EDO

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Primavera 2007
Universidad de Chile

Este curso esta basado del curso EDO de la Universidad de la Rioja (ver material docente) con algunas modificaciones y otras cosas (algunos dibujos en Matlab…)

Lunes 28.07.2003/Lunes 26.07.2004/Martes 24/07/2007

1 Introducción, definiciones y ejemplos de EDO

1.1 Introducción

En el cálculo diferencial, uno define una función y que depende de una variable x.
El valor de la función y en el punto x es $y(x)$.
Su derivada $\frac{dy}{dx}=y'$ es también una función.
Por ejemplo, si $y(x)=e^{-x^2}$ entonces $\frac{dy(x)}{dx}=y'(x)=-2xe^{-x^2}=-2xy(x)$.

El problema que vamos a ver aquí no es de calcular derivadas de funciones, sino de hallar una función y que satisfaga la ecuación:

$$y'(x)=-2xy(x)$$

que vamos a llamar ecuación diferencial. Hallar tal función es resolver una ecuación diferencial.

Desde ahora, vamos a considerar solamente una variable x, así que muchas veces vamos a omitir el (x) en las expresiones de y, así que vamos a simplificar las notaciones de la manera siguiente:

$$y'=-2xy$$

1.2 Definiciones

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una función y
y sus derivadas y', y'', … con su variable independiente x.

y se llama la variable **dependiente**, x la variable **independiente**.

Se dice que una **ecuación diferencial** es **ordinaria** cuando la función y depende de una sola variable independiente x. La notaremos **EDO**.

Si la función y depende de más de una variable independiente, se define las derivadas parciales respecto a estas variables y se habla de **ecuaciones en derivadas parciales**.
Aquí solamente vamos a estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.2.1 Ecuación diferencial ordinaria explícita

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **explícita** cuando su expresión es del tipo:

$$(1.2.1.1) \qquad y^{(n)} = f\left[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)\right]$$

f es una función $f : D \subset R^{n+1} \to R$ donde D es un subconjunto (generalmente abierto) de R^{n+1}. **x** es una **variable independiente** (por ejemplo podría ser el tiempo)
y es una función n veces continuamente derivable: es la **variable dependiente**, solución de la EDO (1.2.1.1).

Tenemos la notación: $$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = y^{(n)}(x) = y^{\overbrace{'\cdots'}^{n\ veces}}(x)$$

donde **n** es el **orden** de la derivada más alta que aparece en la ecuación y se llama el **orden de la ecuación diferencial**.

1.2.2 Ecuación diferencial ordinaria implícita

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **implícita** cuando su expresión es del tipo:

$$(1.2.2.1) \qquad F\left[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right] = 0$$

F es una función $F : I \subset R^{n+2} \to R$ donde I es un subconjunto (generalmente abierto) de R^{n+2}.

1.2.3 Ecuación diferencial ordinaria lineal

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **lineal** cuando su expresión es del tipo:

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = g(x)$$

1.2.4 Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es **lineal homogénea** cuando $g(x) = 0$
Cuando tenemos una ecuación lineal, se llama **ecuación lineal homogénea asociada** la ecuación inicial en la que se ha hecho $g(x) = 0$. Veremos después la utilidad de tal denominación.

1.2.5 Ecuación diferencial ordinaria exacta de primer orden

Una EDO **exacta** de primer orden es una EDO explícita de la forma:

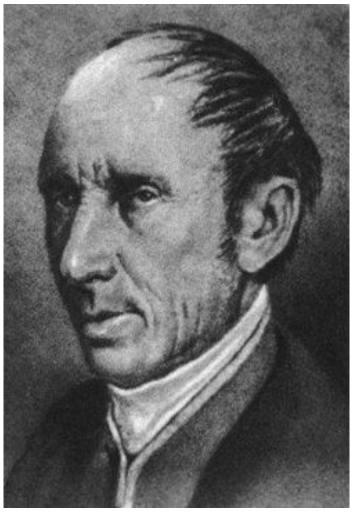
$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

o sea:

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

que cumple $\boxed{P_y = Q_x}$ con $\begin{cases} P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ Q_x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$.

