

TEMA 6:

ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS DE 2º ORDEN

Aunque el motivo fundamental de este tema es el estudio de las ecuaciones LINEALES homogéneas de 2º orden, se van a dedicar los dos primeros apartados a las ecuaciones de 2º orden en general, no necesariamente lineales.

1. CONSIDERACIONES SOBRE ECUACIONES DE 2º ORDEN.

1.1.- ECUACIÓN DIFERENCIAL ASOCIADA A UNA FAMILIA BIPARAMÉTRICA DE CURVAS.

Sea

$$\boxed{y = F(x, C_1, C_2)} \quad [1]$$

una familia biparamétrica de curvas dada en forma explícita.

Supuesta F derivable dos veces respecto a x , se considera el sistema:

$$\begin{cases} y = F(x, C_1, C_2) \\ y' = F_x(x, C_1, C_2) \end{cases}$$

Si este sistema define implícitamente C_1 y C_2 como funciones de x, y, y' , podrá escribirse:

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1(x, y, y') \\ C_2 = \varphi_2(x, y, y') \end{cases}$$

Es decir que cada curva de la familia (para cada valor concreto de C_1 y C_2), viene determinada por la terna (x, y, y') , o sea, que **por cada punto y pendiente dada en él, habrá una curva y sólo una de la familia que pase por dicho punto y con la pendiente dada.**

Si se vuelve a derivar:

$$y'' = F_{xx}(x, C_1, C_2)$$

Y sustituyendo aquí las anteriores expresiones de C_1 y C_2 se obtiene:

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')} \quad [2]$$

Esta es la ecuación diferencial a la que satisfacen todas las curvas de la familia [1]. Por ello se dice que [2] es la ecuación diferencial de la familia [1].

En resumen, con las condiciones establecidas, se obtiene la ecuación diferencial de [1], eliminando C_1 y C_2 entre [1] y sus dos primeras derivadas.

Y análogamente, si la familia biparamétrica está en forma implícita $G(x, y, C_1, C_2) = 0$

Nota: Ha de suponerse que los dos parámetros C_1 y C_2 citados en todo lo anterior son esenciales, es decir, que la familia [1] no debe poder expresarse con menos parámetros. Así, la familia $y = C_1 \cdot e^{x+C_2}$ no es de dos parámetros, pues $y = C_1 \cdot e^{C_2} e^x = k \cdot e^x$.

1.2.- SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE 2º ORDEN. PROBLEMA DE VALOR INICIAL.

Se trata de considerar ahora el problema inverso del anterior. Dada la ecuación [2] de 2º orden en forma normal: ¿Existe una familia biparamétrica que la satisface? ¿Es única dicha familia? Para distinguir una solución particular concreta de [2] ¿qué condiciones deberán prefijarse?.

En las ecuaciones de primer orden $y' = f(x, y)$, bastaba prefijar el valor y_0 de la solución particular, correspondiente a un valor x_0 de la variable independiente. Para las ecuaciones [2] de 2º orden en forma normal, según se citará en el próximo teorema de existencia y unicidad, deberán prefijarse los valores y_0 y z_0 de la solución y su primera derivada, correspondientes al citado x_0 . Es decir que deberán fijarse las dos condiciones:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0 \quad [3]$$

llamadas condiciones iniciales. Un problema de valor inicial o problema de Cauchy para la ecuación diferencial [2], consiste en hallar la solución de [2] que cumple las condiciones [3].

En términos geométricos, para determinar una curva integral de la ecuación [2] deberá especificarse un punto (x_0, y_0) de la misma y la pendiente z_0 de la curva en dicho punto. Debe observarse por tanto, que por un punto (x_0, y_0) pasan infinitas curvas integrales, una por cada pendiente.

Los x_0, y_0, z_0 estarán sometidos a unas limitaciones impuestas por el comportamiento de la función f , limitaciones que se especifican en el teorema próximo.

Teorema 1.

Sea la ecuación diferencial [2]: $y'' = f(x, y, y')$, en forma normal.

