Capítulo 4

Transformada de Laplace

4.1 Introducción: Transformadas integrales

Definición: Se llama **transformación integral** a una integral de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x,s)\cdot f(x)\cdot dx = F(s)$$

Si esta integral converge, el resultado es una nueva función F dependiente del parámetro s. A esta nueva función F se la llama función *transformada* de la función inicial f.

El término $k(x,s)$ se denomina **núcleo** de la transformación integral, y será el que permita distinguir unos tipos de otros de transformaciones. Los más importantes son los siguientes:

- si $k(x,s)=e^{-xs}$, se obtiene la **transformada de Laplace**.

  Esta transformada puede ser *unilateral* o *bilateral*:

  - si se define para todo x, es la **transformada de Laplace bilateral**, y su transformación integral es:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs}\cdot f(x)\cdot dx$$

  - si se define únicamente para valores positivos, es decir, $f(x)=0\ \forall x<0$, tenemos la **transformada de Laplace unilateral**:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs}\cdot f(x)\cdot dx = \mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$$

- si $k(x,s)=e^{-xis}$, se obtiene la **transformada de Fourier**.

  La transformación integral de Fourier es:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xis}\cdot f(x)\cdot dx = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

  Además, puesto que la exponencial anterior se puede expresar en forma trigonométrica:

  $$e^{-xis} = \cos xs - i\,\mathrm{sen}\,xs$$

Se pueden calcular otras transformaciones:

- **transformada de Fourier en coseno de *f***:

$$\int_0^\infty \cos xs \cdot f(x) \cdot dx = \mathsf{F}_c\left\{ f(x) \right\}$$

- **transformada de Fourier en seno de *f***:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} xs \cdot f(x) \cdot dx = \mathsf{F}_s\left\{ f(x) \right\}$$

Por último, se pueden relacionar ambas transformaciones, de Laplace y Fourier. Para ello, si partimos de una función *f* tal que $f(x) = 0 \;\; \forall x < 0$, si calculamos su transformada de Laplace:

$$\mathsf{L}\left\{ f(x) \right\} = \int_0^\infty e^{-xs} \cdot f(x) \cdot dx$$

Si definimos el punto *s* como $s = r + it$, el exponencial se puede separar en dos, quedando:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-rx} \cdot e^{-xit} \cdot f(x) \cdot dx = \mathsf{F}\left\{ e^{-rx} f(x) \right\}$$

4.2 Definición de transformada de Laplace

Definición: Sea $f:[0,\infty) \to R$ una función. Se define la **transformada de Laplace** de $f(t)$ como:

$$\mathsf{L}\left\{ f(t) \right\} = \int_0^\infty e^{-ts} f(t) dt$$

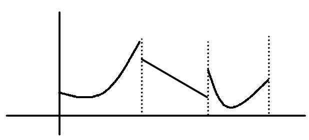
Siempre que la integral anterior converja uniformemente para algún *s*.

Esta transformada de Laplace equivale a la nueva función *F* de una transformación integral:

$$\mathsf{L}\left\{ f(t) \right\} = F(s)$$

Definición: Sea una función $f:[a,b] \to R$. Se dice que *f* es **continua a trozos** si existe una partición *P* del intervalo $[a,b]$ como $P = \left\{ a = x_0 < x_1 <...< x_i <...< x_n = b \right\}$, tal que *f* es continua en cada uno de los subintervalos de la partición, y además existen $f\left(x_i^+\right)$ y $f\left(x_i^-\right) \;\; \forall i = 1,\dots,n$.

Ejemplo: la siguiente función es continua a trozos:



Definición: Sea una función $f:[0,\infty) \to R$. Diremos que *f* es una función de **orden exponencial** σ si se cumple:

$$f \text{ es de orden exponencial } \sigma \Leftrightarrow \exists M, N > 0 \;\; / \;\; \left| f(t) \right| < M \cdot e^{\sigma t} \quad \forall t > N$$

Teorema de existencia de transformadas de Laplace

Sea *f* una función $f:[0,\infty)\to R$. Si *f* es continua a trazos en un intervalo $[0,N]$ con $N>0$ y además es de orden exponencial σ, existe una única transformada de Laplace, definida como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-ts}f(t)dt$$

■

El hecho de que esta transformada exista se debe a que la integral anterior converge uniformemente para algún valor $s>\sigma$.