1.2.6 Problema de Cauchy o de valores iniciales



Augustin Louis Cauchy (París 21 de agosto 1789-23 de mayo 1857) matemático francés.

Cauchy fue pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática

En 1814 el publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedará eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangente

Para resolver una EDO, hay que seguir dos etapas. Una primera etapa para encontrar una **solución general**, y una segunda etapa para encontrar una **solución particular**. Esta segunda etapa sirve para determinar la(s) constante(s) de integración que aparece(n) en el proceso de la primera etapa. Una solución particular puede corresponder a una condición inicial.

El **problema de Cauchy** consiste en encontrar una **solución completa** a una ecuación diferencial ordinaria (o sea una solución general más una solución particular).

1.3 Ejemplos

1.3.1 Desintegración de elementos radioactivos

Notemos N(t) el número de elementos radioactivos al instante t. Estos elementos se van a desintegrar con el tiempo. Suponemos que la variación de este número por unidad de tiempo decrece de manera proporcional al número N presente (no se sabe, pero es la manera más simple y natural de describir tal fenómeno).

$$dN(t) = -\lambda\, N(t)\, dt$$

que vamos a escribir de manera más simple:

$$(1.3.1.1) \qquad dN = -\lambda\, N\, dt \qquad \text{con } \lambda > 0$$

Miércoles 25/07/2007

Ponemos un menos para decir que el número disminuye con el tiempo (decrecimiento).

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$$

Vamos a integrar: $\ln[N] = -\lambda\, t + Cste$

o sea: $N = e^{-\lambda t + Cste} = e^{Cste}\, e^{-\lambda t}$

Vamos a ver una manera de determinar la constante. Si conocemos el número inicial de elementos radioactivos, o sea si conocemos N al instante t = 0 y si lo denotamos N_0, vamos a tener:

$$N(t=0) = N_0 = e^{Cste}\, e^{-\lambda 0} = e^{Cste}$$

Entonces tenemos: $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$

Se llama **semi vida** T el tiempo requerido para reducir la población inicial de protones a la mitad, o sea para t = T, tenemos N (t = T) = N_0 / 2.

Entonces: $\frac{N_0}{2} = N_0\, e^{-\lambda T}$ o sea $T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

Otra manera de notar (1.3.1.1) es: $\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N$

o sea

$$\boxed{N' = -\lambda N} \quad \text{con } N' = \frac{dN}{dt}$$

Es una ecuación diferencial simple.

Vemos que en el proceso de resolución de la EDO, es necesario determinar una constante. Esta se puede conocer con **condiciones iniciales**. Pero en realidad, se podría de la misma manera determinar la constante con otras condiciones (no necesariamente iniciales).

Ejercicio: determinar en el ejemplo precedente el valor de la constante para un valor N de N_1 para el tiempo $t = 1/\lambda$. ¿Cual es la relación entre N_0 y N_1?

Respuesta:

$N(t = 1/\lambda) = N_1 = e^{Cste} e^{-\lambda/\lambda}$. Entonces: $N(t) = e N_1 e^{-\lambda t}$ y $N_1 = \frac{N_0}{e}$

Es un ejemplo donde se determina la constante con una condición que es diferente de una condición inicial.

