Pauta problema 3

a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que

$$\vec{\nabla} \times \int_a^b \varphi(\vec{r},t)\, dt = \int_a^b \vec{\nabla} \times \varphi(\vec{r},t)\, dt$$

sol: Consideremos $\varphi(\vec{r}) = \varphi_x \hat{\imath} + \varphi_y \hat{\jmath} + \varphi_z \hat{k}$. Entonces

$$\vec{\nabla} \times \int_a^b \varphi(\vec{r},t)\, dt = \vec{\nabla} \times \left[\left(\int_a^b \varphi_x(\vec{r},t)\, dt \right) \hat{\imath} + \left(\int_a^b \varphi_y(\vec{r},t)\, dt \right) \hat{\jmath} + \left(\int_a^b \varphi_z(\vec{r},t)\, dt \right) \hat{k} \right]$$

$$= \hat{\imath} \left[\partial_y \left(\int_a^b \varphi_z(\vec{r},t)\, dt \right) - \partial_z \left(\int_a^b \varphi_y(\vec{r},t)\, dt \right) \right] - \hat{\jmath} \left[\partial_x \left(\int_a^b \varphi_z(\vec{r},t)\, dt \right) - \partial_z \left(\int_a^b \varphi_x(\vec{r},t)\, dt \right) \right]$$

$$+ \hat{k} \left[\partial_x \left(\int_a^b \varphi_y(\vec{r},t)\, dt \right) - \partial_y \left(\int_a^b \varphi_x(\vec{r},t)\, dt \right) \right]$$

Regla de Leibnitz y linealidad de la integral

$$= \int_a^b \left[\left(\partial_y \varphi_z(\vec{r},t) - \partial_z \varphi_y(\vec{r},t) \right) \hat{\imath} - \left(\partial_x \varphi_z(\vec{r},t) - \partial_z \varphi_x(\vec{r},t) \right) \hat{\jmath} + \left(\partial_x \varphi_y(\vec{r},t) - \partial_y \varphi_x(\vec{r},t) \right) \hat{k} \right] dt$$

$$= \int_a^b \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} (\vec{r},t)\, dt = \int_a^b \vec{\nabla} \times \varphi(\vec{r},t)\, dt.$$

2,0

Notar que en el hint dice que la regla de Leibnitz se aplica cuando $\vec{r} = (x,y,z)$, y la derivada es c/r a alguna variable cartesiana. Si el campo está en coordenadas cilíndricas, por ejemplo, hay problemas para sacar los vectores unitarios de la integral:

$$\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\theta = 0 \qquad \left(\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)\, \hat{\imath} + \operatorname{sen}(\theta)\, \hat{\jmath})\, d\theta = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} \right)$$

$$\neq \hat{\rho} \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi \hat{\rho}(\theta). \qquad \text{(es porque } \hat{\rho} \text{ depende de } \theta\text{)}.$$

Sin embargo, no hay problema si $\vec{r}$ no depende de t, integrando c/r a t (este es el caso). Una vez demostrado para coordenadas cartesianas, ya es válido para aplicarlo con parametrizaciones $\mathcal{C}^1$ del espacio en otras coordenadas.

b) Considere el campo vectorial $F(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ y pruebe que

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r} \right) = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt} \vec{F}(t\vec{r}) \qquad (2).$$

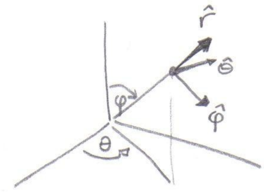
Primero, verificamos que $div(\vec{F})(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

0,5

$$div(\vec{F})(\vec{r}) = \frac{1}{r^2 sen(\varphi)} \Big(\underbrace{\partial_r(0)}_{0} + \underbrace{\partial_\varphi(0)}_{0} + \underbrace{\partial_\theta (1 \cdot r \cdot g(r))}_{0} \Big)$$ no depende de θ

$$= 0$$ //

Ahora, la segunda parte:



$\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{\theta}$

$(\hat{r}\,\hat{\varphi}\,\hat{\theta}\,\hat{r}\,\hat{\varphi})$

- $\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r} = g(tr)\,\hat{\theta} \times t\vec{r} = g(tr)\,\hat{\theta} \times t\,\|\vec{r}\|\,\hat{r}$

$$= tr\,g(tr)\,\hat{\theta}\times\hat{r} = tr\,g(tr)\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}\right) = \frac{1}{r^2 sen(\varphi)} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & r\,sen(\varphi)\,\hat{\theta} \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_\theta \\ 0 & r(tr\,g(tr)) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2 sen(\varphi)} \left(\hat{r}\cdot(0) - r\hat{\varphi}\,(0) + r\,sen(\varphi)\,\hat{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r}\,(r \cdot t \cdot r \cdot g(tr) - 0) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{r^{\cancel{2}}\,\cancel{sen\varphi}} \cdot \cancel{r}\,\cancel{sen(\varphi)}\,\hat{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(t r^2 g(tr)\right) \right) = \frac{t}{\cancel{r}} \Big(2\cancel{r}\,g(tr) + r^{\cancel{2}}\,\underbrace{g'(tr)\cdot t}_{\text{derivada de composición}} \Big)\,\hat{\theta}$$

$$= 2t\,g(tr)\,\hat{\theta} + t^2 \cdot r\,g'(tr)\,\hat{\theta}. \quad (\#)$$

- $2t\,\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}) = 2t\left(g(tr)\,\hat{\theta}\right) + t^2 \frac{d}{dt}\left(g(tr)\,\hat{\theta}\right)$

$\hat{\theta}$ no depende de t (sale de la derivada)

$$= 2t\,g(tr)\,\hat{\theta} + t^2 g'(tr)\cdot r\,\hat{\theta}. \quad (*)$$

se concluye viendo que $(*) = (\#)$.

1,5

c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $div(\vec{F}) = 0$ en una bola $B \subseteq \mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar que (2) es valida en B. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 (\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r})\,dt$. Usando lo anterior concluya que $\vec{\nabla}\times\vec{G} = \vec{F}$ en B.

Sol Sea $\vec{r} \in B$; se tiene que $(\forall t \in [0,1])$, $t\vec{r} \in B$. (así podemos aplicar lo anterior).

Por la parte (a), $\quad \vec{\nabla}\times\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\int_0^1 (\vec{F}(t\vec{r})\times t\vec{r})\,dt$

$$= \int_0^1 \vec{\nabla}\times(\vec{F}(t\vec{r})\times t\vec{r})\,dt$$

y por la parte (b), $\quad = \int_0^1 \left(2t\,\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r})\right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^2 \vec{F}(t\vec{r})\right) dt$

y por el TFC: $\quad = 1^2 \cdot \vec{F}(\vec{r}) - 0^2\,\vec{F}(0) = \vec{F}(\vec{r})$.

2,0

(integración por partes también es válido).