DEMOSTRACIÓN:

La demostración de la existencia de la transformada de Laplace se traduce aquí en determinar si la integral converge para algún valor de *s*. Escribiendo la igualdad anterior:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

La integral se puede descomponer en dos, situando como punto medio el valor *N*:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^N e^{-st}f(t)dt+\int_N^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Puesto que *f* es continua, la primera integral converge para todo *s*. Queda, entonces, estudiar la convergencia de la segunda integral. Para ello, podemos acotar su valor absoluto con la relación conocida:

$$\left|\int_N^\infty e^{-st}f(t)dt\right|\le\int_N^\infty\left|e^{-st}\right|\cdot\left|f(t)\right|\cdot dt=\int_N^\infty e^{-st}\cdot\left|f(t)\right|\cdot dt$$

Puesto que la exponencial siempre será positiva. Además, como la función es de orden exponencial, podemos acotarla con otra exponencial, de la forma:

$$\int_N^\infty e^{-st}\cdot\left|f(t)\right|\cdot dt\le\int_N^\infty e^{-st}\cdot M\cdot e^{\sigma t}$$

Se puede acotar ahora la nueva integral por otra que debería ser mayor o igual que ella. Esta nueva integral es la que tiene como origen 0, en lugar de *N*:

$$\int_N^\infty e^{-st}\cdot M\cdot e^{\sigma t}\le M\int_0^\infty e^{(\sigma-s)t}dt=M\cdot\left[\frac{e^{(\sigma-s)t}}{\sigma-s}\right]_0^\infty=\frac{M}{\sigma-s}\left[\lim_{t\to\infty}e^{(\sigma-s)t}-1\right]$$

- si $\sigma-s>0\to\sigma>s$, la expresión tiende a infinito, luego no converge.
- si $\sigma-s<0\to s>\sigma$, el límite tiende a cero, y por lo tanto la expresión converge, y es igual a:

$$\frac{M}{s-\sigma}\quad\forall s>\sigma$$

- si $\sigma=s$, quedaría la integral $\int_0^\infty dt$, que siempre diverge.

Por lo tanto, se demuestra que existe la transformada de Laplace para cualquier $s>\sigma$.

■

4.3 Transformadas elementales

Aplicando la definición de transformada de Laplace, se puede calcular la función transformada correspondiente a cualquier función. Las más importantes son las siguientes:

a) $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-st} - 1\right]$$

- si $s \le 0$, la integral diverge.
- si $s > 0$, la integral converge, y la transformada es: $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

■

b) $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{a-s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} - 1\right]$$

- si $a \ge s$, la integral diverge.
- si $a < s$, la integral converge, y la transformada es: $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

■

c) $f(t) = t^n$

La transformada integral se resolverá por partes.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^n\} = I_n = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt = \left[\frac{t^n e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt$$

El primer sumando se calcula como:

$$\left[\frac{t^n e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{-1}{s}\lim_{t\to\infty} t^n e^{-st}$$

Que se anula para todo $s > 0$ al ser el producto de una función acotada $\left(t^n\right)$ por otra que tiende a cero $\left(e^{-st}\right)$. En el segundo sumando, la integral no es otra que I_{n-1}, con lo que podemos escribir:

$$I_n = \frac{n}{s}I_{n-1} = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}I_{n-2} = \ldots = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{s^{n-1}}\cdot I_1$$

La integral I_1 es la misma que calculamos en el apartado anterior, luego:

$$I_n = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{s^{n-1}}\frac{1}{s}I_0$$

A su vez, la integral I_0 es la que se obtiene de hacer $\mathcal{L}\{1\}$, es decir:

$$I_0 = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace buscada es:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = I_n = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

■

Siempre que $s > 0$ y $n \in N$. Si $n \in R$, usaremos la función gamma:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

