TEMA 7. ECUACIÓN LINEAL HOMOGENEA DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

1.- ECUACIÓN CARACTERÍSTICA.

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden : $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ con p,q constantes, o mejor $\boxed{a_0\ y'' + a_1\,y' + a_2\,y = 0}$ ***(1)*** con $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 constantes reales.

Por ser los coeficientes funciones continuas en $(-\infty, +\infty)$, el teorema de existencia y unicidad de solución garantiza que todo problema de valor inicial tiene solución única, válida en $(-\infty, +\infty)$.

Se trata de encontrar un método de conseguir dos soluciones linealmente independientes, para formar la solución general.

Parece lógico buscar como soluciones de (1), funciones f(x) cuya derivada sea del mismo tipo que f(x), salvo factor constante.

Por ello se ensayan soluciones de la forma: $y = e^{rx}$ **.** Sustituyendo en (1), se obtiene :
$a_0\,r^2 e^{rx} + a_1\,r\,e^{rx} + a_2\,e^{rx} \equiv 0$ en $\Re$, y como e^{rx} no es nunca nulo resulta :

$$\boxed{\mathbf{a_0\,r^2 + a_1\,r + a_2 = 0}} \quad \mathbf{(2)}$$

Se ha visto por tanto que $y = e^{rx}$ es solución de (1), si y solo si r satisface a la ecuación algebraica (2), que se denomina ***ecuación característica*** ó ***ecuación auxiliar***, asociada a la ecuación diferencial (1).

El polinomio $P(r) = a_0\,r^2 + a_1\,r + a_2$ se llama el ***polinomio característico*** de (1).

2.-OBTENCION DE UN CONJUNTO FUNDAMENTAL EN LOS DISTINTOS CASOS.

La ecuación característica (2) es de 2º grado. Por tanto, sus raíces podrán ser : dos reales y distintas, una real con multiplicidad dos, o dos raíces complejas conjugadas.

2.1- CASO DE DOS RAÍCES REALES DISTINTAS

"Si la ecuación característica (2) tiene dos raíces reales y distintas r_1 y r_2, entonces $\left\{y_1 = e^{r_1 x}\ ,\ \ y_2 = e^{r_2 x}\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (1). Por tanto, la solución general de (1), válida en $(-\infty, +\infty)$, es: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias".

En efecto: las y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Su wronskiano es : $W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\ e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re$.

Ejemplo 1:

Solución general de la ecuación diferencial : $y'' + 2y' - 3y = 0$

La ecuación característica es : $r^2 + 2r - 3 = 0$. Es decir $(r-1)(r+3) = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$, $r_2 = -3$.

Luego $\{e^x, e^{-3x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Y la solución general será: $\boxed{\mathbf{y = C_1\, e^x + C_2\, e^{-3x}}}$.

2.2.- CASO DE UNA RAIZ DOBLE

"Si la ecuación característica (2) tiene una raíz doble $r = r_1$, entonces un conjunto fundamental de soluciones de (1) es $\left\{y_1 = e^{r_1 x}\ ,\ \ y_2 = xe^{r_1 x}\right\}$ Por tanto, la solución general de (1) valida en todo $\Re$ es :

$y = e^{r_1 x}\ [\, C_1 + C_2\, x\,]$ con C_1 y C_2 constantes arbitrarias".

En efecto :

La solución es $y_1 = e^{r_1 x}$. Para hallar la segunda solución, puede usarse el método de reducción de orden, a partir del cambio de variable dependiente $y = e^{r_1 x} u(x)$.

Es : $y = e^{r_1 x} u$, $y' = e^{r_1 x} [r_1 u + u']$, $y'' = e^{r_1 x} [\, r_1^2 u + 2r_1 u' + u'']$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$e^{r_1 x}[a_o u'' + (2r_1 a_o + a_1) u' + (a_o r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) u] = 0 \quad (*)$

Por ser r_1 raíz de la ecuación característica, es $a_0 r_1^2 + a_1 r_1 + a_2 = 0$. Y por ser r_1 raíz doble, es $r_1 = -\frac{a_1}{2a_0}$. Luego $2r_1 a_0 + a_1 = 0$. Por tanto, la ecuación (*) toma la forma: $u''= 0$.