1.3.2 Circuito eléctrico

Capacitor (Condensador) C: $U_C = q$

Resistor (Resistencia) R: $U_R = R\,i = -R\frac{dq}{dt}$

Tenemos un circuito en serie de un resistor R, de un capacitor C. Suponemos que el capacitor se descarga en la resistencia. Tenemos $R\frac{dq}{dt} + q = 0$, o sea

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R} q = 0$$

que es similar a la ecuación previa. Tenemos : $q(t) = q_0 e^{-\frac{1}{R}t}$

Miércoles 28.07.2004

1.3.3 Mecánica

Resorte k: $\vec{F} = -k\vec{x}$ (es como el capacitor)

Si se aplica una fuerza F que se pone a un resorte de rigidez k, la variación de longitud del resorte respecto a la posición de equilibrio debido a esa fuerza será denotada x, entonces: $\vec{F} = -k\vec{x}$

Amortiguamiento: $\vec{F} = -\lambda \vec{\dot{x}}$ (como el resistor)

Un amortiguamiento (damping en ingles) típico λ opone una resistencia proporcional a la velocidad relativa:

$$\vec{F} = -\lambda \,\vec{\dot{x}}$$

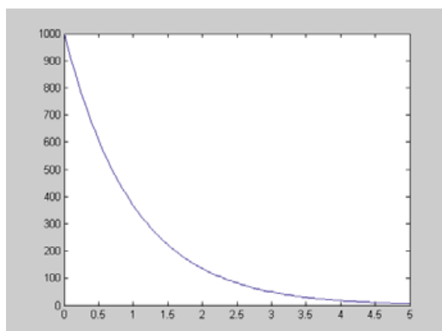
Al equilibrio: $\lambda \dfrac{dx}{dt} + k\,x = 0$. La solución es: $x\left(t\right) = x_0\, e^{-\frac{k}{\lambda}t}$

Resumen: una ecuación con una derivada de orden 1 es muchas veces relacionada con la noción de atenuación (resistor en electricidad, amortiguamiento en mecánica) es decir responsable de un régimen transitorio. Veremos que una derivada de orden 2 será relacionada con la noción de oscilación (la self o inductor L en electricidad, la masa en mecánica) correspondiendo a un régimen permanente.

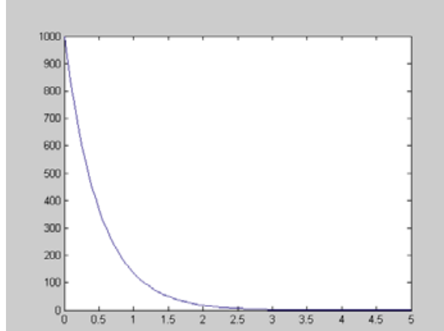
Electricidad	**Mecánica**
L (inductor)	M (masa)
R (resistor)	λ (amortiguador)
C (capacitor)	k (resorte)

Dibujo en matlab:

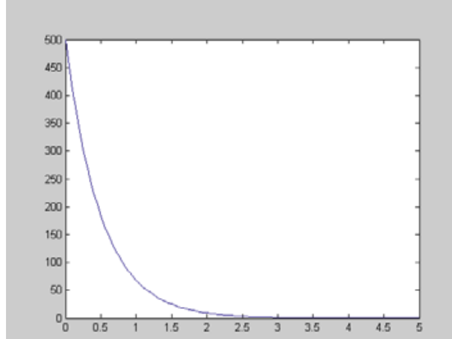
```
t = 0 : 0.05 : 5 ;
n0 = 1000 ;
lambda = 1 ;
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;
```




```
t = 0 : 0.05 : 5 ;
n0 = 1000 ;
lambda = 2 ;
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;
```

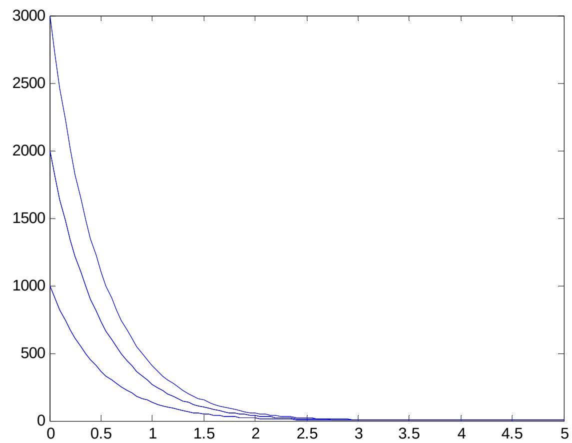



```
t = 0 : 0.05 : 5 ;
n0 = 500 ;
lambda = 2 ;
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;
```