Si $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ son continuas en un dominio D del espacio tridimensional (x, y, y') ,

se verifica:

Cualquiera que sea la terna $(x_0, y_0, z_0) \in D$, existe una y sólo una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial [2] definida en un cierto entorno de x_0 , y tal que $\varphi(x_0) = y_0$ $\varphi'(x_0) = z_0$.

Se renuncia a la demostración, por la complejidad de la misma.

La solución general de [2] en el dominio D citado en el teorema, es una familia biparamétrica $y = F(x, C_1, C_2)$ de funciones tal que:

- Para los valores admisibles de C_1, C_2 , la $y = F(x, C_1, C_2)$ es solución de [2].
- Cualesquiera que sean las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = z_0$, con $(x_0, y_0, z_0) \in D$, existen valores concretos de C_1 y C_2 tales que $y = F(x, C_1, C_2)$ satisface a esas condiciones.

2.- ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DE 2º ORDEN, INTEGRABLES POR REDUCCIÓN DE ORDEN.

2.1.- ECUACIONES DEL TIPO $y'' = f(x)$

Sea $f(x)$ continua en I . Evidentemente es $y' = \int f(x) dx + C_1$ y por tanto :

$$y(x) = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2$$

2.2.- ECUACIONES EN LAS QUE FALTA y : $F(x, y', y'') = 0$

Tomando como nueva función $u = y'$, resulta: $F(x, u, u') = 0$. Si esta puede resolverse y escribir su solución en forma explícita: $u = g(x, C_1)$, resulta:

$$y(x) = C_2 + \int g(x, C_1) dx$$

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación: $xy'' - y' = 3x^2 - 1$

Tomando $y' = u$, es: $xu' - u = 3x^2 - 1$ una ecuación lineal de 1^{er} orden.

La solución general de ésta es: $u = Cx + 3x^2 + 1$.

Luego para la dada será:

$$y = C_1 x^2 + x^3 + x + C_2$$

2.3.- ECUACIONES EN LAS QUE FALTA x : $F(y, y', y'') = 0$

Tomando como nueva función $y' = u$ y como variable independiente y , resulta:

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} u$$

La nueva ecuación diferencial es $F\left[y, u, \frac{du}{dy} u\right] = 0$ ya de primer orden. Su solución

será $G(y, u, C_1) = 0$

- Si la solución puede escribirse en la forma $u = g(y, C_1)$, entonces $\frac{dy}{g(y, C_1)} = dx$.

Luego:

$$x = C_2 + \int \frac{dy}{g(y, C_1)}$$

- Si puede escribirse en la forma: $y = h(u, C_1)$, entonces puede darse la solución en paramétricas:

De $u = \frac{dy}{dx}$ resulta: $dx = \frac{dy}{u} = \frac{h'(u, C_1) du}{u}$.

Por tanto:

$$x = C_2 + \int \frac{h'(u, C_1) du}{u} ; \quad y = h(u, C_1)$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación: $yy'' + (y')^2 = 0$

Tomando $y' = u$, es: $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} u$

La nueva ecuación diferencial es: $y \cdot u \frac{du}{dy} + u^2 = 0$, es decir: $u \left[y \frac{du}{dy} + u \right] = 0$

Si $y \frac{du}{dy} + u = 0$, entonces $\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$, luego $u = \frac{a}{y}$, de donde:

$ydy = adx$, es decir: $y^2 = 2ax + b$. Por tanto $y = \sqrt{C_1x + C_2}$

Si $u = 0$, entonces $y = C$, solución ya contenida en la anterior.