Una solución particular de ésta es $u_1 = x$. luego es solución particular de la (1) la función $y_2 = x e^{r_1 x}$.

Esta solución es linealmente independiente de la primera , pues $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{cte}$ o bien :

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & (r_1 x + 1) e^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re$$

Por tanto $\{y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = x e^{r_1 x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Nota :

Puede también comprobarse directamente que $y_2 = x e^{r_1 x}$ es solución, de la forma siguiente:

Si r_1 es raíz doble de (2), resulta : $P(r) = a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = a_0(r-r_1)^2$ y $P'(r) = 2a_0(r-r_1)$.

Luego: $P(r_1) = P'(r_1) = 0$. Se verifica:

$L[e^{rx}] = e^{rx}[a_0 r^2 + a_1 r + a_2] = e^{rx} P(r)$. Luego: $L[e^{r_1 x}] = 0$.

$L[xe^{rx}] = L[\frac{d}{dr} e^{rx}] = \frac{d}{dr} L\left[e^{rx}\right] = \frac{d}{dr}\left[e^{rx} P(r)\right] = e^{rx}\left[x P(r) + P'(r)\right]$.

Luego: $L[x\, e^{r_1 x}] = e^{r_1 x}[xP(r_1) + P'(r_1)] = 0$.

Por tanto : $y_2 = x e^{r_1 x}$ es solución de (1).

Ejemplo 2:

Solución general de la ecuación diferencial $\boldsymbol{y'' - 6y' + 9y = 0}$.

La ecuación característica es: $r^2 - 6r + 9 = 0$, es decir $(r-3)^2 = 0$, que tiene a

$r_1 = 3$ como raíz doble.

Luego $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$ es un conjunto fundamental.

Por tanto la solución general es : $\boxed{\mathbf{y = e^{3x}\,[C_1 + C_2\, x]}}$

2.3.- CASO DE RAICES COMPLEJAS

Nota : ***¿Que. significa la exponencial $e^{(x+iy)}$ en el campo complejo?.***

Para que se generalice al campo complejo la ley de exponentes $e^a\, e^b = e^{(a+b)}$ de la exponenciación real, habrá de ser: $\boldsymbol{e^{(x+iy)} = e^x\, e^{iy}}$.

¿Que significa e^{iy} ?:

Si se supone que el desarrollo en serie de Taylor en torno a $y = 0$ es formalmente igual para complejos que para reales resulta :

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1} + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$1 + \frac{iy}{1} - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} \ldots\ldots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \ldots\ldots\right) = \cos y + i\,\mathrm{sen}\,y$$

Lo anterior justifica la definición :

$$e^{(x+iy)} = e^x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) \qquad (\text{ Fórmula de Euler })$$

Se verifica:

"Si la ecuación característica tiene raíces complejas, y estas son conjugadas $\alpha \pm \beta i$. Entonces un conjunto fundamental de soluciones de (1), en todo $\Re$ es :

$$\{y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\, \beta x\}.$$

Por tanto la solución general de (1) es : $\boldsymbol{y = e^{\alpha x}[C_1 \cos \beta x + C_2\, \mathrm{sen}\, \beta x]}$ ***,***

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias reales".

En efecto :

Lo citado en el caso de dos raíces reales y distintas de la ecuación (2), es también válido si las raíces r_1 y r_2 son complejas conjugadas: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - i\beta$.

Son soluciones linealmente independientes en el campo complejo, las funciones

$$y_1^* = e^{(\alpha + i\,\beta)x} \quad \text{e} \quad y_2^* = e^{(\alpha - i\,\beta)x},$$

según puede comprobarse inmediatamente sustituyendo en la ecuación diferencial (1) y teniendo en cuenta que según se establece en el estudio de las funciones complejas, la derivada de e^{rx} con r complejo, es también re^{rx}.

