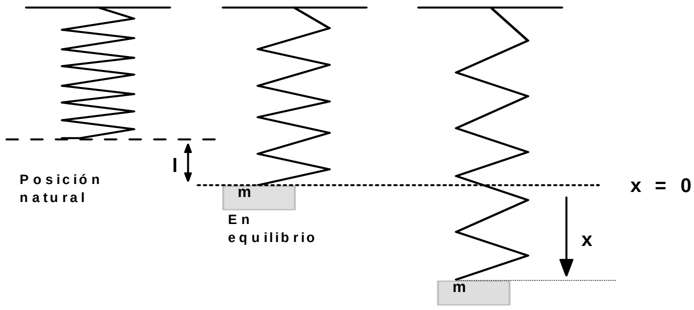
4. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE VIBRACIONES MECÁNICAS.

Se trata de estudiar el movimiento de una masa que cuelga del extremo de un muelle.

Se supone que se sitúa la masa en reposo, en posición de equilibrio.

Se pone el sistema en movimiento , por ejemplo estirando la masa hacia abajo una cierta distancia desde la posición de equilibrio y soltándola en $t = 0$ con una velocidad inicial nula o no, hacia arriba o hacia abajo.



El sistema puede estar en un medio resistente (por ejemplo agua) que da lugar a una fuerza de resistencia (podría tratarse también de un amortiguador).

También podrían existir fuerzas exteriores. (***Movimiento forzado***).

Se sabe , por la Ley de Hooke, que el modulo de la fuerza para producir una elongación en un muelle, es directamente proporcional a esa elongación, para desplazamientos no demasiados grandes. La constante de proporcionalidad **k** se llama ***constante del muelle***. Por tanto el muelle produce sobre la masa una fuerza (***de recuperación***) de valor: $-k(x + l)$.

Si la masa está en reposo en su posición de equilibrio, es $x = 0$, luego $-mg = -kl$, es decir: $mg = kl$.

Por tanto la fuerza de recuperación para x es: ***- kx - mg.***

4.1 MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO.

La ecuación diferencial del mismo será :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg, \quad \text{es decir} \quad \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0} \quad (5)$$

donde m es la masa y $k > 0$ la constante del muelle.

La ecuación característica es : $ms^2 + k = 0$.

Luego $s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Por tanto, la solución general de (5) es : $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t.$

Con las condiciones iniciales: $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ resulta :

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ v_0 = C_2\,\omega \end{cases} \qquad \text{Luego:} \quad x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La solución general suele escribirse mejor en la forma siguiente:

Haciendo $\begin{cases} C_1 = A \operatorname{sen}\varphi \\ C_2 = A\cos\varphi \end{cases}$, o sea $\begin{cases} A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{C_1}{C_2} \end{cases}$ resulta:

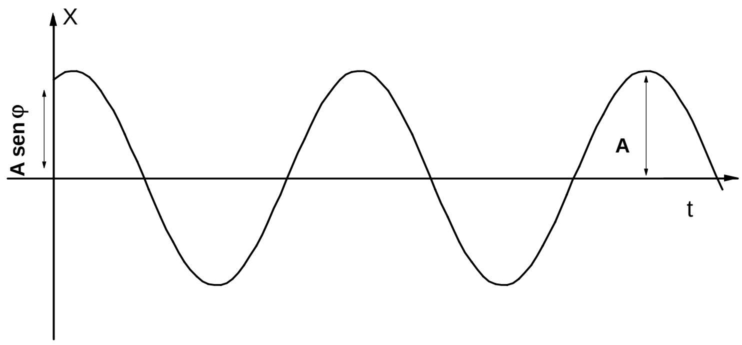
x = A sen φ cos ωt + A cos φ sen ωt, es decir: $\boxed{x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}$ ***(6).***

Se trata de un ***movimiento sinusoidal*** (armónico simple) de amplitud A. Es ***periódico*** por tanto, con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, es decir, con frecuencia $\upsilon = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

La constante $\boldsymbol{\varphi}$ recibe el nombre de ***constante o ángulo de fase***.

Las constantes A y φ dependen de las condiciones iniciales, pero ***el periodo y la frecuencia de la oscilación son independientes de esas condiciones iniciales***.

Gráfica:



Ejemplo 9:

Ecuación del movimiento libre no amortiguado, si la masa es 10 kg., la cte. del muelle es k = 250 kg/sg² y la masa se desplaza hacia abajo 30 cm y se la suelta con una velocidad hacia arriba de 10 cm/sg .

