Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 3-MA26B: Matemáticas Aplicadas 2007-02

Profesor: Héctor Ramírez
Profesor Auxiliar: Omar Larré

1. Considere la superficie del semi-toro parametrizada por:

$$\overrightarrow{r}(\theta,\varphi) = ((R + asen\varphi)cos\theta, (R + asen\varphi)sen\theta, acos\varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}).$$

Suponga que la densidad de masa superficial es constante e igual a σ_0. Calcule la masa de la superficie y el centro de masa.

2. Calcular el trabajo de

$$\overrightarrow{F} = \rho\widehat{\rho} + \cos^2\theta e^{\cos^3\theta}\widehat{\theta}$$

al recorrer la curva que se obtiene al intersectar las superficies

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2 + y^2 - 2ay = 0 \end{cases}$$

3. Sea el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x+y^2)\widehat{\imath} + (3y-4x)\widehat{\jmath}$. Calcular la integral de trabajo $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ donde Γ es la lenteja formada por las ecuaciones $x = y^2$; $y = x^2$; $x, y \geq 0$ recorrida en sentido anti-horario. ¿Es conservativo este campo?

4. Dado el campo $\overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho}\widehat{\rho} + z^2\widehat{k}$

   (a) Calcule $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$, donde Γ es el rayo que parte en $Po = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y termina en $P_1 = (0, e, 3)$.

   (b) Calcule la integral de flujo $\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dA}$ donde $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4, -3 \leq z \leq 3\}$. Elija alguna normal.

5. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria Γ sobre el manto del paraboloide invertido de ecuación $x^2 + y^2 = -z$ de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta) = -e^{-2\theta}$, $\theta \geq 0$. Considere el campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{x^2+y^2} + x\sin(x^2) \\ \frac{-2xy}{x^2+y^2} - y^2\cos(y^3) \\ e^z \end{pmatrix}$$

Calcule el trabajo del campo a través de Γ. Hint: $\int_0^\infty e^{-x}\cos^3(x)dx = \frac{2}{5}$.

Solución:

Usaremos coordenadas polares. En este caso $x^2+y^2 = \rho^2 = -z = e^{-2\theta}$ y entonces $\rho = e^{-\theta}$. Luego:

$$\overrightarrow{r}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-\theta}\cos\theta \\ e^{-\theta}\sin\theta \\ -e^{-2\theta} \end{pmatrix}$$

y entonces $d\overrightarrow{r}(\theta) = \begin{pmatrix} -(\cos\theta)e^{-\theta} - (\sin\theta)e^{-\theta} \\ (\cos\theta)e^{-\theta} - (\sin\theta)\,e^{-\theta} \\ 2e^{-2\theta} \end{pmatrix} d\theta$. Además:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(\theta)) = \begin{pmatrix} (\cos\theta)e^{-\theta}\sin\left(\cos^2\theta e^{2(-\theta)}\right) + 2\left((\cos\theta)(\sin\theta)\right) \\ -(\sin^2\theta)e^{2(-\theta)}\cos\left(\sin^3\theta e^{3(-\theta)}\right) - 2\left((\cos\theta)(\sin\theta)\right) \\ e^{-e^{-2\theta}} \end{pmatrix}$$

Finalmente

$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

$= \int_0^\infty \left(2e^{-2\theta}e^{-e^{-2\theta}} - 4\left(\cos^2\theta\right)\frac{\sin\theta}{e^\theta} - (\cos\theta)\frac{\sin\theta}{e^{2\theta}}\sin\frac{\cos^2\theta}{e^{2\theta}} - \frac{\cos^2\theta}{e^{2\theta}}\sin\frac{\cos^2\theta}{e^{2\theta}} + \frac{\sin^3\theta}{e^{3\theta}}\cos\frac{\sin^3\theta}{e^{3\theta}} - (\cos\theta)\frac{\sin^2\theta}{e^{3\theta}}\cos\frac{\sin^3\theta}{e^{3\theta}}\right)d\theta$

El resto queda propuesto...