Guía de ejercicios

MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

Auxiliares: R. Aliaga, G. Dávila, M. Duarte, M. Rojo

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

1. a)Espirales de MacLaurin. Corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descrita en coordenadas polares las variables ρ y θ satisfacen la relación

$$\rho(\theta) = a(\sin(n\theta))^{\frac{1}{n}}$$

donde $a > 0$ y $n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ corresponde al orden de la espiral. Pruebe que la curvatura de una espiral de MacLaurin de orden n es:

$$k(\theta) = \frac{n+1}{a}(\sin(n\theta))^{\frac{n-1}{n}}$$

b) Considere la curva plana Γ descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1-\cos(\theta)) \quad a > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$$

i) Encuentre una parametrización para Γ, grafíquela detalladamente y encuentre sus posibles irregularidades.
ii) Calcule el largo de Γ.

iii) Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F} = \left(2xy^2\cos\left(x^2y^2\right) + \frac{2x}{x^2+y^2+1}, 2x^2y\cos\left(x^2y^2\right) + \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right).$$

al dar una vuelta completa a la curva en el sentido antihorario.

2. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2} \quad h > 0$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{d\theta} = z$$
$$z(0) = h$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

i) Bosqueje la curva y demuestre que $\tau/k = h\sqrt{2}$, donde τ y k corresponden a la torsión y curvatura de Γ respectivamente.

ii) Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2}\right)$. Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3},\right]$, calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0.

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie caracterizada por $x^2 + y^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

i) Encuentre una parametrización regular de S y obtenga un campo de normales a S. Bosqueje S en un gráfico.

ii) Calcule la masa y determine el centro de masa de S, asumiendo una densidad superficial de masa dada por $f(x,y,z) = 1/\sqrt{1+2z}$.

iii) Calcule el flujo a través de S orientada según el campo de normales obtenido en i) para el campo $\vec{F}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\imath}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\jmath}+\hat{k}$.

4. Calcule la integral

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS,$$

donde S es la frontera de la región sólida limitada por el plano $z=2x$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$, donde $\vec{F}(x,y,z)=\left(y-\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}},-x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}},z+1\right)$, con $\hat{n}$ el vector normal exterior.

5. i) Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}=xy^2\hat{\imath}+yz^2\hat{\jmath}+zx^2\hat{k}$ a través de la superficie del sólido definido por las ecuaciones: $2\leq x^2+y^2\leq 4, 0\leq z\leq 5$.

ii) Utilice el teorema de Stokes para calcular la integral de trabajo del campo $\vec{G}=(x-y)\,\hat{\imath}+x^2y\hat{\jmath}+zx\hat{k}$ a lo largo del círculo $x^2+y^2=1$, orientado en sentido antihorario.

6. Considere la superficie del toro de centro 0, radio mayor R y radio menor a ($a<R$). Sea Σ la porción de superficie del toro que se encuentra fuera de la esfera de radio R y centro 0. Bosqueje la superficie Σ y calcule su área. Sea $\vec{F}$ el campo definido por $\vec{F}=(x,y,z)$, calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ según la normal exterior al toro.

7. Considere el paraboloide de ecuación $x^2+y^2=(h-z)$, con $h>0$ constante y sea Π el plano tangente a la superficie del paraboloide en el punto $\left(0,\sqrt{h},0\right)$. Demuestre que el area de la porción del plano contenida en el cilindro de ecuación $x^2+y^2=a^2$ es: $\pi a^2\sqrt{1-4h}$.

8. i) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$, cuyo borde Σ es una superficie regular por trozos. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$\lim_{r\to\infty} r^2\left\|\vec{F}\left(\vec{r}\right)\right\| \quad = \quad 0$$

Pruebe que

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \operatorname{div}\left(\vec{F}\right)dV\Big) \quad = \quad \iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

Hint: Use el teorema de la divergencia en $B\left(0,r\right)\setminus\bar{\Omega}$ con r suficientemente grande.

ii) Sea Ω la porción del casquete esférico de radio R con $0\leq z\leq R/2$. Calcule el flujo del campo

$$\vec{f}\left(x,y,z\right) \quad = \quad \left(e^{z+y^2}\cos y+4x, z\sinh\left(x\right)+y, x^2+y^2-4z\right)$$

a través de la superficie Ω según la normal exterior.

