4.- OTRAS CUESTIONES.

4.1.- REDUCCIÓN DE ORDEN.

El método de reducción de orden visto para las ecuaciones lineales homogéneas, puede aplicarse igualmente a las ecuaciones lineales completas $y'' + \mathrm{p}(x)y' + \mathrm{q}(x)y = \mathrm{h}(x)$.

La sustitución **y = y_1(x)u** ***donde $y_1(x)$ es una solucion particular de la correspondiente ecuación homogénea,*** reduce la ecuación completa a otra completa ***de primer orden,*** en la variable dependiente $v = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

Ejemplo 14:

Resolver la ecuación: $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$, ***buscando por inspección una solución particular de la correspondiente homogénea***.

Es evidente que $y_1 = x$ es una solución particular de la correspondiente homogénea. Efectuando el cambio $y = xu$, resulta:

$y = x u$
$y' = u + x u'$ En la ecuación completa:
$y'' = 2u' + x u''$

$$x^2 [2u' + xu''] - x (x+2) (u + xu') + (x+2) xu = x^3$$

Luego: $x^3 u'' - x^3 u' = x^3$, es decir: $u'' - u' = 1$

Tomando $u' = v$, es $v' - v = 1$. Luego : $v = C_1 e^x - 1$

Por tanto: $u = C_1 e^x - x + C_2$. Es decir: $\boxed{y = C_1 x e^x - x^2 + C_2 x}$

También podría resolverse la correspondiente homogénea usando el método de reducción de orden y buscando luego una solución particular de la completa por el método de variación de las constantes.

Ejemplo 15:

Resolver la ecuación: $\boldsymbol{y'' \,sen^2 x - 3y' \,sen\, x \cos x + (1 + 2\cos^2 x)y = 3\cos x}$
sabiendo que una solución particular de la correspondiente homogénea es $\boldsymbol{y_1 = sen\, x}$ ***y una particular de la completa*** $\boldsymbol{y_p = \cos x}$

Evidentemente la solución general buscada tendrá la forma: $y = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\, x + \mathrm{B}\, y_2 + \cos x$
Basta buscar otra solución particular y_2 de la homogénea. Para ello se empleará la reducción de orden en la homogénea, pues ya se conoce una solución particular de la completa.

Cambio en la homogénea: $\underline{y = u\,\mathrm{sen}\, x}$. Resulta:

y = u sen x
y' = u cos x + u' sen x
y''= 2u'cosx – u sen x + u''senx

Sustituyendo en la ecuación L[y] = 0:

$(\mathrm{sen}^3 x)u'' + (2\,\mathrm{sen}^2 x \cos x - 3\,\mathrm{sen}^2 x \cos x)\, u' = 0 \;\Rightarrow\; (\mathrm{sen}\, x)u'' - (\cos x)u' = 0$

$\underline{u' = v}$ $\quad\underline{(\mathrm{sen}\, x)v' - (\cos x)v = 0}$ $\quad \dfrac{v'}{v} = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x} \;\Rightarrow\; v = a e^{\ln|\mathrm{sen}\, x|}$

v = a·sen$x$ Una solución particular será: v = sen x . Luego $u_1 = \cos x$
Y por tanto : $y_2 = u_1 \,\mathrm{sen}\, x = \cos x \,\mathrm{sen}\, x$
La solución general de la homogénea será : $y_H = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\, x + \mathrm{B} \cos x\, \mathrm{sen}\, x$

Y la solución general de la ecuación dada: $\boxed{\mathbf{y = A\, sen\, x + B\, cos\, x\, sen\, x + cos\, x}}$

4.2.- ECUACIONES DE EULER COMPLETAS.

Ya se vió que las ecuaciones de Euler-Cauchy homogéneas $a_o x^2 y'' + a_1 xy' + a_2 y = 0$, se reducían a ecuaciones lineales con coeficientes constantes, mediante el cambio $|x| = e^t$.

El método es también válido para la ecuación de Cauchy-Euler completa:

$$a_o x^2 y'' + a_1 xy' + a_2 y = g(x)$$

Puede resolverse la homogénea correspondiente, mediante el cambio $|x| = e^t$, y luego resolver la completa por el método de variación de las constantes. O bien, efectuar el cambio en la ecuación completa.

Ejemplo 16:

Resolver la ecuación : $x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2$

a) Cambio en la completa: $|x| = e^t$ ó $t = \ln |x|$

Para $x>0$

$$\left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dot{y}\dfrac{1}{x} \\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \ddot{y}\dfrac{1}{x^2} - \dot{y}\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} \text{En la completa: } (\ddot{y} - \dot{y}) + \dot{y} - 4y = 4e^{2t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} - 4y = 4e^{2t}$$

Solución general de la homogénea: $y_H(t) = A\, e^{2t} + B\, e^{-2t}$

Solución de la completa: Se prueba una solución de la forma: $y_p = a\, t\, e^{2t}$

Entonces: $\begin{cases} \dot{y}_p = ae^{2t}(2t+1) \\ \ddot{y}_p = ae^{2t}(4t+4) \end{cases}$

Y sustituyendo en la ecuación: $\ddot{y} - 4y = 4\, e^{2t}$, resulta:

$ae^{2t}\,[4t + 4 - 4t] = 4\, e^{2t} \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Luego: $\underline{y_p = t\, e^{2t}}$. Por tanto: $y(t) = A\, e^{2t} + B\, e^{-2t} + t\, e^{2t}$

De donde: $$\boxed{\mathbf{y(x) = A\,x^2 + \frac{B}{x^2} + x^2 \ln|x| \qquad x \neq 0}}$$

b) Cambio en la homogénea

Efectuando el cambio $|x| = e^t$ se resolvería la ecuación homogénea, obteniéndose $y_H(x) = A\,x^2 + \dfrac{B}{x^2}$

Y aplicando ahora el método de variación de las constantes, se obtendría la solución general de la completa.

4.3.- OTROS MÉTODOS PARA RESOLVER LA ECUACIÓN COMPLETA.

Además del método de variación de las constantes o el de coeficientes indeterminados, existen otros métodos como el de los anuladores o el de operadores, para buscar una solución particular de la ecuación lineal completa.
Así, en el caso de coeficientes constantes, el método de operadores actúa como se ve en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 17:

Sea la ecuación diferencial : L[y] = y'' – y' –2y = e^x

Podría escribirse $y' = Dy$ $y'' = D^2y$ y entonces $L[y] = (D^2-D-2)y$ o mejor $L[y] = (D+1)(D-2)y$. La ecuación es:

$$(D + 1)\,(D - 2)\,y = e^x$$

Sea $u = (D-2)y$. Entonces, resolver la ecuación diferencial dada equivale a resolver las dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases}(D+1)u = e^x \\ (D-2)y = u\end{cases}$$

$$(D+1)u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' + u = e^x \quad \Rightarrow \quad u = ae^{-x} + \frac{e^x}{2}$$

$$(D-2)y = u \quad \Rightarrow \quad y' - 2y = a\,e^{-x} + \frac{e^x}{2}$$

En ésta es: $y_H = b\,e^{2x}$. Y para la completa, se prueba : $y_p = A\,e^{-x} + B\,e^x$
Entonces: $y_p' = -A\,e^{-x} + B\,e^x$. Y sustituyendo en la completa:

$$-3Ae^{-x} - Be^x = ae^{-x} + \frac{e^x}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{a}{3} \\ B = -\frac{1}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{a}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$$

Por tanto: $y = be^{2x} - \frac{a}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$

Es decir: $$\boxed{\mathbf{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x}}$$