

TEMA 8:

ECUACIÓN LINEAL COMPLETA DE 2º ORDEN

Se ha estudiado en los temas 6 y 7, la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0} \quad [1]$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ continuas en un intervalo I .

Se trata ahora de considerar la ecuación lineal completa o no homogénea de 2º orden:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x). \quad \text{O mejor en forma canónica:}$$

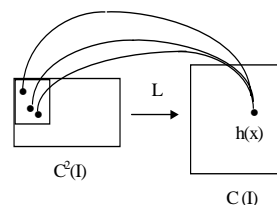
$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)} \quad [2] \quad \text{ó} \quad \boxed{L[y] = h(x)}$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $h(x)$ continuas en un intervalo I .

Ya se estudió en el tema 6 un teorema de existencia y unicidad de solución, para los problemas de valor inicial correspondientes. También la linealidad del operador diferencial:

$$L: C^2(I) \rightarrow C(I).$$

Resolver la ecuación lineal completa [2] equivale a obtener el conjunto de las funciones $y(x)$ de $C^2(I)$ que son transformadas por el operador L en la función $h(x)$ de $C(I)$.



1. ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES.

Teorema 1. (Principio de superposición)

Si las funciones $y_i(x)$ $i=1, 2, \dots, m$, son soluciones particulares en I , respectivamente de $L[y]=h_i(x)$, entonces la función $k_1 y_1(x) + \dots + k_m y_m(x)$ lo es de $L[y]=k_1 h_1(x) + \dots + k_m h_m(x)$

En efecto: Basta aplicar la linealidad del operador L :

$$L[k_1 y_1(x) + \dots + k_m y_m(x)] = k_1 L[y_1] + \dots + k_m L[y_m] = k_1 h_1(x) + \dots + k_m h_m(x)$$

Corolario.

La diferencia de dos soluciones particulares $y_1(x), y_2(x)$ de la ecuación completa $L[y]=h(x)$ [2], es solución de la correspondiente homogénea $L[y]=0$ [1]

$$\text{Pues } L[y_2 - y_1] = L[y_2] - L[y_1] = h(x) - h(x) = 0$$

Ejemplo 1:

Puesto que $y_1(x) = x-1$ es una solución particular de $y'' + 2y' - 3y = 5 - 3x$ en $I = \mathbb{R}$, e

$y_2(x) = e^{2x}$ lo es de $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$, una solución de

$$y'' + 2y' - 3y = 10 - 6x + e^{2x} \text{ será la } y_3(x) = 2(x-1) + \frac{e^{2x}}{5}$$

Ejemplo 2:

Sea la ecuación: $L[y] = h_1(x) + i h_2(x)$, en la que los coeficientes $p(x), q(x)$ y las funciones $h_1(x)$ y $h_2(x)$ son reales y continuas en I .

Si tiene la solución compleja $y = y_1(x) + i y_2(x)$, entonces la parte real $y_1(x)$ y la parte imaginaria $y_2(x)$, son soluciones de las ecuaciones: $L[y] = h_1(x)$ y $L[y] = h_2(x)$ respectivamente.

En efecto:

$$\text{Es } h_1(x) + i h_2(x) = L[y_1(x) + i y_2(x)] = L[y_1] + i L[y_2]$$

$$\text{Por tanto: } L[y_1] = h_1(x) \quad \text{y} \quad L[y_2] = h_2(x)$$

Teorema 2.

Si $y_p(x)$ es una solución particular en I de la ecuación completa [2], e $y_1(x)$, $y_2(x)$ son dos soluciones de la correspondiente ecuación homogénea [1], linealmente independientes en I , entonces la solución general de la completa es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p \quad \text{con } c_1 \text{ y } c_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

- Cualesquiera que sean c_1 y c_2 , la $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ es solución de [2]

En efecto:

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] + L[y_p] = L[y_p] = h(x)$$

- Recíprocamente: Toda solución de [2] puede expresarse en la forma $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ para unos valores concretos de c_1 y c_2 .

En efecto:

Sea $y = \varphi(x)$ una solución de [2]. Entonces $\varphi(x) - y_p$ es solución de la homogénea [1]. Luego puede escribirse como una combinación lineal concreta de los elementos del sistema fundamental $\{y_1(x), y_2(x)\}$:

$$\varphi(x) - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2. \quad \text{Por tanto } \varphi(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$

Ejemplo 3:

Hallar la solución general de la ecuación diferencial: $y'' + 4y = 4x$

La solución general de la correspondiente homogénea $y'' + 4y = 0$ es la $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

Evidentemente es solución particular de la completa la $y_p = x$.