9. Considere aquella curva sobre la superficie del paraboloide $x^2+y^2=z$, que al ser descrita en coordenadas cilíndricas las variables $\rho\geq 0$ y $\theta\in[0,2\pi]$ satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\theta)=\rho(\theta) \quad \text{con condiciones iniciales} \quad \rho(0)=1 \text{ y } \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(0)=-1.$$

$i)$ Obtenga una parametrización de la curva.

$ii)$ Dado el campo $\vec{F}(x,y,z)=(z(1+xz)e^{x^2+y},xze^{xz+y},x(1+xz)e^{xz+y})$ considere una partícula confinada a moverse a lo largo de la curva. Calcule el trabajo para llevar la partícula de $z=1$ a z_0 con $0\leq z_0\leq 1$. ¿ Cual es el trabajo para llevarla al origen ?

10. Demuestre que si Γ es una curva parametrizada en longitud de arco, se cumple que:

$$\tau(s) = \frac{(\vec{\sigma}^{'} \times \vec{\sigma}^{''}) \cdot \vec{\sigma}^{'''}}{\|\vec{\sigma}^{''}\|^2}.$$

Use la fórmula anterior para calcular la torsión de:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t) \quad t \in [0, 4\pi].$$

11. Calcule el área de la intersección entre $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$

12. Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ con $R > 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$. Calcule la superficie de la porción del cilindro que queda fuera del paraboloide.

13. Considere el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

y la región Ω definida por:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \in [0, b] \quad x^2 + y^2 = a^2$$

con a y b constantes dadas, ambas positivas.

i) Evalúe las integrales de flujo del campo sobre cada una de las 5 caras de la región. Haga un bosquejo y considere la orientación exterior.

ii) Interprete físicamente los 5 flujos calculados, así como el flujo total a través de Ω.

iii) Verifique que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$.

14. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto, conexo y acotado de frontera $S = \delta\Omega$ regular y orientable por trazos. Sean f y g funciones continuas conocidas. Demuestre que si u_1 y u_2, funciones de clase C^2, satisfacen las propiedades siguientes:

$$div(\nabla u_i)(x) = f(x) \qquad \forall x \in \Omega \quad i = 1, 2,$$
$$\nabla u_i \cdot \hat{n}(x) = g(x) \qquad \forall x \in S \quad i = 1, 2,$$
$$\exists x_0 \in \Omega; u_1(x_0) = u_2(x_0),$$

entonces son iguales en Ω.

15. Considere el toro de radio mayor R y de radio menor a, donde $R > a > 0$ son constantes conocidas. Sea Σ la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la cual orientamos según la normal exterior al toro.

i) Demuestre que si $\vec{F}$ es un campo continuamente diferenciable en Σ, entonces se satisface:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C_1 y C_2 son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$ respectivamente, con $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$, $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ y $z_2 = -z_1$, ambas orientadas en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

ii) Considere el campo $\vec{F} = (e^{-z^2}/\rho)\hat{\rho} + \hat{\theta} + \sin(\theta)\cos^2(z\theta)\hat{k}$, calcule:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA.$$

16. Utilizando el teorema de Green, probar que el área de una región Ω con frontera Γ se puede calcular por la siguiente expresión:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Aplicar esta fórmula para calcular el área de Ω que es interior de $|x| + |y| = 4$ y exterior a $x^2 + y^2 = 1$.

17. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (6zy^2 + \cos(x^2), xz \operatorname{sen}(xz), xy \operatorname{sen}(xy) - 2x^3)$ a lo largo de $C = C_1 \cup C_2$ donde C_1 tiene ecuación $x^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$ y C_2 tiene ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$.

18. Probar que la integral de línea

$$\int_{\overline{PQ}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$$

es independiente de del camino de integración entre los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(2, 3, 4)$. Hallar su valor.