Vamos ahora dibujar en un mismo gráfico varias soluciones para diferentes condiciones iniciales:

```
%    Ejemplo de solucion de la ecuación: n = n0 * exp (-lambda * t )
%    para diferentes soluciones iciciales: vamos a tomar por ejemplo:
%    n0=1000
%    n0=2000
%    n0=3000

t = 0 : 0.05 : 5 ;  %Definimos el vector tiempo
lambda = 2 ;

n0 = 1000 ; % Primera condicion inicial
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;

hold on;  %Para dibujar varios graficos en la misma figura
n0 = 2000 ; % Segunda condicion inicial
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;

hold on;  %Para dibujar varios graficos en la misma figura
n0 = 3000 ; % Tercera condicion inicial
n = n0 * exp (-lambda * t ) ;
plot ( t , n ) ;
```



Viernes 30.07.2004

2 EDO explícitas de orden 1 : $y' = f(x, y)$

2.1 Definición y propiedades

Una **EDO de primer orden** corresponde a n = 1. Se puede escribir de dos maneras diferentes (**explícita o implícita**):

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x, y) \\ F(x, y, y') = 0 \end{cases}} \qquad (2.1.1)$$

En una primera etapa, vamos a ver las ecuaciones explícitas de primer orden : $y' = f(x, y)$.

Encontrar una solución de una EDO de primer orden, es encontrar una función y(x) que verifica una de las dos fórmulas (2.1.1). En realidad, no se sabe resolver todas las ecuaciones diferenciales. Solamente se sabe hacerlo para algunas de ciertos tipos que vamos a ver ahora.

Vamos a ver diferentes casos particulares.

2.2 EDO explícita de la forma: $y' = f(x)$

$y' = f(x)$ es la ecuación diferencial la más sencilla que puede pensarse.

La solución general de tal EDO de primer orden es:

$$\boxed{y(x) = \int f(x)\,dx + Cste}$$

Una solución particular puede determinarse fijando una solución. Por ejemplo digamos que para $x = x_0$, la función y toma el valor : $\boxed{y(x_0) = y_0}$. En este caso vamos a tener:

$$\boxed{y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0}$$

2.3 EDO explícita de orden 1 de variables separadas : $Q(y)\,y' = -P(x)$

Son ecuaciones exactas donde $P(x, y)$ depende solamente de x, que notaremos $P(x)$ y donde $Q(x, y)$ depende solamente de y, que notaremos $Q(y)$ así que son del tipo:

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

o sea:

$$Q(y)\,y' = -P(x)$$

Vamos a ver que estas ecuaciones son muy sencillas de resolver, así que para resolver una EDO, intentaremos, siempre que se pueda, de llegar a una **<u>ecuación de variables separadas</u>**.

Se pueden resolver simplemente integrando:

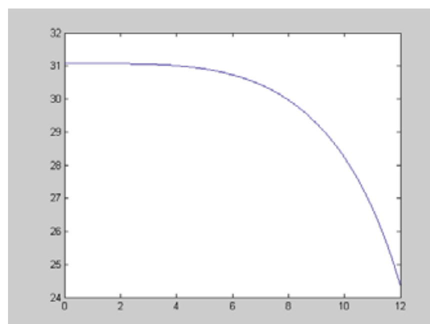
$$\boxed{\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = Cste}$$

<u>Ejemplo</u>: Resolver $y' = -\dfrac{x^3}{y^2}$

Podemos expresar esta EDO de la manera: x^3 dx + y^2 dy = 0

Solución general: integrando, tenemos directamente: $\boxed{\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,y^3 = \text{Cste}}$