■

Esta función gamma se define como:

$$\Gamma(p) = (p-1)! \quad \text{si} \quad p \in N$$
$$\Gamma(p) = (p-1)\cdot\Gamma(p-1) \quad \text{en general}$$

d) $f(t) = e^{ati}$, **transformadas de Laplace trigonométricas**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{ati}\} = \frac{1}{s-ai} \quad \text{con} \quad s > ai \rightarrow |s| > |a|$$

Este resultado se puede descomponer en su parte real e imaginaria:

$$\frac{1}{s-ai} = \frac{s+ai}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

La función de partida se puede, a su vez, expresar en forma de seno y coseno:

$$e^{ati} = \cos at + i \operatorname{sen} at$$

Calculando ahora la transformada de Laplace de esta nueva expresión:

$$\mathcal{L}\{e^{ati}\} = \mathcal{L}\{\cos at + i \operatorname{sen} at\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at + i \operatorname{sen} at)dt = \int_0^\infty e^{-st}\cos at dt + i\int_0^\infty e^{-st} i \operatorname{sen} at dt$$

Igualando los resultados, conseguimos las transformadas de Laplace de las funciones seno y coseno:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

■

Siempre que se cumpla que $|s| > |a|$.

e) Transformadas de Laplace de **seno y coseno hiperbólicos**.

De un modo similar al anterior, se puede demostrar que las transformadas de Laplace del seno y el coseno hiperbólicos son las siguientes:

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

■

Siempre que sea $|s| > |a|$.

4.4 Propiedades de las transformadas

Las transformadas de Laplace cumplen ciertas propiedades debidas a su naturaleza integral.

a) Linealidad

Sean dos transformadas de Laplace de dos funciones:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$$

Y dos escalares $\lambda, \mu \in K$. Se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{L}\{\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)\} = \lambda \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} + \mu \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = \lambda \cdot F(s) + \mu \cdot G(s)$$

■

DEMOSTRACIÓN:

Simplemente, desarrollando la expresión anterior, en forma de integrales, se tiene:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)\right) = \lambda \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \mu \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

■

Ejemplo: Calcular $\mathcal{L}\{7e^{-8t} + \operatorname{sen} 5t + 4t^4\}$.

$$\mathcal{L}\{7e^{-8t} + \operatorname{sen} 5t + 4t^4\} = 7 \cdot \mathcal{L}\{e^{-8t}\} + \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 5t\} + 4 \cdot \mathcal{L}\{t^4\} = \frac{7}{s+8} + \frac{5}{s^2+25} + 4\frac{4!}{s^5}$$

□

b) Cambio de escala

Sea una función transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y un escalar $b \in K$. Se cumple:

$$\mathcal{L}\{f(bt)\} = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right) = \frac{1}{b} \mathcal{L}\{f(t)\}_{\left(\frac{s}{b}\right)}$$

■

DEMOSTRACIÓN:

$$\mathcal{L}\{f(bt)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(bt)\,dt$$

Haciendo el cambio de variables siguiente:

$$\left.\begin{aligned} bt &= z \\ dt &= \frac{1}{b}dz \end{aligned}\right\}$$

Queda entonces la integral como:

$$\mathcal{L}\{f(bt)\} = \frac{1}{b}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{b}\right)z} f(z)\,dz = \frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right)$$

■

c) Traslación

Sea una función transformada de Laplace: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Se cumple:

- $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{(s-a)} = F(s-a)$

DEMOSTRACIÓN:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s-a)$$

■

- Sea la función *g* definida como:

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si} \quad t \geq a \\ 0 & \text{si} \quad t < a \end{cases}$$

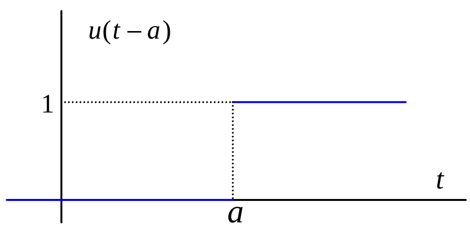
Esta función se puede escribir como:

$$g(t) = f(t-a)\cdot u(t-a)$$

Donde la función *u*, llamada *función escalón*, se define como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq a \\ 0 & \text{si} \quad t < a \end{cases}$$