Nota: Podría haberse resuelto la ecuación de forma más simple, teniendo en cuenta que tal ecuación es:

$$\frac{d}{dx}(yy') = 0. \text{ Luego } yy' = a; \quad ydy = adx; \quad y^2 = 2ax + b$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación: $y'' = f(y')$

1ª forma:

<u>Falta y</u>	$y' = u$;	$u' = f(u)$;	$\frac{du}{f(u)} = dx$;	$x = C_1 + \int \frac{du}{f(u)}$
		$dy = udx$;	$\frac{u du}{f(u)} = dy$;	$y = C_2 + \int \frac{u du}{f(u)}$

2ª forma:

<u>Falta x</u>	$y' = u$;	$y'' = \frac{du}{dy} u$.	En la ecuación: $u \frac{du}{dy} = f(u)$
Luego	$dx = \frac{u du}{f(u)}$,	de donde	$y = C_2 + \int \frac{u du}{f(u)}$
Como	$dx = \frac{dy}{u}$	resulta: $dx = \frac{du}{f(u)}$.	Luego $x = C_1 + \int \frac{du}{f(u)}$

2.4.- ECUACIONES $F(x, y, y', y'') = 0$ CON F HOMOGÉNEA DE CUALQUIER GRADO COMO FUNCIÓN DE y, y', y'' .

Puede escribirse la ecuación en forma $G\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$

Cambio de función $u = \frac{y'}{y}$. Entonces $u' = \frac{y''y - y'y'}{y^2}$

Luego: $\frac{y''}{y} = u^2 + u'$. Sustituyendo en la ecuación diferencial: $G(x, u, u^2 + u') = 0$

Si puede resolverse en forma explícita: $u = g(x, C_1)$, entonces $\frac{y'}{y} = g(x, C_1)$. De donde:

$$y = C_2 e^{\int g(x, C_1) dx}$$

Ejemplo 4:

Resolver la ecuación: $(yy'' - y'^2) \operatorname{sen}^2 x + y^2 = 0$

El primer miembro es una función homogénea en y, y', y'' , de 2º grado.

$u = \frac{y'}{y}$; $\frac{y''}{y} = u^2 + u'$. La ecuación es: $\left[\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y} \right)^2 \right] \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

Luego: $[u^2 + u' - u^2] \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$, $u' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$; $u = C + \operatorname{ctg} x$

$\frac{y'}{y} = C + \operatorname{ctg} x$; $y = k e^{\int (C + \operatorname{ctg} x) dx}$ Por tanto: $y = k \operatorname{sen} x e^{Cx}$

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación: $yy'' = 2y'^2 + y^2$

La ecuación es: $\frac{y''}{y} = 1 + 2\left(\frac{y'}{y}\right)^2$

Procediendo como en el Ejemplo 4: $u^2 + u' = 1 + 2u^2$; $u' = 1 + u^2$

$\frac{du}{1 + u^2} = dx$; $\arctg u = x + a$; $u = \operatorname{tg}(x + a)$ $\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}(x + a)$

$y = C e^{\int \operatorname{tg}(x + a) dx} \Rightarrow y = \frac{C}{\cos(x - x_0)}$

3.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 2º ORDEN

Las ecuaciones diferenciales lineales tienen gran importancia teórica y también práctica por sus múltiples aplicaciones a la Ciencia e Ingeniería. Entre ellas especialmente las de 2º orden. Se trata de estudiar la estructura del conjunto de soluciones de tales ecuaciones y métodos explícitos de obtener la solución, cuando sean posibles.

En esta sección se tratará únicamente de presentar tales ecuaciones y estudiar la existencia y unicidad de solución de un problema de valor inicial.

3.1.- DEFINICIONES

Una **ecuación diferencial lineal de 2º orden** es la que puede escribirse en la forma:

$$\boxed{a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x)} \quad [4]$$

es decir, que el primer miembro de la ecuación es lineal en la función incógnita y en sus derivadas.

Se supone que los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, y la $g(x)$ son funciones definidas en un cierto intervalo $I = (a,b)$

Si $g(x) \equiv 0$ en I , la ecuación se llama **lineal homogénea**. En caso contrario, **lineal no homogénea o lineal completa**.

Si los $a_i(x)$ ($i = 0,1,2$) son constantes, se dice que la ecuación es de **coeficientes constantes**, o de **coeficientes variables** en otro caso.