Los datos son: m = 10 kg. ; K = 250 kg/sg^2 ; x_0 = +30 cm ; v_0 = - 10 cm/sg

Ecuación : $$10\frac{d^2x}{dt^2} + 250\,x = 0 \quad .$$

Ecuación característica: $10\, s^2 + 250 = 0$. Raices: $s = \pm 5i$

Solución general : $x(t) = C_1 \cos 5t + C_2 \operatorname{sen} 5t.$

$$\left.\begin{array}{ll} x(0)=30\text{cm} & \Rightarrow\ 30=C_1 \\ x'(0)=-10\text{cm/sg} & \Rightarrow\ -10=5C_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} C_1=30 \\ C_2=-2 \end{array}$$

Por tanto: $\boxed{\mathbf{x(t) = 30 \cos 5t - 2sen\ 5t}}$ **donde: t en sg. y x(t) en cm.**

4.2 MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

Supóngase ahora que el sistema esta en un medio resistente, o que existe una fuerza de amortiguación que actúa sobre la masa. Supóngase también que la fuerza de amortiguación es proporcional a la magnitud de la velocidad de la masa, aunque de sentido opuesto, es decir: $-r\dfrac{dx}{dt}$ $(r > 0)$ siendo ***r*** ***la constante de amortiguación o de resistencia del medio*** (cuando la velocidad es pequeña). Por ultimo se supone que no existen fuerzas externas ***(movimiento libre).***

Por la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento será :

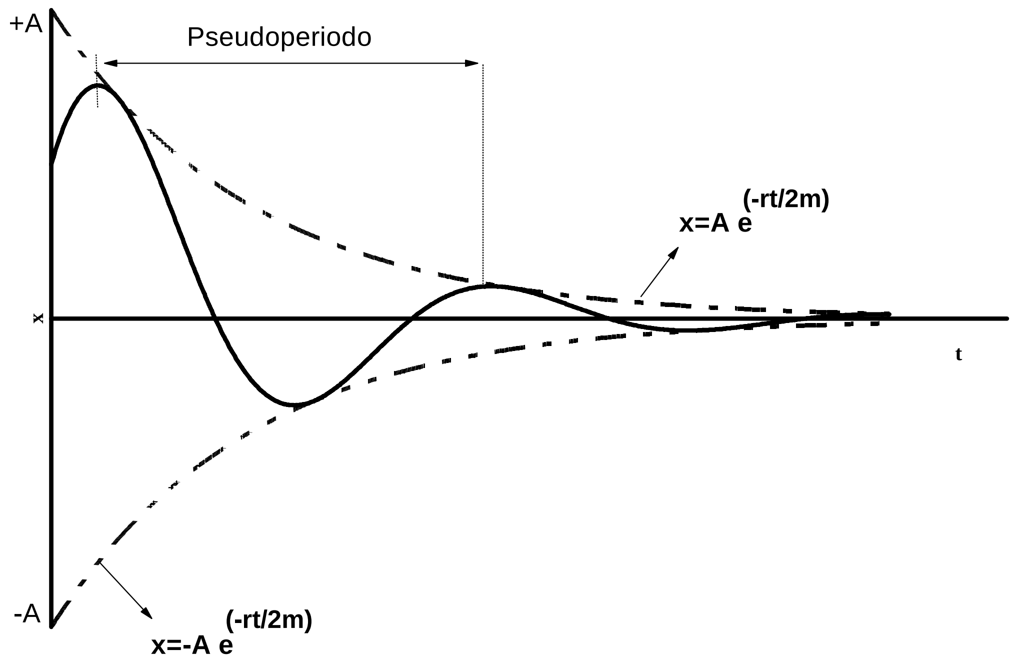
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad m,r,k \geq 0\,.} \quad (7)$$

Ecuación característica : $m\, s^2 + r\, s + k = 0$. Raíces : $s=-\dfrac{r}{2m}\pm\dfrac{1}{2m}\sqrt{r^2-4km}$.

1) Caso primero : $r^2 < 4km$ Movimiento oscilatorio o subamortiguado.

Dos raíces complejas conjugadas de la ecuación característica.

$$s=-\frac{r}{2m}\pm i\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}=-\frac{r}{2m}\pm \omega i \quad \text{con} \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}$$



Solución general : $x(t) = A\,e^{\frac{-r}{2m}t}\,(C_1 \cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t)$

o como ya se ha visto : $\boxed{x(t) = A\,e^{\frac{-r}{2m}t}\,\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}$ *(8)*

El factor exponencial suele llamarse ***factor de amortiguamiento***, o ***amplitud variable*** con el tiempo. Dicho factor tiende a cero cuando $t \to \infty$. El factor sen ($\omega t+\varphi$) produce la oscilación periódica. En total, se trata de un movimiento oscilatorio donde las oscilaciones son cada vez menores. Véase gráfica.