Según la definición de exponenciales complejas es :

$$y_1^* = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i \text{ sen } \beta x).$$

Por tanto (Ver ejemplo 8 del tema 6), son soluciones reales de (1), las partes real e imaginaria de esta solución compleja, es decir :

$$\mathbf{y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x \qquad y_2 = e^{\alpha x} \text{sen } \beta x.}$$

Además son linealmente independientes, pues $\frac{y_2}{y_1} = \text{tg}\beta x \neq 0$ o bien :

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos\beta x & e^{\alpha x} \text{sen}\beta x \\ e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x - \beta\text{sen}\beta x] & [\alpha\text{sen}\beta x + \beta\cos\beta x]e^{\alpha x} \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re$$

Por tanto $\{y_1, y_2\}$ es conjunto fundamental c.q.d.

<u>Ejemplo 3:</u>

Solución general de la ecuación diferencial: ***<u>y'' + 2y' + 17y = 0</u>***

Ecuación característica : $r^2 + 2r + 17 = 0$. Raíces : $r_1 = -1 + 4i$ $\quad r_2 = -1 - 4i$

Luego son soluciones linealmente independientes : $y_1 = e^{-x} \cos 4x$ $\quad y_2 = e^{-x} \text{sen} 4x$

Solución general : $\boxed{\mathbf{y = e^{-x} [C_1 \cos 4x + C_2 \text{ sen } 4x].}}$ $\quad \mathbf{C_1, C_2 \in \Re.}$

<u>Ejemplo 4:</u>

Solución general de la ecuación diferencial: ***<u>y'' + y' + y = 0</u>***

Ecuación característica : $r^2 + r + 1 = 0$. Luego $r = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Sistema fundamental de soluciones : $\left\{ y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$

Solución general : $$\boxed{\mathbf{y = e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]}}$$

Ejemplo 5 .

Solución de ***y'' + 9 y = 0*** ***tal que:*** $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

Ecuación característica : $r_2 + 9 = 0$. Raíces: $r_1 = 3i$ $r_2 = -3i$.

Sistema fundamental de soluciones : $\{y_1 = \cos 3x \quad y_2 = sen 3x\}$.

Solución general : $y = C_1 \cos 3x + C_2\, sen\, 3x\}$.

Condiciones $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow\ 1 = 0\cdot C_1 - C_2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Rightarrow 3 = 3C_1 + 0\cdot C_2 \end{cases}$. Luego: $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$.

Solución del problema de valor inicial dado : $\boxed{\mathbf{y = \cos 3x - sen\, 3x.}}$

3.- LA ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER HOMOGENEA

En este tema se están estudiando las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden, con coeficientes constantes.

Hay ecuaciones lineales con coeficientes variables que pueden transformarse, mediante cambio de variables, en ecuaciones con coeficientes constantes. Entre ellos están las ***ecuaciones de Euler*** o ***Cauchy-Euler***.

En el caso homogéneo, de segundo orden, se trata de la ecuación :

$$\boxed{a_0 x^2 \frac{d^2x}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0} \qquad (3)$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes reales y $a_0 \neq 0$.

Se verifica :

"El cambio $|x| = e^t$ reduce la ecuación (3) a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes".

En efecto :

Suponiendo $x > 0$, se hace $\boldsymbol{x = e^t}$ ó $\boldsymbol{t = \ln x}$.

Entonces : $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x^2}-\frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2}$

Sustituyendo en (3) : $a_0\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=0$

Es decir: $$\boxed{\boldsymbol{a_0\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-a_0)\frac{dy}{dt}+a_2y=0}} \qquad \textbf{(4)}$$

ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

Una vez resuelta esta ecuación, se deshace el cambio.

Notas :

a) El intervalo en el que se aplica el teorema de existencia y unicidad, es cualquier I que no contenga $x = 0$.

b) Se ha supuesto en lo anterior que $x > 0$. Si $x < 0$ se hace $x = -e^t$. Si $y(x)$ es una solución de la ecuación de Euler homogénea para $x > 0$, lo es $y(-x)$ para $x < 0$.

c) La ecuación $\boldsymbol{a_0(ax+b)^2y''+a_1(ax+b)y'+a_2y=0}$, también se transforma, mediante $\boldsymbol{|ax+b|=e^t}$ en una ecuación con coeficientes constantes.