Y su representación gráfica es:



La transformada de Laplace de la función *g* es:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = e^{-as}\cdot F(s) = e^{-as}\cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$$

■

DEMOSTRACIÓN:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

Si expresamos la función *g* como viene en la definición, dividiendo la integral en dos intervalos:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^a e^{-st}\cdot 0\cdot dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

Y el primer sumando se anula. Haciendo ahora el cambio:

$$\left.\begin{matrix} t-a=z \\ dt=dz \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} t=a & z=0 \\ t\to\infty & z\to\infty \end{matrix}\right\}$$

Queda lo siguiente:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(a+z)} f(z)dz = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sz} f(z)dz = e^{-as}\cdot \mathcal{L}\{f(z)\} = e^{-as}\cdot F(s)$$

■

Ejemplo: Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad 0<t<3 \\ 0 & \text{si} \quad t\geq 3 \end{cases}$.

Lo único que hay que hacer es descomponer la transformada integral en dos integrales:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^3 e^{-st}5dt + \int_3^\infty e^{-st}0dt = \frac{5}{-s}\left[e^{-st}\right]_0^3 = -\frac{5}{s}\left(e^{-3s}-1\right)$$

□

d) Transformadas de las derivadas

Sean las transformadas de Laplace de la función *f* y su derivada:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$
$$\mathcal{L}\{f'(t)\}$$

Se demuestra que la derivada puede calcularse como:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\cdot F(s) - f(0)$$

■

Además, si existe la transformada de Laplace de la derivada *n*-ésima de la función *f*, su valor es:

$$\mathcal{L}\{f^{(n}(t)\} = s^n\cdot F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1}(0)$$

DEMOSTRACIÓN:

Para la primera derivada, tendremos que realizar integración por partes:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty se^{-st} f(t)dt$$

El segundo sumando de la expresión anterior es $s \cdot F(s)$, con lo que tenemos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) + \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty = s \cdot F(s) + \left[\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) - f(0)\right] = s \cdot F(s) - f(0)$$

■

Las derivadas segunda y tercera, como referencia, serán:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s \cdot \left(s \cdot F(s) + f(0)\right) - f'(0) = s^2 F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f''(t)\} - f''(0) = s \cdot \left(s^2 F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)\right) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$$

e) Transformadas de la integral

Sea una transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y una función *g* tal que:

$$g(t) = \int_0^t f(z)dz$$

La transformada de Laplace de la función *g* es:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

■

DEMOSTRACIÓN:

La derivada de la función *g* es $g'(t) = f(t)$. Si calculamos su transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Al mismo tiempo, esta derivada se puede calcular como:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s \cdot G(s) - g(0)$$

Donde $G(s)$ es la transformada de Laplace de la propia función *g*. Igualando ambas ecuaciones queda:

$$s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = F(s)$$

El término $g(0)$ se anula, puesto que:

$$g(0) = \int_0^0 f(z)dz = 0$$

Y por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

■

f) Multiplicación por potencias de *t*

Sea una transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Se verifica:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^n F^{(n}(s)$$

■

DEMOSTRACIÓN:

Demostraremos la igualdad anterior por inducción. En primer lugar, para $n=1$, tenemos que demostrar:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -F(s)$$

Para ello, desarrollando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t \cdot f(t)dt = F(s)$$

Por otro lado, $F(s)$ se define como:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Derivando esta expresión respecto *s*, se comprueba la igualdad para $n=1$:

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t \cdot f(t)dt = -\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}$$

Suponiendo cierta la igualdad para $n=k$, es decir, tomando como hipótesis de inducción lo siguiente:

$$\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k F^{(k}(s)$$

Veremos qué ocurre para $n=k+1$. Aplicando la definición:

$$\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} f(t)dt$$

Si derivamos la igualdad de la hipótesis de inducción respecto *s* tenemos:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} t^k f(t)dt = \frac{d}{ds}(-1)^k F^{(k}(s)$$

$$-\int_0^\infty e^{-st} t \cdot t^k f(t) = (-1)^k F^{(k+1}(s)$$

$$-\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\} = (-1)^k F^{(k+1}(s)$$

$$\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\} = (-1)^{k+1} F^{(k+1}(s)$$

Con lo que queda demostrada la propiedad.