El ***pseudoperiodo***, o intervalo de tiempo entre dos máximos consecutivos es $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y la ***pseudofrecuencia*** $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

Al aumentar la amortiguación o resistencia, disminuye ω, luego aumenta el pseudoperiodo y disminuye la pseudofrecuencia.

2) Caso segundo : $r^2 = 4km$. **Movimiento críticamente amortiguado**

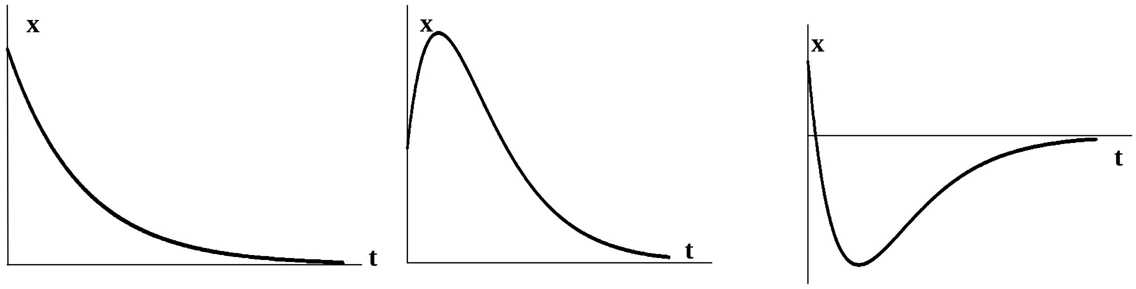
La ecuación característica tiene solo una raíz real doble: $s = -\frac{r}{2m}$

La solución general es: $\boxed{x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t}\,(C_1 + C_2\,t)}$

Es $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. ***No hay oscilación***

El movimiento se dice críticamente amortiguado, por que si disminuyese r, se presenta ya la oscilación.

La representación del movimiento es una de las tres figuras siguientes, dependiendo de las condiciones iniciales.



3) Caso tercero: $r^2 > 4km$ Movimiento sobreamortiguado.

La ecuación característica tiene dos raíces reales distintas s_1 y s_2 (ambas negativas).

Solución general :

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}.}$$

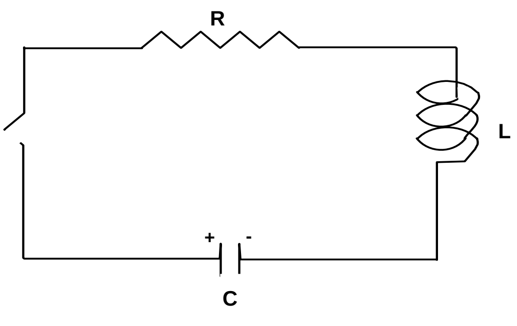
Como s_1 y s_2 son negativos, resulta : $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

El amortiguamiento es tan grande que no hay posibilidad de oscilaciones. La representación del movimiento tiene tres posibilidades , análogas a las del caso anterior.

5.APLICACIÓN A UN MODELO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

Se va a considerar un circuito ***RLC*** en serie, sin fuerza electromotriz (batería o generador), es decir un circuito como el mostrado en el esquema, con una resistencia ***R***, un inductor con inductancia (o autoinducción) ***L*** y un condensador de capacidad ***C.***

Supóngase que el condensador esta inicialmente cargado y en un momento dado se cierra el circuito. ¿Cómo se realiza la descarga del condensador?.
Se demuestra que la carga q(t) del condensador y la intensidad de corriente I(t) en el circuito, obedecen respectivamente a las ecuaciones diferenciales :



$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0} \qquad (9) \qquad\qquad \boxed{L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\, I=0} \qquad (10).$$

(En general se medirá la resistencia en ohmios(Ω), la inductancia en henrios (H), la capacidad en faradios (F), la carga en culombios y la intensidad en amperios.)

Estas ecuaciones son formalmente iguales a la (7) que describe el movimiento libre amortiguado, sin mas sustituir los parámetros m, r, k de (7) por L, R, 1/C respectivamente. Luego :

$$- Si \quad R^2 < \frac{4L}{C} \qquad la \quad descarga \quad es \quad oscilante \quad q(t)=Ae^{-\frac{R}{2L}t}\, sen(\omega t+\varphi)$$

$$con: \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

$$- Si \quad R^2 \geq \frac{4L}{C} \qquad la \quad descarga \quad no \quad es \quad oscilante.$$