Luego la solución general de la ecuación dada es:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x$$

Ejemplo 4:

a) Comprobar que $y_p = \operatorname{tg} x$ es una solución particular de la ecuación diferencial $y'' - 2y = 2 \operatorname{tg}^3 x$.

b) Hallar la solución general de: $y'' - 2y = 2 \operatorname{tg}^3 x - 2x$

$$a) y_p = \operatorname{tg} x \quad y_p' = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad y_p'' = 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

Luego $y_p'' - 2y_p = 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg}^3 x \Rightarrow y_p$ es solución.

b) Una solución particular de $y'' - 2y = -2x$ es evidentemente $y = x$.

Luego una solución particular de $y'' - 2y = 2 \operatorname{tg}^3 x - 2x$ es $\operatorname{tg} x + x$.

La solución general de $y'' - 2y = 0$ es $y_h = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$

Luego la solución general buscada es:

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + \operatorname{tg} x + x$$

2. EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES.

El método de variación de las constantes, o *método de Lagrange*, se utiliza para determinar una solución particular (o la solución general) de la ecuación completa:

$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$ [2], supuesto conocido un sistema fundamental de soluciones de la correspondiente ecuación homogénea [1], es decir, supuesta conocida la solución general de la ecuación [1].

Este método es aplicable en todos los casos, incluso en el caso de coeficientes variables, siempre que se conozca un sistema fundamental de soluciones de [1].

Se considera la ecuación [2]: $L[y] = h(x)$, con $p(x), q(x), h(x) \in C(I)$ y sea $\{y_1(x), y_2(x)\}$ un sistema fundamental de soluciones de la correspondiente $L[y] = 0$

Entonces la solución general de [1] es: $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ con c_1, c_2 constantes arbitrarias.

El método de variación de las constantes consiste en buscar una solución particular de [2], escrita en la forma:

$$y_p(x) = k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \quad [3]$$

es decir, reemplazando las constantes c_1 y c_2 de la solución de [1], por funciones $k_1(x), k_2(x)$.

Las dos funciones $k_1(x)$, $k_2(x)$, deben ser tales que se satisfaga una **única condición obligada**: que la $y_p(x)$ sea solución de [2]. Como son dos funciones incógnita, se puede imponer una 2ª condición a elegir, con tal que no sea incompatible con la 1ª condición obligatoria.

Se escogerá la **2ª condición adicional** de forma que se simplifiquen los cálculos.

Para pedir que [3] sea solución de [2], deben calcularse las derivadas:

$$y_p' = (k_1' y_1 + k_2' y_2) + (k_1 y_1' + k_2 y_2')$$

En este momento se impone la condición adicional: $k_1' y_1 + k_2' y_2 = 0$

Entonces es:

$$\begin{cases} y_p = k_1 y_1 + k_2 y_2 \\ y_p' = k_1 y_1' + k_2 y_2' \\ y_p'' = k_1 y_1'' + k_2 y_2'' + k_1' y_1' + k_2' y_2' \end{cases}$$

Se impone ahora la condición obligatoria: y_p debe ser solución de [2].

Resulta:

$$\begin{aligned} h(x) = L[y_p] &= y_p'' + p(x) y_p' + q(x) y_p = \\ &= k_1 L[y_1] + k_2 L[y_2] + (k_1' y_1' + k_2' y_2') = \underline{k_1' y_1' + k_2' y_2'} \end{aligned}$$

Por tanto, $k_1'(x)$, $k_2'(x)$ deben satisfacer las dos condiciones:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1' y_1 + k_2' y_2 &= 0 \\ k_1' y_1' + k_2' y_2' &= h(x) \end{aligned}} \quad x \in I \quad [4]$$

El determinante de este sistema lineal no homogéneo en las incógnitas k_1' , k_2' es:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W[y_1, y_2] \text{ el cual no se anula en ningún punto de } I, \text{ por ser } y_1(x), y_2(x)$$

linealmente independientes en I .