Si las a_0 , a_1 , a_2 y $g(x)$ son continuas en I y además $a_0(x) \neq 0$ en I , entonces la ecuación [4] puede escribirse en la **forma canónica**:

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)} \quad [5]$$

con $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$, $h(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)}$ continuas en I

3.2.- TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN.

Naturalmente es válido el teorema 1 visto en la sección 1. para ecuaciones diferenciales de 2º orden $y'' = f(x, y, y')$.

Se trata ahora de enunciar una forma del mismo específica para las ecuaciones lineales y que se deduce inmediatamente del citado teorema general.

Teorema 2.

Si $p(x)$, $q(x)$ y $h(x)$ son continuas en un intervalo $I = (a,b)$ entonces, cualquiera que sea $x_0 \in I$ e $y_0, b \in \mathbb{R}$, existe en todo I una y sólo una solución $y = y(x)$ del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}y'' + p(x)y' + q(x)y &= h(x) \\ y(x_0) &= y_0 \quad y'(x_0) = b\end{aligned}$$

Este teorema puede deducirse del general para ecuaciones de 2º orden (excepto en cuanto a la validez de la solución en todo I , que sería necesario demostrar aparte).

En efecto:

Escrita la ecuación diferencial en la forma $y'' = f(x, y, y')$, es $y'' = h(x) - p(x)y' - q(x)y$ y como $p(x)$, $q(x)$ y $h(x)$ son continuas en I , se deduce que $f, \frac{\partial f}{\partial y} = -q(x), \frac{\partial f}{\partial y'} = -p(x)$ son continuas en la franja del espacio (x, y, y') correspondiente a $x \in I$. Basta aplicar dicho teorema 1.

Nota: Obsérvese que en este teorema 2, los valores y_0, b son cualesquiera en \mathbb{R} . También que estos teoremas de existencia siempre se refieren a problemas de valor inicial. Por ahora no se considera el que se den otras dos condiciones distintas, como por ejemplo el valor de la función $y(x)$ en dos puntos distintos.

Ejemplo 5:

Sea el problema de valor inicial:

$$y'' + \frac{1}{x-5}y' + xy = \ln(x+1) \quad y(1) = 0 \quad y'(1) = 2$$

¿Cuál es el máximo intervalo en el cual el Teorema 2 asegura la existencia y unicidad de una solución del problema? ¿Y si las condiciones fuesen $y(6) = y'(6) = 0$?

Solución: Es $p(x) = \frac{1}{x-5}$ continua para $x \neq 5$, $q(x)$ continua para todo valor de x y

$h(x) = \ln(x+1)$ continua para $x > -1$. Además $x_0 = 1$.

El intervalo abierto mayor, que contiene a $x_0 = 1$ y para el cual $p(x)$, $q(x)$ y $h(x)$ son continuas simultáneamente, es el $(-1, 5)$. Luego el problema dado de valor inicial tiene solución única en **$(-1, 5)$** .

En el caso $y(6) = y'(6) = 0$, el intervalo sería **$(5, \infty)$**

Ejemplo 6:

Solución del problema de valor inicial: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ siendo $p(x)$, $q(x)$ continuas en $I = (a, b)$ y $x_0 \in I$.

Por cumplirse las condiciones del teorema 2 existe una y sólo una solución de dicho problema, válida en I . Se trata además de la solución trivial $y(x) \equiv 0$ en I , pues ésta satisface al problema de valor inicial propuesto.

3.3.- EL OPERADOR DIFERENCIAL L: LINEALIDAD DEL MISMO.

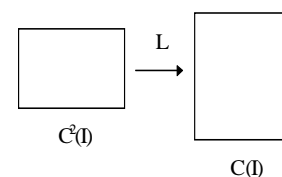
Para simplificar notaciones y demostraciones relativas a las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, suele utilizarse el operador diferencial L , con el que la ecuación diferencial [5] se escribe en la forma $L[y] = h(x)$

Se representa L como $L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$ y $L[y] = \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y$

(se suponen $p(x)$, $q(x)$ continuas en I)

Este **operador L asocia a cada función $y(x)$ con derivada 2ª continua en I , una función $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$ continua en I** . Es decir **que L es una aplicación del conjunto de funciones $C^2(I)$, en el $C(I)$** . Como el operador implica derivaciones, se dice que es un **operador diferencial**.