Vamos a tomar una constante Cste de tal manera que nos quedamos con números reales:




```
x = 0 : 0.01 : 10 ;
C = 10000 ;
d = 1/3 ;
y =  ( 3 * (C -1/4 * x .^4) ) .^ d ;
plot ( x, y) ;
```

2.4 EDO reducibles a ecuaciones de variables separadas

<u>Caso 1</u>: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \boxed{f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0}$

Si se divide por $f_2(x)\,g_1(y)$, se obtiene:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

que se puede resolver como el caso precedente:

$$\boxed{\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = Cste}$$

siempre que exista una primitiva de $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ y de $\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}$.

Miércoles 30.07.2003

Ejemplo 1: Resolver $y' = -\dfrac{y}{1+x^2}$

Podemos expresar esta EDO de la manera: $(1 + x^2)\,dy + y\,dx = 0$

Solución general: se divide por y $(1 + x^2)$ y así: $\dfrac{1}{1+x^2}\,dx + \dfrac{1}{y}\,dy = 0$

Se integra: $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{y}\,dy = Cste$$

$$arctg(x) + \ln y = Cste$$

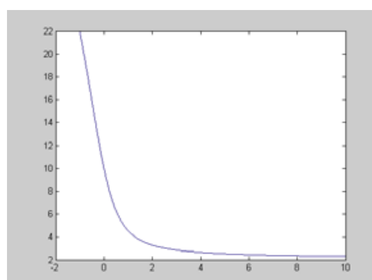
Notemos la Cste como un ln de otra cste: $Cste = \ln C$

$$\ln y - \ln C = -\,arctg(x)$$

$$\ln\left(\frac{y}{C}\right) = -\,arctg(x)$$

$$\boxed{y = C\,e^{-\,arctg(x)}}$$

```
x = -1 : 0.01 : 10 ;
C = 10 ;
y =  C * exp ( -atan (x) ) ;
plot ( x , y ) ;
```



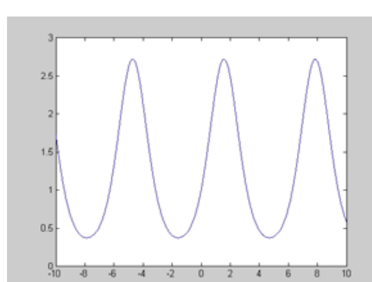
Ejemplo 2: Resolver $y' = y\cos(x)$

Se puede escribir de la forma: $\dfrac{1}{y}\,dy = \cos(x)\,dx$, integrando tenemos:

$\ln(y) = sen(x) + Cste$ o sea $y = e^{sen(x)+Cste}$. Si notamos $K = e^{Cste}$, entonces tenemos

$$\boxed{y = K\,e^{sen(x)}}$$

```
x = -10 : 0.01 : 10 ;
C = 1 ;
y =  C * exp ( sin (x) ) ;
plot ( x , y ) ;
```



Jueves 26/07/2007

2.5 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(ax + by\right)$

Si a = 0 : $y' = f\left(by\right)$. Es una EDO de variables separables. Sabemos resolver.

Si b = 0 : $y' = f\left(ax\right)$. Es una EDO de variables separables. Sabemos resolver.

Si $ab \neq 0$. Hacemos el cambio de variable: $\boxed{z = ax + by}$.

Entonces tenemos: $$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + by'$$

o sea: $$y' = \frac{\frac{dz}{dx} - a}{b} = f\left(z\right) \text{ y } \frac{dz}{dx} = a + bf\left(z\right)$$

$$dx = \frac{dz}{a + bf\left(z\right)}$$

$$x = \int \frac{dz}{a + bf\left(z\right)} = \Phi\left(z\right) = \Phi\left(ax + by\right)$$

Así tenemos una función y solución de la EDO en función de x.