19. Una partícula se mueve sobre una cierta curva, con velocidad $\vec{x}'$, de magnitud constante 1 y curvatura constante 1. Si se designa por $\theta(t)$ al ángulo $(0 \leq \theta \leq \pi)$ entre los vectores $\vec{x}'(t)$ y $\vec{x}''(t)$ en el instante t, probar que la torsión satisface la ecuación

$$|\tau(t)| = \|\vec{x}'''(t)\| \sin(\theta(t)).$$

20. *Algo de Matemática Aplicada a la Física*

1.- Sea $\vec{F}$ un campo de fuerza definido sobre $A \subseteq \mathbb{R}^3$, es decir, $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, actúa sobre una partícula de masa m. Probar que el trabajo para mover la partícula desde $\vec{p}_0$ hasta $\vec{p}_1$ es igual a

$$W = \frac{1}{2} m(|\vec{v}_1|^2 - |\vec{v}_0|^2)$$

donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_0$ son respectivamente las velocidades en $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_0$.

2.- Un fluido se desplaza en el plano XY de modo que cada partícula se mueve en línea recta desde el origen. La velocidad de una partícula a la distancia r del origen es ar^n donde a y n son constantes.

(a) Determinar los valores de a y n para los cuales el campo vectorial de velocidad es el gradiente de un cierto campo escalar.

(b) Hallar una función potencial de la velocidad siempre que éste sea el gradiente de algún campo escalar.

21. Hallar el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, que se encuentra an el interior del cilindro $x^2 + z^2 = 2az$.

22. Calcule el flujo definido por el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(e^z \sin y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 y altura 2, de la figura.

Indicación: Calcule el flujo total que sale del cilindro incluyendo las tapas y usando el teorema de Gauss. Calcule el flujo que sale a través de las tapas directamente.

23. Un sólido situado en el primer octante está acotado por los planos: $x = 0;\ y = 0;\ z = 0$ y los cilindros $x^2 + y^2 = a^2;\ x^2 + z^2 = a^2$. Si $\vec{f}$ es el campo vectorial definido por

$$\vec{f}(x, y, z) = 2yz\hat{\imath} + (x + 3y - 2)\hat{\jmath} - (x^2 + z)\hat{k}.$$

Calcule el valor de la integral

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

tomada sobre la superficie del sólido orientado según la normal exterior.

24. Sea $\vec{r} = (x, yxz),\ r = \|\vec{r}\|$ y $\Sigma^+ = \partial \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : a \leq r \leq b\right\}$ orientada hacia el exterior. Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase C^1 tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)\vec{r}$$

(a) Verificar que $r^2 \nabla \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^3 f(r^2)\right)$.

(b) Concluir que $\oint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi\left[b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2)\right]$.

Con la misma notación, sea C^+ una curva de extremos $(0,0,0)$ y $A = (0,0,a)$ regular por trozos recorrida desde $(0,0,0)$ hacia A.

(c) Calcular $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$.

(d) Verificar que $\int\limits_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int\limits_0^a f(t)dt$.

25. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones escalares de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Considere los campos vectoriales definidos por:

$$\vec{w}(x, y, z) = u(x, y)\hat{\imath} + v(x, y)\hat{\jmath} \quad \text{y} \quad \vec{w}_1(x, y, z) = v(x, y)\hat{\imath} - u(x, y)\hat{\jmath}.$$

(i) Pruebe que $\vec{w}$ y $\vec{w}_1$ son ambos conservativos si y sólo si satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} & = & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & = & -\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

Decimos que dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son *conjugadas* cuando satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

(ii) Pruebe que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas y de clase C^2 entonces ambas son armónicas, es decir, $\Delta u = \Delta v = 0$. Pruebe además que $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

(iii) Demuestre que si $u(x, y)$ es armónica entonces existe una función $v(x, y)$ conjugada de u.

Indicación: Prueba que el campo definido por

$$\vec{w}_2(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\hat{\imath} - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\hat{\jmath}$$

es conservativo.

26. Calcular el elemento de volumen en coordenadas parabólicas $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ con ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon\eta\cos(\varphi) \\ y &= \varepsilon\eta\sin(\varphi) \\ z &= \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \varepsilon^2\right). \end{aligned}$$

Identifique geométricamente las nuevas coordenadas y justifique el nombre de coordenadas parabólicas de este sistema.