Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 10-MA26B: Matemáticas Aplicadas 2007-02

Profesor: Héctor Ramírez
Profesores Auxiliares: Omar Larré, Victor Riquelme

1. **Teorema 9.1.1**. Sea f : $\Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p,r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z_0} d\omega$$

donde $\partial D(p,r)$ es la circunferencia de centro p y radio $r > 0$ recorrida en sentido antihorario.

2. Calcule directamente:
   a) $\int_\gamma \bar{z} dz$, con $\gamma(t) = t^2 + it$, $0 \leq t \leq 2$.
   b) $\int_\gamma \frac{dz}{\bar{z}^2}$, con $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

3. (Integrales de Fresnel)
   Las siguientes identidades se conocen como las integrales de Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

   a) Considere la función $f(z) = exp(iz^2)$. Justifique porqué $\int_\Gamma f(z)dz = 0$, para cualquier curva cerrada Γ.
   b) Justifique que $\forall \alpha \in [0, \pi/2]$, $\sin(\alpha) \geq 2\alpha/\pi$
   c) Demuestre las identidades. Para ello, considere $\Gamma(R)$ como en la Figura 1 y recuerde que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$

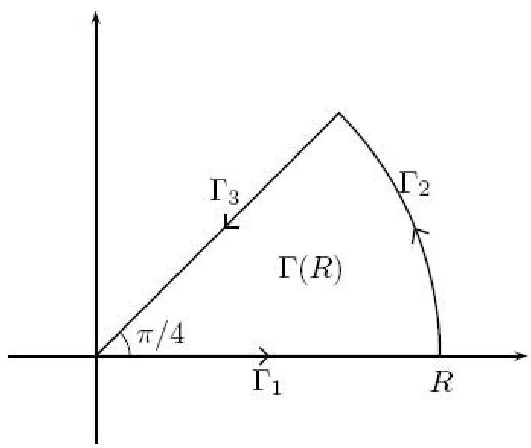

Figura 1: Camino para las integrales de Fresnel

4. *a)* (Teorema de Liouville) Muestre que si $f \in H(\mathbb{C})$ es una función acotada entonces f es constante en $\mathbb{C}$.
   b) Muestre que si $f \in H(\mathbb{C})$ es una función tal que $|f(z)| \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ entonces f es constante en $\mathbb{C}$.

5. Probar que si $f(z) = (e^{kz} - 1)/z$ cuando $z \neq 0$ y $f(0) = k$ entonces $f \in H(\mathbb{C})$.

6. (Residuos) Evaluar

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z \sin z}$$

donde Γ es el camino de la Figura 2.

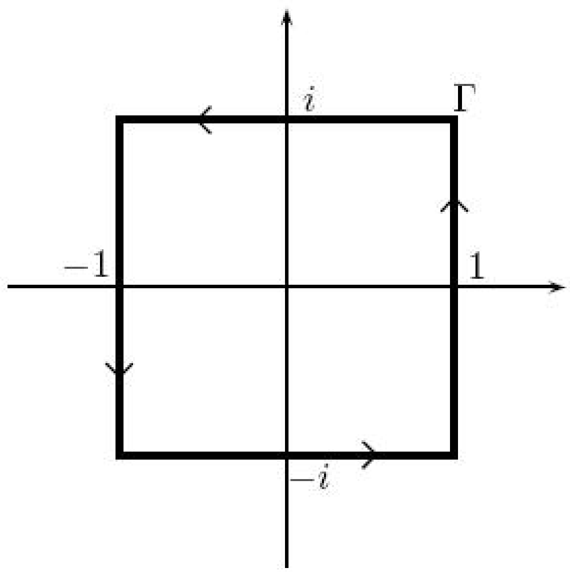

Figura 2: Cuadrado centrado en el origen

Recuerdo:

Se dice que $p \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y además existe un entero $m \geq 1$ tal que el límite

$$L_m(p) := \lim_{z \to p} (z-p)^m f(z)$$

existe y es no nulo, i.e. $L_m(p) \neq 0$. El menor $m \geq 1$ con dicha propiedad se llama orden del polo p. Diremos que p es un polo simple cuando sea un polo de orden $m = 1$.

Si f tiene un polo de orden m en p, entonces $\mathrm{Res}(p, f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to p} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p)^m f(z)\right]$

7. *a*) Sea $R(x, y)$, $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función racional (i.e.: $R(x, y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, con p y q polinomios) definida en un dominio que incluye al círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Muestre que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(z_k, f)$$

donde

$$f(z) = z^{-1} R\left[\frac{(z + z^{-1})}{2}, \frac{(z - z^{-1})}{2i}\right]$$

y $z_1, ..., z_p$ son los polos de f en $|z| < 1$.

b) Usando lo anterior, dado $a > 1$, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + \cos\theta)} d\theta$$