Ejemplo : Resolver $y' = e^x e^y - 1$

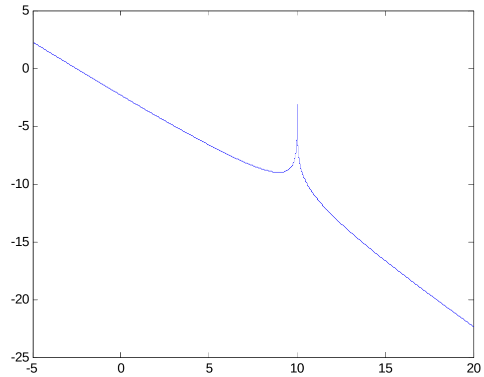
Tenemos: $y' = e^{x+y} - 1$. Hacemos el cambio de variable: z = x + y .

Así $\frac{dz}{dx} = 1 + y' = e^z$, o sea $e^{-z}\, dz = dx$. Integrando, tenemos $-\ e^{-z} = x + Cste$ o sea:

$$-\ e^{-x-y} = x + Cste$$
$$\ln\left(-x - Cste\right) = -x - y$$

es decir que la solución es : $$\boxed{y = -x - \ln\left(-x - Cste\right)}$$

```
clear all; close all;

x = -5 : 0.001 : 20 ;
C = - 10.0 ;
y =  -x -log (abs( ( - x - C))) ;
plot ( x , y ) ;
```



Lunes 02.08.2004

2.6 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, o homogénea

La ecuación de tipo $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se llama EDO **homogénea**.

Hagamos el cambio de variable : $\boxed{u = \frac{y}{x}}$.

Tenemos $y = xu$

y derivando respecto a x tenemos: $y' = u + x\frac{du}{dx}$.

Notemos $\quad f(u) = u + x\frac{du}{dx}$.

O sea $\quad u'x = f(u) - u$ que es de variables separadas.

- **Si** $f(u) \neq u$**:**

entonces $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$

Integrando tenemos: $\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln\left(\frac{x}{Cste}\right)$

o sea $x = Cste\, e^{\Phi(u)}$ con $\Phi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$

Entonces tenemos el sistema: $\boxed{\begin{cases} x = Cste\, e^{\Phi(u)} \\ y = Cste\; u\, e^{\Phi(u)} \end{cases}}$

Se puede dejar así o escribirse también de la forma: $\boxed{x = Cste\, e^{\Phi(y/x)}}$

De allí se puede encontrar una función H tal que: u = H (x , Cste) y así y = x H (x , Cste).

Miramos un caso particular: Si conocemos un u_0 que satisface f (u_0) = u_0. En este caso es fácil mostrar que y = u_0 x es solución de la ecuación inicial porque

$$y' = u_0 = f(u_0) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Esta solución no se obtiene con un método general pero las que salen así de manera particular se llama una **solución singular**.

- **Si** $f(u) = u$:

  entonces $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$

  que es una EDO de variables separables que ya se sabe resolver.

Ejemplo : Resolver $y' = \dfrac{2xy - y^2}{x^2}$

Hacemos el cambio de variable: $y = ux$.

Tenemos $y' = \dfrac{2y}{x} - \left[\dfrac{y}{x}\right]^2 = 2u - u^2$.

Como $y' = u'x + u$, sustituyendo tenemos $u'x + u = 2u - u^2$ o sea $u'x = u - u^2$.

- **Si** $u \neq u^2$: tenemos $\dfrac{du}{u - u^2} = \dfrac{dx}{x}$. Para integrar, descomponemos $\dfrac{1}{u - u^2} = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{1-u}$.

