Problemas

Problema 1 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto acotado de frontera $\partial\Omega$ regular por trozos; $0 \in \Omega$. Sea $\vec{f} = \frac{\hat{r}}{r^k}$, con $k > 2$, en esfericas para $r > 0$.

Probar que

$$\frac{1}{R_1^{k-2}} \leq \int\int_{\partial\Omega} \vec{f} \bullet d\vec{S} \leq \frac{1}{R_0^{k-2}}$$

Con $R_0 = \text{ínf}_{\vec{r} \in \Omega^c} ||\vec{r}||$; $R_1 = \sup_{\vec{r} \in \Omega} ||\vec{r}||$

Problema 2 Considere el campo vectorial en coordenadas cartesianas:

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - y\sqrt{x^2+y^2}arctg(z^2), y - x\sqrt{x^2+y^2}arctg(z^2), z(x^2+y^2))$$

(a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y encuentre la expresion del campo en coordenadas cilindricas $\vec{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{z}$.

(b) Calcule la divergencia de $\vec{F}$ y el flujo de $\vec{F}$ a traves de la superficie del volumen descrito por $|x| \leq z^2 + 1$; $|y| \leq z^2 + 1$; $|z| \leq 1$, orientado segun la normal exterior. Grafique.

Problema 3 *Conservacion y unicidad en la ecuacion del calor.* Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto acotado de frontera regular y $u(x, y, z, t)$ la temperatura en (x, y, z) en el instante $t \geq 0$ la cual satisface

$$(EC) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & en\, \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, z, t) = 0 & en\, \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) & en\, \Omega \end{cases}$$

donde la condicion inicial u_0 es una funcion de clase C^1. Probar que la cantidad

$$U(t) = \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega u(x, y, z, t)^2 dV + \int_0^t \int\int\int_\Omega ||\nabla u(x, y, z, s)||^2 dV ds$$

es constante para $t \geq 0$ y deducir la unicidad de soluciones para (EC).

Problema 4 La presion a una profundidad h en un estanque es

$$p(h) = p_0 + \rho_0 g h$$

con ρ_0 la densidad del liquido, p_0 la presion atmosferica y g la aceleracion de gravedad. La fuerza neta experimentada por un cuerpo Ω sumergido en el liquido viene dada por $\vec{F} = \int\int_{\partial\Omega} p\hat{n}dS$. Calcular $\vec{F} \bullet \hat{e}$ para $\hat{e} = \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, y deducir el *Principio de Arquimedes*:

$$\vec{F} = \rho_0 g Vol(\Omega)\hat{k}$$

.

Problema 5 *Potencial de Yukawa* De acuerdo a la teoria de Yukawa para funciones nucleares, la fuerza de atraccion $p^+ - e^-$ tiene como potencial $U(r) = k\frac{e^{-\alpha r}}{r}\hat{r}$, para constantes $k < 0$ y $\alpha > 0$.

(i) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

(ii) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a traves del casquete esferico de radio $a > 0$, oreintado segun la normal exterior.

(iii) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$, con $\Delta U = div(\nabla U)$ el *laplaciano de* U.

(iv) Demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por troizos y orientada segun la normal exterior, entonces

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \bullet d\vec{S} = 4\pi k - \alpha^2 \int\int\int_{\Omega} U dV$$

¿Contradice esto el teorema de Gauss? Explique.