Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 4-MA26B: Matemáticas Aplicadas 2007-02

Profesor: Héctor Ramírez
Profesor Auxiliar: Omar Larré

1. Dado el campo $\overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho}\widehat{\rho} + z^2\widehat{k}$

   (a) Calcule $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, donde Γ es el rayo que parte en $Po = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y termina en $P_1 = (0, e, 3)$.

   (b) Calcule la integral de flujo $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dA}$ donde $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4,\ -3 \leq z \leq 3, y \geq 0\}$. Elija alguna normal.

2. Calcule la integral de flujo $\int\int_\Sigma \nabla F \cdot \overrightarrow{dA}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior, con $F(x, y, z) = (x-1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$.

   Solución:

   La parametrización es

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0, \pi/2],\ \ \theta \in [0, 2\pi]$$

es decir $\overrightarrow{r}(\varphi, \theta) = a\sin\varphi\cos\theta\widehat{\imath} + b\sin\varphi\sin\theta\widehat{\jmath} + c\cos\varphi\widehat{k}$. Ahora calculamos los vectores tangentes a la curva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi} &= a\cos\varphi\cos\theta\widehat{\imath} + b\cos\varphi\sin\theta\widehat{\jmath} - c\sin\varphi\widehat{k} \\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} &= -a\sin\varphi\sin\theta\widehat{\imath} + b\sin\varphi\cos\theta\widehat{\jmath} \end{aligned}$$

entonces la integral de superfice queda:

$$\int\int_\Sigma \nabla F \cdot \overrightarrow{dA} = \int_{\varphi\in[0,\pi/2]} \int_{\theta\in[0,2\pi]} \nabla F(\overrightarrow{r}(\varphi, \theta)) \cdot \frac{\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}}{\left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}\right\|} \left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}\right\| d\theta d\varphi$$

Acá podemos simplificar las expresiones con los módulos, ahora debemos calcular $\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi} &= (-a\sin\varphi\sin\theta\widehat{\imath} + b\sin\varphi\cos\theta\widehat{\jmath}) \times (a\cos\varphi\cos\theta\widehat{\imath} + b\cos\varphi\sin\theta\widehat{\jmath} - c\sin\varphi\widehat{k}) \\ &= \begin{pmatrix} -a\sin\varphi\sin\theta \\ b\sin\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a\cos\varphi\cos\theta \\ b\cos\varphi\sin\theta \\ c\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bc\cos\theta\sin^2\varphi \\ -ac\sin\theta\sin^2\varphi \\ -ab\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi - ab\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora falta ver si $\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}$ es un vector normal interior, para lo cual evaluamos en $\theta = 0$ y $\varphi = \pi/2$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}(\theta = 0, \varphi = \pi/2) \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}(\theta = 0, \varphi = \pi/2) = -bc\widehat{\imath}$$

con lo cual obtenemos que si es interior!

Como $\nabla F(x, y, z) = (2(x-1), 4(y-1), 2z) = 2(x-1, 2(y-1), z)$ entonces si expresamos este resultados en coordenadas elipsoidales:

$$\nabla F(\overrightarrow{r}(\varphi, \theta)) = 2(a\sin\varphi\cos\theta - 1, 2(b\sin\varphi\sin\theta - 1), c\cos\varphi)$$

Con todo lo anterior:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \nabla F(\overrightarrow{r}(\varphi,\theta))\cdot\left(\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi}\right)d\theta d\varphi \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2(a\sin\varphi\cos\theta-1)\\ 4(b\sin\varphi\sin\theta-1)\\ 2c\cos\varphi\end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -bc\cos\theta\sin^2\varphi \\ -ac\sin\theta\sin^2\varphi \\ -ab\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi - ab\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\end{pmatrix} d\theta d\varphi \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2(a\sin\varphi\cos\theta-1)\\ 4(b\sin\varphi\sin\theta-1)\\ 2c\cos\varphi\end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -bc\cos\theta\sin^2\varphi \\ -ac\sin\theta\sin^2\varphi \\ -ab\cos\varphi\sin\varphi\end{pmatrix} d\theta d\varphi \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2abc\cos^2\theta\sin^3\varphi + 2bc\cos\theta\sin^2\varphi - 4abc\sin^2\theta\sin^3\varphi \\ +4ac\sin\theta\sin^2\varphi - 2cab\cos^2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi \\
& \left[\textit{Notar que} \int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0\right] \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(-2abc\cos^2\theta\sin^3\varphi - 4abc\sin^2\theta\sin^3\varphi - 2cab\cos^2\varphi\sin\varphi)d\theta d\varphi \\
= & -2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin^3\varphi + 2\sin^2\theta\sin^3\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi)d\theta d\varphi \\
= & -2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi\sin^3\varphi + 2\pi\sin^3\varphi + 2\pi\cos^2\varphi\sin\varphi)d\varphi \\
= & -2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\pi\sin^3\varphi + 2\pi\cos^2\varphi\sin\varphi)d\varphi \\
= & -2abc(3\pi\frac{2}{3} + 2\pi\frac{1}{3}) = -4\pi abc - \frac{4abc\pi}{3} = -\frac{16abc\pi}{3}
\end{aligned}$$

Obs.: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi = \frac{2}{3}$, $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \pi$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{3}$

3. Considere

$$E(\overrightarrow{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3}$$

el campo eléctrico generado por una carga puntual Q situada en el orígen. Calcule el flujo a través de la superficie de una esfera de radio $R > 0$ y centro en el origen.

4. Considere el volumen del cono

$$V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z^2, h \ge z \ge 0\} \qquad , h > 0$$

y el campo $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (yz, -yz, z^2)$. Considere las superficies

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z^2, h \ge z \ge 0\} \\ S_2 &= \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le h^2,\ z = h\} \end{aligned}$$

de tal forma que $S_1 \cup S_2 = \partial V$. Calcule la integral de flujo

$$\int\int_{S_1} \overrightarrow{G}\cdot d\overrightarrow{A}$$

(Indicación: Use el teorema de la divergencia para calcular $\int\int_{\partial V}\overrightarrow{G}\cdot d\overrightarrow{A}$ *y note que* $\int\int_{\partial V}\overrightarrow{G}\cdot d\overrightarrow{A} = \int\int_{S_1}\overrightarrow{G}\cdot d\overrightarrow{A} + \int\int_{S_2}\overrightarrow{G}\cdot d\overrightarrow{A}$*).*