Por tanto :

Caso 1: *Si la ecuación característica de (4) tiene dos raíces reales r_1 y r_2 distintas, la solución de (4) es:* $y(t) = C_1\, e^{r_1 t} + C_2\, e^{r_2 t}$.

Luego la solución general de (3) es : $\boldsymbol{y(x) = C_1|x|^{r_1}+C_2|x|^{r_2}}$

Caso 2: *Si la ecuación característica de (4) tiene una raíz doble r_1 la solución de (4) es :* $y(t)=e^{r_1 t}(C_1+C_2 t)$.

Luego la solución general de (3) es : $\boldsymbol{y(x)=|x|^{r_1}(C_1+C_2\ln|x|)}$.

Caso 3: *Si la ecuación característica de (4) tiene las raíces complejas* $\alpha \pm i\beta$, *la solución de (4) es:* $y(t) = e^{\alpha t}\,[C_1 \cos \beta t + C_2 \,\text{sen}\, \beta t]$.

Luego la solución general de (3) es : $\boldsymbol{y = |x|^{\alpha}\,[C_1 \cos(\beta \ln|x|) + C_2 \,\text{sen}\,(\beta \ln|x|)]}$.

Nota

Podría abordarse la resolución de (3), probando soluciones de la forma $y = x^r$ (Suponiendo $x > 0$).

Es: $y' = r\,x^{(r-1)}$, $y'' = r\,(r-1)x^{(r-2)}$. Sustituyendo en (3) :

$a_0\, r\,(r-1)\, x^r + a_1\, r\, x^r + a_2\, x^r \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad a_0\, r\,(r-1) + a_1\, r + a_2 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{a_0\, r^2 + (a_1 - a_0)\, r + a_2 = 0}$$

llamada ***ecuación indicial de (3),*** que coincide con la ecuación característica de (4).

Ejemplo 6:

Resolver la ecuación diferencial: $\boldsymbol{3x^2 y'' - 4x\, y' + 2y = 0}$.

Para $x > 0$ se hace $x = e^t$ ó $t = \ln x$

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} \; ; \qquad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2}\,.$$

En la ecuación diferencial : $3\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 4\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \qquad 3\frac{d^2x}{dt^2} - 7\frac{dx}{dt} + 2y = 0\,.$

Ecuación característica : $3r^2 - 7\,r + 2 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 2, \; r_2 = 1/3$.

Luego $y(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{(t/3)}$.

Por tanto : $\boxed{\mathbf{y(x) = C_1\, x^2 + C_2\, |x|^{(1/3)} \qquad x \neq 0.}}$

Ejemplo 7 :

Resolver la ecuación diferencial: ***$x^2 y'' + 3 x y' + y = 0.$***

Para $x > 0$ se hace: $x = e^t$ ó $t = \ln x.$

En la ecuación diferencial : $\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 3\frac{dy}{dt} + y = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0\,.$

Ecuación característica de esta última: $r^2 + 2r + 1 = 0$. Raices: $r = -1$ doble.

Luego : $y(t) = e^{-t}[C_1 + C_2 t$

Por tanto : $\boxed{\mathbf{y(x) = \frac{1}{x}\left[C_1 + C_2 \ln|x|\right] \quad x \neq 0}}\,.$

Ejemplo 8:

Resolver la ecuación diferencial: ***$x^2 y'' + 3 x y' + 5 y = 0 \quad (x > 0).$***

Se hace: $x = e^t$ ó $t = \ln x.$

En la ecuación diferencial : $\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 3\frac{dy}{dt} + 5y = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$

Ecuación característica : $r^2 + 2r + 5 = 0$. Raices: $r = -1 \pm 2i.$

Luego : $y(t) = e^{-t}\ [C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t]$

Por tanto : $\boxed{\mathbf{y(x) = \frac{1}{x}[C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2\ln x) \qquad (x > 0)}}$