Puesto que, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de funciones por escalares, es $C(I)$ un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $C^2(I)$ un subespacio vectorial de $C(I)$, resulta que **L es una aplicación del espacio vectorial $C^2(I)$ en el espacio vectorial $C(I)$** .



Lema:

El operador L es una aplicación lineal del espacio vectorial $C^2(I)$ en el espacio vectorial $C(I)$.

Es decir, con las condiciones citadas anteriormente, si $y_1(x)$ e $y_2(x) \in C^2(I)$ y $k \in \mathcal{R}$, se verifica:

i) $L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

ii) $L[k \cdot y] = k \cdot L[y]$

donde estas igualdades se consideran en el sentido de funciones iguales en I .

En efecto:

$$\begin{aligned} L[y_1+y_2] &= (y_1+y_2)'' + p(y_1+y_2)' + q(y_1+y_2) = \\ &= (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = L[y_1] + L[y_2] \\ L[k \cdot y] &= (k \cdot y)'' + p(k \cdot y)' + q(k \cdot y) = k(y'' + py' + qy) = k \cdot L[y] \quad \text{c.q.d} \end{aligned}$$

Como Corolario se obtiene :
$$L\left[\sum_{i=1}^m c_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^m c_i L[y_i(x)]$$

4.- LA ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA. ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SUS SOLUCIONES.

Sea la ecuación lineal homogénea:

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0} \quad [6]$$

con $p(x)$ y $q(x)$ continuas en $I = (a,b)$.

Representaremos dicha ecuación en la forma $L[y] = 0$

Teorema 3

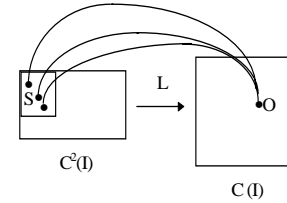
El conjunto S de soluciones en I de la ecuación [6] es un espacio vectorial, subespacio de $C^2(I)$.

En efecto:

Se ha dicho que $C^2(I)$ y $C(I)$ son espacios vectoriales sobre \mathcal{R} y que L es una aplicación lineal de $C^2(I)$ en $C(I)$.

Resolver la ecuación homogénea $L[y] = 0$ es, por tanto, hallar el núcleo $\text{Ker}(L)$ de la aplicación lineal L . Es decir $S = \text{Ker}(L)$.

Por el Algebra se sabe que el núcleo de una aplicación lineal entre espacios vectoriales, es otro espacio vectorial, subespacio del original. Luego S es un subespacio vectorial de $C^2(I)$.



Nota:

- Los espacios vectoriales $C^2(I)$ y $C(I)$ son ambos de dimensión infinita.
- Aunque no se representa así en la Figura, el $C^2(I)$ es subespacio de $C(I)$.

Definición:

Una pareja $y_1, y_2 \in S$ se llama sistema fundamental de soluciones si son linealmente independientes en I . Es decir, si $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$ en I , $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$.

Teorema 4.

La dimensión del espacio vectorial S es 2.

Para demostrarlo, bastará encontrar una base de S formada por 2 elementos, es decir, un conjunto de dos soluciones que sean linealmente independientes en I (sistema fundamental) y generen S .

Considérense los dos problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(x_0) = 1 \quad y'(x_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L[y] = 0 \\ y(x_0) = 0 \quad y'(x_0) = 1 \end{cases} \quad x_0 \in I$$

y sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ las respectivas soluciones, cuya existencia y unicidad está garantizada por el Teorema 2.

Se trata de mostrar que el conjunto $B = \{u_1(x), u_2(x)\}$ es base de S . En efecto:

a) $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son linealmente independientes en I .

Supongamos que existen c_1 y c_2 tales que:
$$\left. \begin{aligned} c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) &\equiv 0 \text{ en } I \\ \text{Entonces también: } c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) &\equiv 0 \text{ en } I \end{aligned} \right\}$$

En particular se cumplirá el sistema para $x = x_0$.