■

g) División por *t*

Si existe la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y existe el límite $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$, entonces existe la transformada de Laplace siguiente:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du = \int_0^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}du$$

■

DEMOSTRACIÓN:

Sea una función g de la forma $g(t) = \dfrac{f(t)}{t} \to t\cdot g(t) = f(t)$. Podemos calcular la transformada de Laplace siguiente:

$$\mathcal{L}\{t\cdot g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$
$$-G'(s) = F(s)$$

Donde se cumple que $G'(s) = \dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\}$. Integrando a ambos lados de la igualdad:

$$-\int \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\} = \int F(s) \to -\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_A^s F(u)du$$
$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_s^A F(u)du$$

Queda ahora demostrar que el valor de la constante arbitraria A es infinito. Para ello, tomando el límite de la expresión anterior cuando $s\to\infty$ se tiene:

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_{\infty}^{A} F(u)du = 0$$

Esta igualdad es nula puesto que en las transformadas de Laplace **siempre se cumple:**

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\{f(t)\} = 0 = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Así, para este caso, si la integral se anula es porque los extremos del intervalo de integración coinciden, es decir, $A=\infty$, con lo que queda demostrada la propiedad.

■

Ejemplo: Calcular la integral impropia $\int_0^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}dx$.

Podemos multiplicar por e^{-0x} sin variar el resultado, y luego, haciendo el límite cuando $s\to 0$ obtenemos una transformada de Laplace:

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \int_0^{\infty} e^{-0x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \lim_{s\to 0}\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right\}$$

Para poder aplicar la propiedad anterior es preciso que el límite de la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ exista. Efectivamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

Podemos por lo tanto aplicar la propiedad anterior:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \lim_{s\to 0} \mathrm{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right\} = \lim_{s\to 0}\int_s^\infty \mathrm{L}\{\operatorname{sen} x\}du = \lim_{s\to 0}\int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \lim_{s\to 0}\left[\operatorname{arctg} u\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

□

Teoremas del valor inicial y valor final

Si existen la transformada de Laplace $\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s)$ y la de su derivada $\mathrm{L}\{f'(t)\}$, se verifica:

- **teorema del valor inicial (T.V.I.):**

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

- **teorema del valor final (T.V.F.):**

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

DEMOSTRACIÓN:

Para demostrar los teoremas anteriores, deberemos partir de la transformada de Laplace de la derivada de la función *f*:

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = s\cdot F(s) - f(0)$$

- teorema del valor inicial:

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{L}\{f'(t)\} = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) - f(0) \to \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) = f(0) = \lim_{t\to 0} f(t)$$

■

- teorema del valor final:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{s\to 0}\mathrm{L}\{f'(t)\} = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{s\to 0} f(t) - f(0) \\ \lim_{s\to 0}\mathrm{L}\{f'(t)\} = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s) - f(0) \end{array}\right\} \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

■

4.5 Transformada inversa

Si una función *f* es continua a trozos en un intervalo $[0, N]$ y de orden exponencial σ, con su transformada de Laplace de la forma $\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s)$, este L se llama **operador directo de Laplace**.

Por otro lado, podemos definir el **operador inverso de Laplace** de la siguiente forma:

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Ejemplo: Dada la transformación de Laplace siguiente:

$$\mathrm{L}\{\operatorname{sen} 4t\} = \frac{4}{s^2+16}$$

Se cumple que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} = \operatorname{sen} 4t$$

□

Todas las **propiedades** definidas para el operador directo de Laplace se conservan para el inverso, a excepción de la transformada de la derivada, que exige que el valor $f(0)$ sea cero:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s\cdot F(s) - f(0)\right\} = f'(t) \text{ sólo si } f(0) = 0$$

La inversa de una transformada de Laplace no tiene por qué ser única. De hecho, para funciones que sean iguales en todo salvo en unos determinados puntos aislados, la transformada es la misma.

