Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar 2-MA26B: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Héctor Ramírez
Profesor Auxiliar: Omar Larré

1. En la auxiliar anterior estudiamos una curva parametrizada en polares por:

$$\vec{r}(\theta) = e^{\theta}\widehat{\rho} + he^{\theta}\widehat{k} \quad , \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

de la cual se podía deducir que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} &= e^{\theta}\widehat{\rho} + e^{\theta}\widehat{\theta} + he^{\theta}\widehat{k} \\
s(\theta) &= \int_0^{\theta} \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau = \int_0^{\theta} e^{\tau}\sqrt{2+h^2}\, d\tau = (e^{\theta}-1)\sqrt{2+h^2} \\
\theta(s) &= \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2+h^2}} + 1 \right)
\end{aligned}$$

luego la parametrización natural está dada por:

$$\vec{r}_1(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2+h^2}} + 1 \right) \widehat{\rho}(\theta(s)) + h \left(\frac{s}{\sqrt{2+h^2}} + 1 \right) \widehat{k}$$

Además, encontramos los vectores:

$$T(\theta) = \frac{\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}}{\left\| \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} \right\|} = \frac{\widehat{\rho} + \widehat{\theta} + h\widehat{k}}{\sqrt{2+h^2}} \qquad ; \quad N(\theta) = \frac{\frac{dT(\theta)}{d\theta}}{\left\| \frac{dT(\theta)}{d\theta} \right\|} = \frac{\widehat{\theta} - \widehat{\rho}}{\sqrt{2}} \qquad ; \qquad B(\theta) = \frac{2\widehat{k} - h\widehat{\rho} - h\widehat{\theta}}{\sqrt{2}\sqrt{2+h^2}}$$

De lo cual se deduce que:

$$\begin{aligned}
\kappa \quad &: = \left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\| = \frac{\left\| \frac{dT(\theta)}{d\theta} \right\|}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{\frac{\widehat{\theta}-\widehat{\rho}}{\sqrt{2+h^2}}}{e^{\theta}\sqrt{2+h^2}} = \frac{\sqrt{2}}{e^{\theta}(2+h^2)} = \kappa(\theta) \\
\tau \quad &: = -\frac{dB}{ds} \cdot N = \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}} \left(-\frac{dB}{d\theta} \cdot N \right) = \frac{1}{e^{\theta}\sqrt{2+h^2}} \left(\frac{-h\widehat{\rho} + h\widehat{\theta}}{\sqrt{2}\sqrt{2+h^2}} \right) \cdot \left(\frac{\widehat{\theta} - \widehat{\rho}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{h}{e^{\theta}(2+h^2)} = \tau(\theta)
\end{aligned}$$

La conclusión es que:

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{h}$$

Ejercicio: Si la densidad de masa lineal descrita en polares tiene la forma $f(\rho, \theta, z) = z$ muestre que la masa de la curva es $M = \frac{h(2+h^2)}{2}(e^{4\pi} - 1)$. Calcule además el centro de masa.

2. Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad : existe un punto $\vec{P}_0$ por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (note que todo arco de circunferencia satisface esta propiedad). Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de Γ en longitud de arco.

   (a) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{P}_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\widehat{N}(s)$ donde $\widehat{N}(s)$ denota el vector normal.

(b) Demuestre que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 1-\kappa(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi\prime(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\kappa(s), \tau(s)$ son la curvatura y la torsión de Γ, respectivamente.

(c) Concluya que Γ es una curva plana.

(d) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

3. Calcular ∇f en coordenadas cilíndricas, donde

$$f(x,y,z)=\frac{\arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2}$$

Recuerde que

$$\nabla f=\frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\widehat{v}+\frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\widehat{u}+\frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\widehat{w}$$

4. Considere las coordenadas toroidales:

$$\overrightarrow{r}(\theta,\varphi,r)=((R+rsen\varphi)cos\theta,(R+rsen\varphi)sen\theta,rcos\varphi),\quad \theta\in[0,2\pi),\varphi\in[0,2\pi),r\in[0,a].$$

(a) Encuentre los factores escalares y describa el gradiente de una función diferenciable $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ en estas coordenadas.

(b) Calcule la integral

$$\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$

donde V representa el volumen de un toro de radio mayor R y radio menor a.

5. Muestre que si una superficie S simple y regular se parametriza por $\overrightarrow{r}:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u,v)$ y tal que el sistema de coordenadas es ortogonal (i.e. $\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}\perp\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}$) entonces

$$dA=h_uh_vdudv$$

6. Considere la superficie del semi-toro parametrizada por:

$$\overrightarrow{r}(\theta,\varphi)=((R+asen\varphi)cos\theta,(R+asen\varphi)sen\theta,acos\varphi),\quad \theta\in[0,2\pi),\varphi\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}).$$

Suponga que la densidad de masa superficial es constante e igual a σ_0. Calcule la masa de la superficie y el centro de masa.