Por tanto el sistema [4] es compatible y determinado. Su solución es:

$$k_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ h(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \varphi_1(x) \quad ; \quad k_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & h(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \varphi_2(x)$$

Basta integrar para obtener $k_1(x)$ y $k_2(x)$ que se sustituirán en [3], para obtener $y_p(x)$. Si en la integración se toman todos los posibles $k_1(x)$, $k_2(x)$, se obtendrán todas las soluciones particulares $y_p(x)$ posibles, es decir, la solución general.

Nota

Debe tenerse en cuenta si se quiere utilizar directamente el sistema [4], que $h(x)$ es el 2º miembro de la forma canónica [2] de la ecuación diferencial.

Ejemplo 5:

Hallar la solución general de la ecuación: $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

La correspondiente homogénea es: $y'' + y = 0$

Ecuación característica: $r^2 + 1 = 0$: Raíces: $r = \pm i$

Luego un sistema fundamental de soluciones de la homogénea es: $\{y_1 = \cos x, y_2 = \sin x\}$

Solución general de la homogénea: $y_H = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Por el método visto, se busca solución particular de la forma:

$$y_p = k_1(x) \cos x + k_2(x) \sin x$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} y_p = k_1 \cos x + k_2 \sin x \\ y_p' = -k_1 \sin x + k_2 \cos x \\ y_p'' = -k_1 \cos x - k_2 \sin x - k_1' \sin x + k_2' \cos x \\ y_p'' + y_p = -k_1' \sin x + k_2' \cos x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si condición adicional: } k_1' \cos x + k_2' \sin x = 0 \\ \text{cond. obligada: } -k_1' \sin x + k_2' \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{array}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1'(x) = -1 \\ k_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \end{array} \right. \quad \text{Luego: } \left\{ \begin{array}{l} k_1(x) = c_1 - x \\ k_2(x) = c_2 + \ln |\sin x| \end{array} \right.$$

Por tanto la solución general de la ecuación dada es:

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \cdot \ln |\sin x| - x \cdot \cos x}$$

válida en cualquier intervalo I en el que $\sin x \neq 0$, es decir, de la forma $(n\pi, (n+1)\pi)$

Ejemplo 6:

Solución general de: $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

La homogénea es: $y'' - 2y' + y = 0$

Ecuación característica: $r^2 - 2r + 1 = 0$. Raíces: $r = 1$ (doble)

Solución general de la homogénea $y_H = e^x (c_1 + c_2 x)$

Por el método de variación de las constantes: $y_p = k_1(x) e^x + k_2(x) x e^x$

$$\left. \begin{aligned} y_p &= k_1 e^x + k_2 x e^x \\ y_p' &= k_1 e^x + k_2 e^x (x+1) \\ y_p'' &= k_1 e^x + k_2 e^x (x+2) + k_1' e^x + k_2' e^x (x+1) \\ y_p'' - 2y_p' + y_p &= k_1' e^x + k_2' e^x (x+1) \Rightarrow \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{si condic. adicional: } k_1' e^x + k_2' x e^x = 0 \\ &\text{cond. obligada: } k_1' e^x + k_2' e^x (x+1) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (x+1) e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \quad \text{Resolviendo el sistema en } k_1', k_2':$$

$$k_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ e^x & (x+1) e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{-x}{x^2 + 1} \quad k_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2 + 1} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{Una solución en } k_1 \text{ y } k_2: \begin{cases} k_1(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \\ k_2(x) = \arctg x \end{cases}$$

$$\text{Luego: } y_p = -\frac{e^x}{2} \ln(x^2 + 1) + x e^x \cdot \arctg x$$

Por tanto la solución general de la ecuación dada es:

$$\boxed{y = e^x \left[c_1 + c_2 x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + x \cdot \arctg x \right]}$$

Ejemplo 7:

Hallar una solución particular de: $y'' + y = \operatorname{cosec} x + 2x - 7$

El método más simple es considerar por separado las ecuaciones $L[y] = \operatorname{cosec} x$ y $L[y] = 2x - 7$.

Para la primera, se aplica el método de variación de las constantes, que en el Ejemplo 5, ha dado lugar a:

$$y_p^1 = \operatorname{sen} x \cdot \ln |\operatorname{sen} x| - x \cdot \cos x$$

Para la 2ª ecuación, es evidente que:

$$y_p^2 = 2x - 7$$

Luego, por el principio de superposición, será solución particular de la ecuación dada:

$$\boxed{y_p = \operatorname{sen} x \cdot \ln |\operatorname{sen} x| - x \cdot \cos x + 2x - 7}$$