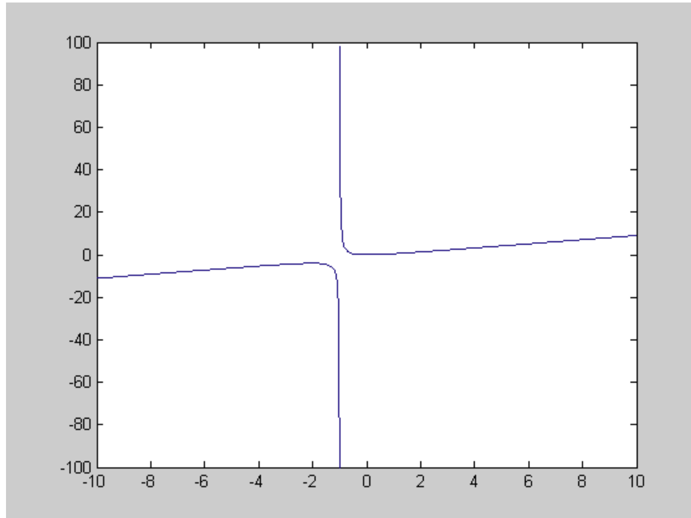
  Se encuentra: A = 1 y B = 1.

Integrando, tenemos: $\ln(u) - \ln(1-u) = \ln\left(\dfrac{x}{C}\right)$ o sea $\dfrac{u}{1-u} = \dfrac{x}{C}$ es decir: $\dfrac{y/x}{1-y/x} = \dfrac{x}{C}$. De eso: $Cy = x(x-y)$, sea $\boxed{y = \dfrac{x^2}{C+x}}$

- **Si** $u = u^2$:es decir si u = 0 o u = 1

  se tiene las soluciones singulares y = 0 y también y = x.

```
x = -10 : 0.01 : 10 ;
C = 1 ;
y =  x .^ 2  ./ ( C + x ) ;
plot ( x , y ) , axis ([-10  10 -100 100]) ;
```



Viernes 01.08.2003

2.7 EDO explícita de la forma : $y' = f\left(\dfrac{a_1\, x + b_1\, y + c_1}{a_2\, x + b_2\, y + c_2} \right)$

Vemos que este caso corresponde a una EDO reducible a una EDO de tipo : $y' = f\left(\dfrac{y}{x} \right)$.

En el plano (x , y), la ecuación $a_1\, x + b_1\, y + c_1 = 0$ es una recta 1.
De igual manera, la ecuación $a_2\, x + b_2\, y + c_2 = 0$ es una recta 2.
Vamos a distinguir dos casos:

Caso 1: **estas rectas se cortan en un punto** $\left(x_0 , y_0 \right)$.

Eso significa que el punto $\left(x_0 , y_0 \right)$ verifica las ecuaciones de la recta 1 o sea :

$$a_1\, x_0 + b_1\, y_0 + c_1 = 0$$

y de la recta 2 o sea:

$$a_2\, x_0 + b_2\, y_0 + c_2 = 0$$

y que se cortan en este punto o sea :

$$a_1\, x_0 + b_1\, y_0 + c_1 = a_2\, x_0 + b_2\, y_0 + c_2 \, .$$

Entonces la EDO se escribe:

$$y' = f\left(\frac{a_1\,x+b_1\,y+c_1}{a_2\,x+b_2\,y+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\,x+b_1\,y-a_1\,x_0-b_1\,y_0}{a_2\,x+b_2\,y-a_2\,x_0-b_2\,y_0}\right).$$

$$y' = f\left(\frac{a_1\left(x-x_0\right)+b_1\left(y-y_0\right)}{a_2\left(x-x_0\right)+b_2\left(y-y_0\right)}\right)$$

Vamos a hacer los 2 cambios de variable : $\boxed{\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}}$

Así tenemos: $Y' = f\left(\dfrac{a_1\,X+b_1\,Y}{a_2\,X+b_2\,Y}\right) = f\left(\dfrac{a_1+b_1\,Y/X}{a_2+b_2\,Y/X}\right) = g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$ que ya sabemos resolver.

<u>Caso 2</u>: **<u>estas rectas son paralelas</u>**.

