Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemáticas.

Auxiliar 8 - MA26B: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Héctor Ramirez
Prof. Auxiliares: Omar Larré, Víctor Riquelme

Problema 1. Sean $Q_1, ..., Q_n$ los vértices de un n-ágono inscrito en una circunfencia de radio 1, y $d_2, ...d_n$ los largos de las diagonales que parten desde Q_1 hacia cada uno de los vértices $Q_2, .., Q_n$ respectivamente. Muestre que

$$\prod_{j=2}^{n} d_j = n$$

Problema 2. Estudie la geometría de la transformacion $sen(\cdot)$. Más precisamente, demuestre que envía rectas horizontales en elipses y rectas verticales en hipérbolas.

Problema 3.

i) Se define la rama principal del logaritmo en $D = \{z/z = a,\, a \leq 0\}^c$ (abierto) por

$$log(z) = ln(|z|) + iArg(z);\ \ Arg(z) \in (-\pi, \pi)$$

Demuestre que dicha rama del logaritmo es analítica en D.

ii) Encuentre el desarrollo en serie de potencias de la funcion $log(\cdot)$ en torno al punto $z_0 = 1$.

Problema 4. Sea f una función entera (analítica en todo el plano complejo), de la forma

$$f(x, y) = u(x) + iv(y)$$

Demuestre que f es un polinomio lineal.

Problema 5. Determine para que z del plano complejo la serie siguiente converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} exp\left(\frac{nz}{z-2}\right)$$

Grafique la región.

Problema 6. Demuestre que si $|z| < 1$,

$$(1 + z + z^2 + \ldots + z^9)(1 + z^{10} + z^{20} + \ldots + z^{90})(1 + z^{100} + z^{200} + \ldots + z^{900}) \ldots = \frac{1}{1-z}$$

Problema 7. Se define el producto de Cauchy de las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ con radios de convergencia mayor o igual a R, por

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n\,,$$

con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, con radio de convergencia de la última serie de al menos R.

Encuentre el desarrollo en serie de potencias de la función $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)^2}$

Problema 8. Defina una función analítica en el plano complejo menos el eje real no positivo tal que $f(x) = x^x$ en el eje real positivo. Calcule $f(i)$, $f(-i)$. Muestre que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ (Propuesto).