Ejemplo: Sean las siguientes funciones:

$$f_1(t) = e^{kt}$$
$$f_2(t) = \begin{cases} e^{kt} & \text{si} \quad t \neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad t = 2 \end{cases}$$

Ambas funciones son claramente distintas. Sin embargo, calculando sus transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\} = \frac{1}{s-k}$$
$$\mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\} = \frac{1}{s-k}$$

Podemos definir una nueva función N, la llamada **función nula**, tal que:

$$f_2(t) = f_1(t) + N(t)$$

Esta función cumple que:

$$\int_0^t N(t)dt = 0$$

En este caso, su valor será:

$$N(t) = f_2(t) - f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq 2 \\ 1 - e^{kt} & \text{si} \quad t = 2 \end{cases}$$

□

Propiedades de convolución

Si existen las transformadas inversas siguientes:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = g(t)$$

Entonces existe:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\cdot G(s)\right\} = \int_0^t f(u)\cdot g(t-u)du = f * g$$

■

A esta nueva operación * se la llama **producto de convolución**, y cumple:

$$f * g = g * f$$

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar demostraremos que existe la transformada inversa del producto de F y G. Para ello, dadas las siguientes transformadas de Laplace:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-sw} f(w)dw$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-sz} f(z)dz$$

Hay que demostrar lo siguiente:

$$F(s) \cdot G(s) = f * g$$

Operando el producto:

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^\infty e^{-sw} f(w)dw \cdot \int_0^\infty e^{-sz} f(z)dz = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(w+z)} f(w)g(z)dwdz$$

Haciendo ahora el siguiente cambio de variables:

$$\left.\begin{array}{l} w = u \\ z = t - u \to u = t - z \to u < t \to u \in [0,t] \\ \dfrac{J(w,z)}{J(u,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{array}\right\}$$

El producto queda:

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]dt = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = f * g$$

Con lo que se demuestra la igualdad. Para demostrar ahora que $f * g = g * f$, hacemos el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} t - u = z \\ du = -dz \end{array}\right\}$$

Queda entonces:

$$f * g = -\int_t^0 f(t-z)g(z)dz = \int_0^t f(t-z)g(z)dz = g * f$$

■

Ejemplo: Demostrar que $\mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right\} = \frac{\ln(s+1)}{s}$.

En primer lugar, definiremos una función g como:

$$g(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = -\int_\infty^t \frac{e^{-u}}{u} du$$

Con lo que su derivada será:

$$g'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}$$

El límite de esta derivada cuando $t \to 0$ no existe:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}}{t} = \frac{1}{0} = \infty$$

Lo que nos disuade de intentar resolver el problema aplicando la propiedad de división por *t*. Sin embargo, si escribimos:

$$t \cdot g'(t) = -e^{-t}$$

Y aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros, nos queda:

$$\mathcal{L}\left\{t \cdot g'(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-e^{-t}\right\} \to -1\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{g'(t)\right\} = -\frac{1}{s+1} \to \frac{d}{ds}\left(s \cdot \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} - g(0)\right) = \frac{1}{s+1}$$

En la última igualdad, la derivada respecto *s* de $g(0)$, al no depender *g* de *s*, se anula. Con ello, integrando ambos miembros:

$$\frac{d}{ds} s \cdot G(s) = \frac{1}{s+1} \to s \cdot G(s) = \ln(s+1) + A$$

Aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$$
$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = A$$

Al mismo tiempo tenemos, por el teorema del valor final sobre *g*:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

Igualando ambas expresiones resulta ser $A = 0$. Por lo tanto, la solución será:

$$s \cdot G(s) = \ln(s+1) \to G(s) = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right\} = \frac{\ln(s+1)}{s}$$

□