Luego:
$$\left\{ \begin{aligned} c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) &= 0 \text{ en } I \\ c_1 u_1'(x_0) + c_2 u_2'(x_0) &= 0 \text{ en } I \end{aligned} \right. \quad \text{es decir} \quad \left\{ \begin{aligned} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 &= 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Por tanto:
$$\left\{ \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Así pues, $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son linealmente independientes en I .

b) B es conjunto generador de S .

Es decir, que cualquier solución puede escribirse como combinación lineal de u_1 y u_2 .

Sea $y(x) \in S$. Será la solución única de un problema de valor inicial $L[y] = 0$ $y(x_0) = \alpha$ $y'(x_0) = \beta$.

Considérese la función $f(x) = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$. Verifica:

$$\left\{ \begin{aligned} - f(x) &\in S \text{ por ser combinación lineal de elementos de un espacio vectorial} \\ - \left\{ \begin{aligned} f(x_0) &= \alpha u_1(x_0) + \beta u_2(x_0) = \alpha \\ f'(x_0) &= \alpha u_1'(x_0) + \beta u_2'(x_0) = \beta \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Luego $f(x)$ es solución del mismo problema de valor inicial que $y(x)$. Por tanto según el Teorema de existencia y unicidad de solución, es $y(x) = f(x)$, es decir:

$$y(x) = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$$

Se ha demostrado que $B = \{u_1(x), u_2(x)\}$ es base de S . Por tanto la dimensión de S es 2.

Consecuencia:

Una vez visto que la dimensión de S es 2, cualquier sistema fundamental de soluciones (2) será una base del espacio de soluciones.

Por tanto, dadas cualesquiera $y_1(x), y_2(x) \in S$ y linealmente independientes en I , la solución general de [6], (o sea, el conjunto S) vendrá dada por:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad x \in I \quad \text{con } c_1 \text{ y } c_2 \text{ arbitrarias.}$$

Ejemplo 7:

a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ sabiendo que tiene soluciones de la forma $y = x^p$, con p a determinar.

b) Hallar en particular la solución que satisface a las condiciones iniciales $y(1) = 3$ y $y'(1) = 4$

Solución:

a) Si $y = x^p$ es solución, entonces:

$$y' = p \cdot x^{p-1}$$

$$y'' = p \cdot (p-1) \cdot x^{p-2}$$

En la ecuación diferencial:

$$p \cdot (p-1) \cdot x^p - 2p \cdot x^p + 2x^p \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad p \cdot (p-1) - 2p + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = 1 \\ p = 2 \end{cases}$$

Por tanto son soluciones: $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, que además son linealmente independientes en cualquier intervalo.

Luego la solución general es:

$$\boxed{y = C_1 x + C_2 x^2}$$

b)

$$\begin{array}{ll} y(1) = 3 & 3 = C_1 + C_2 \\ y'(1) = 4 & 4 = C_1 + 2C_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2x + x^2}$$

Ejemplo 8:

Si la ecuación [6] $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tiene una solución que es una función compleja $y(x) = u(x) + iv(x)$, entonces las partes real e imaginaria $u(x)$, $v(x)$ son soluciones reales de la misma ecuación.

En efecto: Es $0 = L[y] = L[u + iv] = L[u] + iL[v]$. Luego $L[u] = 0$ y $L[v] = 0$. Por tanto $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones de la ecuación [6].

Así por ejemplo, es solución compleja de $y'' + y = 0$ la función compleja $y = e^{ix}$, luego lo son su parte real e imaginaria, $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \sin x$.

5.- EL WRONSKIANO Y LA INDEPENDENCIA LINEAL.

Aunque es inmediato el reconocimiento de la dependencia o independencia lineal de dos soluciones de una ecuación lineal de 2º orden, se van a introducir unos criterios de independencia basados en el wronskiano, pensando en su generalización al caso de n soluciones de las ecuaciones lineales de orden n .

