y se verifica directamente que  $\nabla g = \vec{G}$ .

ii) La curva se recorre desde  $\vec{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (\sqrt{2\pi}, 0, 0)$  hasta  $\vec{r}(2\pi) = (0, 0, 2\pi)$ .

Dado que  $\vec{G}$  es un campo conservativo con potencial asociado  $g$ :

$$\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla g \cdot d\vec{r} = g(\vec{r}(2\pi)) - g(\vec{r}(0)) = 4\pi.$$

## Problema 2

- a) (4.5 ptos.) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^z \sin y + xy^2z, e^x \cos z + x^2yz, x^2)$$

a través del manto del cono de ecuación  $z = r - 1$ ,  $-1 \leq z \leq 0$ , donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- b) (1.5 ptos.) ¿Es el campo  $\vec{F}$  de la parte anterior el rotor de un campo  $\vec{G}$  de clase  $C^2$ ?

### Solución.

- a) Dado que el cono se describe por la ecuación en coordenadas cilíndricas  $z = r - 1$ ,  $z \in [-1, 0]$ , para  $z = -1$  se tiene  $r = 0$  (el vértice del cono está en  $(0, 0, -1)$ ) y la base del cono está situada en el plano  $XY$ , siendo un círculo de radio 1 y centrado en el origen. Podemos considerar así la superficie cerrada que encierra al cono (manto + base).

Es claro que el campo  $\vec{F}$  es de clase  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  por álgebra de funciones y luego, si orientamos la superficie del cono según la normal exterior, podemos aplicar el teorema de la divergencia a esta situación:

$$\nabla \cdot \vec{F} = (y^2z) + (x^2z) + 0 = z(x^2 + y^2) = r^2z,$$

donde al final usamos coordenadas cilíndricas. Se tiene entonces que, denotando  $M$  al manto del cono,  $B$  a la base del cono y  $C$  al cono:

$$\int_M \vec{F} \cdot \hat{n} ds + \int_B \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_C \nabla \cdot \vec{F} dv$$

puesto que  $dv = r dr dz d\theta$  en coordenadas cilíndricas. Calculemos

$$\begin{aligned} \int_C \nabla \cdot \vec{F} dv &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \int_0^{z+1} (r^2z) r dr dz d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^0 \frac{(z+1)^4 z}{4} dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 s^4 (s-1) ds \quad (\text{cambio de variables } z+1 = s) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (s^5 - s^4) ds \\ &= -\frac{\pi}{60}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos el flujo del campo por la base del cono, observando que el vector normal exterior al cono en esta superficie viene dado por  $\hat{k}$ . Luego  $\vec{F} \cdot \hat{n} = x^2 = r^2 \cos^2 \theta$  en

coordenadas polares. De este modo

$$\begin{aligned}\int_B \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Hemos utilizado el hecho que  $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi$  lo que se puede obtener de la identidad  $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ .

Finalmente

$$\begin{aligned}\int_M F \cdot \hat{n} \, ds &= \int_C \nabla \cdot \vec{F} \, dV - \int_B F \cdot \hat{n} \, ds \\ &= -\frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

- b) Si existiese  $\vec{G}$  de clase  $\mathcal{C}^2$  tal que  $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$  entonces, por una identidad vectorial vista en clase se tendría que  $\nabla \vec{F} = \nabla(\nabla \times \vec{G}) = 0$ . Pero vimos que  $\nabla \vec{F} = r^2 z$  que no es idénticamente nulo por lo que un campo  $\vec{G}$  tal, no existe.

### Problema 3

Considere el toro de radio mayor  $R$  y de radio menor  $a$ , donde  $R > a > 0$  son constantes. Sea  $\Sigma$  la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , la cual orientamos según la normal exterior al toro.

- a) (3 pts.) Demuestre que si  $\vec{F}$  es un campo continuamente diferenciable en  $\Sigma$ , entonces se satisface:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = d^2$  con los planos  $z = z_1$  y  $z = z_2$  respectivamente, con  $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$ ,  $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$  y  $z_2 = -z_1$ , ambas orientadas en el sentido antihorario.

- b) (3 pts.) Para el campo  $\vec{F} = (e^{-z^2}/\rho)\hat{\rho} + z\hat{\theta} + z\sin(\theta)\cos^2(\theta)\hat{k}$  calcule:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA.$$

Solución.

- a) Fijándose en la figura, es posible darse cuenta de que una ecuación que satisface el toro en coordenadas cilíndricas es  $(R-r)^2 + z^2 = a^2$ . Por otra parte, la esfera descrita en coordenadas cilíndricas tiene por ecuación  $r^2 + z^2 = R^2$ .

Al intersectar ambas superficies (restamos las ecuaciones para obtener una ecuación dependiente de un parámetro) se obtiene la ecuación:

$$(R-r)^2 - r^2 + R^2 = a^2,$$

de donde despejando se obtiene que el radio  $r$  es constante y  $r = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$ . Vemos así que la intersección de la esfera con el toro son círculos de radio  $r$ . Falta ver a que altura se ubican los círculos.

Despejamos  $z$  de la ecuación de la esfera:

$$\begin{aligned} z^2 &= R^2 - r^2 \\ &= R^2 - \left(R - \frac{a^2}{2R}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{2R} \left(2R - \frac{a^2}{2R}\right) \\ &= \frac{a^2}{4R^2} (4R^2 - a^2) \end{aligned}$$

Así vemos que hay dos soluciones para  $z$  dadas por  $z_1 = \frac{a}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2}$  y  $z_2 = -z_1$ .

Definimos entonces las circunferencias en coordenadas cilíndricas, orientadas según crece el ángulo  $\theta$  de estas coordenadas, es decir, sentido antihorario.

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 : \quad r &= R - \frac{a^2}{2R} \quad z = \frac{a}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2} \\ \hat{C}_2 : \quad r &= R - \frac{a^2}{2R} \quad z = -\frac{a}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2} \end{aligned}$$

Por el teorema de Stokes dado que  $\vec{F}$  es continuamente diferenciable

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{\hat{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{\hat{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Por otra parte, la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = d^2$  con los planos  $z = z_1$  y  $z = z_2$  (notar que los  $z_1, z_2$  son los mismos que en la intersección de la esfera con el toro) son exactamente las circunferencias  $\hat{C}_1$  y  $\hat{C}_2$  descritas antes, dado que  $d = r$ . Luego la igualdad pedida está probada puesto que la orientación también coincide.

- b) Teníamos antes parametrizaciones en cilíndricas de las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$ . De coordenadas curvilíneas sabemos que usando coordenadas cilíndricas y dado que  $r$  y  $z$  son constantes en cada circunferencia el elemento de longitud para  $C_1$  y  $C_2$  es

$$d\vec{r} = r d\theta \hat{\theta}.$$

Luego  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\theta r d\theta = z r d\theta$ . Para integrar ocupamos la parte a) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA &= \oint_{\hat{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{\hat{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} z_1 r d\theta - \int_0^{2\pi} -z_1 r d\theta \\ &= 4\pi r z_1, \end{aligned}$$

con  $r = d$  y  $z_1$  dados en el enunciado.