Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 7-MA26B: Matemáticas Aplicadas 2007-02

Profesor: Héctor Ramírez
Profesores Auxiliares: Omar Larré, Victor Riquelme

1. **Teorema 5.2.2.** Una función de variable compleja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (donde $f = u + iv$) es derivable en $z_0 \in \Omega$ ssi es Fréchet-derivable en $z_0 = (x_0, y_0)$ como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{aligned}$$
En tal caso,
$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$
Si definimos
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &:= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &:= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\end{aligned}$$
entonces
$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right] = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$
Luego, una forma simple de escribir las condiciones de Cauchy-Riemann es
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

2. Para las siguientes funciones, determine aquellas que son holomorfas en todo $\mathbb{C}$ y calcule su derivada:
   (a) $f(z) = \overline{z}$.
   (b) $f(z) = e^x(cosy - iseny),\ z = x + iy$.
   (c) $f(z) = e^{-x}(cosy - iseny),\ z = x + iy$.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, Ω abierto. Pruebe que si f es diferenciable $\forall z \in \Omega$ entonces f es constante. Generalice en el caso en que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to L$, donde $L \subset \mathbb{C}$ es una recta del plano complejo.

4. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ analítica en Ω. Se define $\Omega^* = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$. Pruebe que $h(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es analítica en Ω^*.

5. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ mediante las fórmulas
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}$$
   (a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
   (b) Si $f \in H(\Omega)$ (es decir f es holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$), entonces $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$, $\forall z \in \Omega$.
   (c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.
   (d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2, se define el laplaciano de f mediante
$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$
   y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω. Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω. Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.