Definición:

*Dadas n funciones $f_1(x), \dots, f_n(x) \in C^n(I)$, se llama **wronskiano** (o determinante de Wronski) de las mismas, y se designa por $W[f_1, \dots, f_n]$ a:*

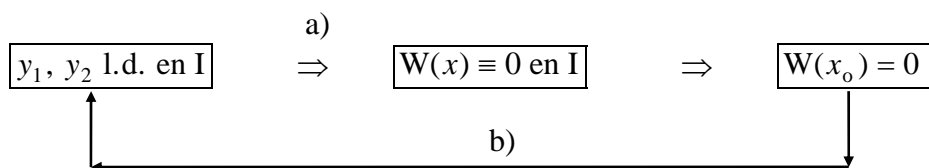
$$W[f_1, \dots, f_n] = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Es también una función real: $W(x); x \in I$

Teorema 5. (Criterio de dependencia lineal).

“Condición necesaria y suficiente para que 2 soluciones particulares $y_1(x), y_2(x)$ de la ecuación homogénea $[6] \quad L[y] = 0$ (donde $p(x), q(x) \in C(I)$), sean linealmente dependientes en I , es que exista algún $x_0 \in I$ tal que $W[y_1(x_0), y_2(x_0)] = 0$. Entonces $W[y_1(x), y_2(x)] \equiv 0$ en I ”.

Demostración: Se sigue el proceso:



a) Sean y_1, y_2 linealmente dependientes en I . Entonces existen c_1 y c_2 no nulas ambas tales que:

$$\text{Luego tambien} \quad \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$$

Por cada $x \in I$, es un sistema homogéneo en la incógnitas c_1 y c_2 . Como por hipótesis tiene solución distinta de la trivial nula, su determinante debe ser nulo, es decir $W[y_1(x), y_2(x)] \equiv 0 \quad \forall x \in I$.

Nota: Observemos que para este resultado no es necesario que $y_1(x)$, $y_2(x)$ sean soluciones de $L[y] = 0$. Basta que $y_1, y_2 \in C^2(I)$ y sean linealmente dependientes.

b) Supóngase que $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$ para algún $x_0 \in I$.

Entonces son linealmente dependientes sus vectores columna, es decir existirán c_1 y c_2 no ambas nulas, tales que:

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto la función $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es la solución del problema de valor inicial $L[y] = 0$; $y(x_0) = 0$; $y'(x_0) = 0$, el mismo al que satisface la función idénticamente nula en I . Luego deben coincidir, es decir $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$ en I .

De ahí que $y_1(x)$, $y_2(x)$ son linealmente dependientes en I .

Corolario: (Criterio de independencia lineal)

“Condición necesaria y suficiente para que 2 soluciones particulares $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ecuación homogénea $L[y] = 0$, sean linealmente independientes en I , es que:

$$W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0 \quad \forall x \in I.”$$

Fórmula de Abel (ó de Liouville):

“Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en (a,b) y $x_0 \in (a,b)$, entonces:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \quad [7]$$

Demostración:

$$\text{Es } W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2. \quad \text{Luego: } \frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Además:

$$\begin{aligned} y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0 \\ y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la 1ª por $y_1(x)$ y la 2ª por $y_2(x)$ y restando:

$$\frac{dW}{dx} + p(x)W(x) = 0. \text{ Luego: } \frac{dW}{W} = -p(x)dx, \text{ de donde: } W(x) = Ke^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}$$

Para $x = x_0 \Rightarrow W(x_0) = K$

Por tanto : $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}$ c.q.d.

Nota: Obsérvese que si $p(x) \equiv 0$, entonces $W(x) = W(x_0) \forall x \in I$

También que si $W(x_0) = 0$, entonces $W(x) \equiv 0 \forall x \in I$

Ejercicio 9:

¿Puede ser $W(x) = 3(x-1)^2$ el wronskiano en $(0,2)$ de dos soluciones de alguna ecuación de 2º orden lineal homogénea: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ con $p(x), q(x)$ continuas en $(0,2)$?

