Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 9-MA26B: Matemáticas Aplicadas 2007-02

Profesor: Héctor Ramírez
Profesores Auxiliares: Omar Larré, Victor Riquelme

1. 4. Calcule $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(3x)}{(x^4-1)}dx$. En este caso es útil considerar la función $f(z) = \frac{z^2}{(z^4-1)}e^{icz}$ con $c = 3$. Recuerde además que si f tiene un polo de orden m en z_0, entonces

$$\mathrm{Res}(z_0, f) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

SOL.: En la auxiliar 9 llegamos a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{[-\infty,\infty]} f(z)dz = 2\pi i\mathrm{Res}(i,f) + \pi i\left[\mathrm{Res}(1,f) + \mathrm{Res}(-1,f)\right]$$

Como todos los polos son simples, y como $(z^4-1) = (z-i)(z+i)(z-1)(z+1)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(i,f) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}e^{3iz} \\
&= \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-1)(z+1)}e^{3iz} = \frac{i^2e^{3i(i)}}{(2i)(i^2-1)} = \frac{-ie^{-3}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(1,f) &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}e^{3iz} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z+1)}e^{3iz} = \frac{e^{3i}}{(2)(2)} = \frac{e^{3i}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(-1,f) &= \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}e^{3iz} \\
&= \lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-1)}e^{3iz} = \frac{e^{-3i}}{(2)(-2)} = \frac{-e^{-3i}}{4}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\pi i\left[\frac{-ie^{-3}}{4}\right] + \pi i\left[\frac{e^{3i}}{4} + \frac{-e^{-3i}}{4}\right] = \pi\frac{e^{-3}}{2} + \pi i\left[\frac{e^{3i}-e^{-3i}}{2i}\right]\frac{i}{2} \\
&= \pi\frac{e^{-3}}{2} - \pi\frac{\sin 3}{2}
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4-1)}e^{3ix}dx = \pi\frac{e^{-3}}{2} - \pi\frac{\sin 3}{2}$$

y como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4-1)}e^{3ix} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4-1)}\left[\cos 3x + i\sin 3x\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos 3x}{(x^4-1)}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\sin 3x}{(x^4-1)}dx$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos 3x}{(x^4-1)}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\sin 3x}{(x^4-1)}dx = \pi\frac{e^{-3}}{2} - \pi\frac{\sin 3}{2}$$

Igualando parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{(x^4-1)} dx &= \pi \frac{e^{-3}}{2} - \pi \frac{\sin 3}{2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin 3x}{(x^4-1)} &= 0\end{aligned}$$

Luego, la integral pedida es:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{(x^4-1)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{(x^4-1)} = \frac{1}{2} \left[\pi \frac{e^{-3}}{2} - \pi \frac{\sin 3}{2} \right]$$

OTRA FORMA Gracias a los teoremas de capítulo "Evaluación de integrales vía residuos" del apunte, en particular el teorema (?.2.11) y su corolario (?.2.12) se puede concluir DIRECTAMENTE que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^4-1)} e^{3ix} = 2\pi i \mathrm{Res}(i, f) + \pi i \left[\mathrm{Res}(1, f) + \mathrm{Res}(-1, f) \right]$$

y de ahi concluir.