Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 9-MA26B: Matemáticas Aplicadas 2007-02

Profesor: Héctor Ramírez
Profesores Auxiliares: Omar Larré, Victor Riquelme

1. Algunas series que deben tener presentes:

   a) $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, para $|z| < 1$

   b) $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, para $z \in \mathbb{C}$

   c) $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...$, para $z \in \mathbb{C}$

   d) $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$, para $z \in \mathbb{C}$

   Recordando que $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ y $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, propiedades que deben tener presentes:

$$\cosh(iz) = \cos z, \ \ \sinh(iz) = i \sin z$$

2. Calcular la serie de potencias de $\arctan(2z)$ y de $\frac{\exp(z^3)-1}{z^3}$ en torno a 0 y especifique el radio de convergencia. Deduzca la serie de potencias de $\int_0^z \arctan(2\omega) d\omega$ y de $\int_0^z \frac{\exp(\omega^3)-1}{\omega^3} d\omega$, y los respectivos radios de convergencia.

3. (a) Sea $R(x,y)$, $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función racional (i.e.: $R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, con p y q polinomios) definida en un dominio que incluye al círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Muestre que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^{p} \text{Res}(z_k, f)$$

   donde

$$f(z) = z^{-1} R\left[\frac{(z + z^{-1})}{2}, \frac{(z - z^{-1})}{2i}\right]$$

   y $z_1, ..., z_p$ son los polos de f en $|z| < 1$.

   (b) Usando lo anterior, dado $a > 1$, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + \cos\theta)} d\theta$$

4. Calcule $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(3x)}{(x^4-1)} dx$. En este caso es útil considerar la función $f(z) = \frac{z^2}{(z^4-1)} e^{icz}$ con $c = 3$. Recuerde además que si f tiene un polo de orden m en z_0, entonces

$$\text{Res}(z_0, f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$