$W(x)$ sólo se anula para $x = 1$ en el intervalo $(0,2)$ y debería anularse en todos o ningún punto del intervalo. Luego $W(x)$ no puede ser tal wronskiano en ningún intervalo abierto que contenga a $x = 1$

Ejercicio 10:

Sea la ecuación $y'' + y = 0$. Mostrar que son soluciones suyas $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ en todo \mathbb{R} . ¿Son linealmente independientes? ¿Como se escribe una solución general de (I) ?

Es evidente que y_1 e y_2 satisfacen la ecuación diferencial.

Además $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ en \mathbb{R}

Por tanto son linealmente independientes.

Se observa que $W(x) = 1 = \text{cte } \forall x \in \mathbb{R}$. Era previsible por ser $p(x) \equiv 0$, pues entonces $W(x) = W(x_0) \forall x \in \mathbb{R}$. Solución general: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

6. REDUCCIÓN DE ORDEN.

Se ha visto que la solución general de una ecuación lineal homogénea [6] es:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linealmente independientes en I . ¿Como obtener dos soluciones linealmente independientes? ¿Y si sólo se sabe obtener una solución (no trivial)? En este caso, el conocimiento de una solución, permite un método para reducir el orden de la ecuación [6].

Teorema 6.

Si $y_1(x)$ es una solución no trivial de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, el cambio de función $y = y_1(x) \cdot u$ reduce la ecuación a una lineal homogénea de primer orden, en la variable dependiente $v = \frac{du}{dx}$

En efecto:

$$\begin{aligned} \text{Si } y &= y_1 u && \text{resulta:} \\ y' &= y_1' u + y_1 u' \\ y'' &= y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} (y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'') + p(x)(y_1' u + y_1 u') + q(x)(y_1 u) &= 0 \\ \text{es decir: } y_1 u'' + [2y_1' + p y_1] u' + [y_1'' + p y_1' + q y_1] u &= 0 \end{aligned}$$

Es: $y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$ por ser y_1 solución de la ecuación dada.

$$\text{Luego: } y_1 u'' + [2y_1' + p y_1] u' = 0$$

$$\text{Haciendo } u' = v, \text{ resulta: } y_1 v' + [2y_1' + p y_1] v = 0$$

Resuelta ésta, se obtiene v , e integrando se halla u . Entonces $y = y_1 u$

Ejercicio 11:

Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Evidentemente es solución particular $y_1 = x$

$$\text{Cambio: } y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu' \quad y'' = 2u' + xu''$$

En la ecuación diferencial: $(x^2 + 1)(2u' + xu'') - 2x(u + xu') + 2xu = 0$

Simplificando: $x(x^2 + 1)u'' + 2u' = 0$

$$\text{Poniendo } u' = v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x(x^2 + 1)} = \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$\text{Por tanto: } v = C_1 e^{\ln \frac{x^2 + 1}{x^2}} \quad v = C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2} = C_1 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{Luego: } u = C_1 \left(x - \frac{1}{x} \right) + C_2$$

Definitivamente:

$$\boxed{y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x}$$

7.ECUACIÓN DE LEGENDRE.

Dada la ecuación diferencial $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $-1 < x < 1$ (Ecuación de Legendre), buscar por inspección una solución particular. Hallar su solución general.

Evidentemente es solución $y_1 = x$

$$\text{Cambio: } y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu' \quad y'' = 2u' + xu''$$

En la ecuación diferencial: $(1 - x^2)(2u' + xu'') - 2x(u + xu') + 2xu = 0$

Simplificando: $x(1 - x^2)u'' + (2 - 4x^2)u' = 0$

$$\text{Poniendo } u' = v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{(2 - 4x^2)dx}{x(1 - x^2)} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$\text{Luego } v = \frac{C}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2} \right) \quad \Rightarrow \quad u = a \left[\ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{x} \right] + b$$

$$(a = -C/2)$$

Por tanto, en $-1 < x < 1$ es:

$$\boxed{y = a \left[x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right] + b x}$$