Eso significa que :

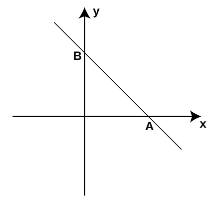
$$\boxed{a_2 = K\,a_1 \text{ y } b_2 = K\,b_1}.$$

Entonces tenemos: $y' = f\left(\dfrac{a_1\,x+b_1\,y+c_1}{K\,a_1\,x+K\,b_1\,y+c_2}\right) = f\left(\dfrac{a_1\,x+b_1\,y+c_1}{K\left(a_1\,x+b_1\,y\right)+c_2}\right)$.

Hagamos el cambio de variable: $\boxed{z = a_1\,x+b_1\,y}$.

Entonces: $z' = \dfrac{d\,z}{d\,x} = f\left(\dfrac{z+c_1}{K\,z+c_2}\right)$ que es una EDO de variables separadas que ya sabemos resolver.

Ojo. Una manera rápida de ver si dos rectas son paralelas es decir que sus vectores direccionales son paralelos. Si tenemos la ecuación $a_1\, x_0 + b_1\, y_0 + c_1 = 0$, los puntos A y B definen un vector en la dirección de la recta 1. $A_1 \left| \begin{array}{c} -\dfrac{c_1}{a_1} \\ 0 \end{array} \right.$ y $B_1 \left| \begin{array}{c} 0 \\ -\dfrac{c_1}{b_1} \end{array} \right.$. Entonces



$\overrightarrow{A_1 B_1} \left| \begin{array}{c} \dfrac{c_1}{a_1} \\ -\dfrac{c_1}{b_1} \end{array} \right.$ o sea un vector paralelo $\overrightarrow{A_1 B_1} \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{a_1} \\ -\dfrac{1}{b_1} \end{array} \right.$.

De igual manera, un vector de la recta 2 será: $\overrightarrow{A_2 B_2} \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{a_2} \\ -\dfrac{1}{b_2} \end{array} \right.$. Las dos rectas son paralelas si sus vectores direccionales son paralelos o sea: $\begin{cases} \dfrac{1}{a_1} = K\, \dfrac{1}{a_2} \\ \dfrac{1}{b_1} = K\, \dfrac{1}{b_2} \end{cases}$ o sea $\begin{cases} a_2 = K\, a_1 \\ b_2 = K\, b_1 \end{cases}$

Miércoles 04.08.2004 / Martes 31.07.2007

Ejemplo 1 : Resolver $y' = \dfrac{-2x + 4\,y - 6}{x + y - 3}$

Esta relación no esta satisfecha aquí, entonces las dos rectas se cortan en el punto que satisface:

$$\begin{cases} -2\,x_0 + 4\,y_0 - 6 = x_0 + y_0 - 3 \\ -2\,x_0 + 4\,y_0 - 6 = 0 \\ x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{cases}.$$

Se puede mostrar fácilmente que $\left(x_0 , y_0 \right) = \left(1 , 2 \right)$.

Entonces tenemos: $y' = \dfrac{-2x + 4\,y + 2x_0 - 4\,y_0}{x + y - x_0 - y_0} = \dfrac{-2\left(x - x_0 \right) + 4\left(y - y_0 \right)}{\left(x - x_0 \right) + \left(y - y_0 \right)}$.

Hacemos el cambio de variables: $\boxed{u = x - x_0}$ y $\boxed{v = y - y_0}$.

Así : $v' = \dfrac{-2u+4v}{u+v} = \dfrac{-2+4v/u}{1+v/u}$

Hacemos otro cambio de variable: $\boxed{z = v/u}$.

Entonces : $v = z\,u$ de allí : $v' = z'\,u + z$ porque $\dfrac{du}{dx} = u' = 1$.

Entonces $v' = z'\,u + z = \dfrac{-2+4z}{1+z}$ que se puede escribir: $-\dfrac{dz}{du}\,u = \dfrac{z^2-3z+2}{z+1}$.

Tenemos que analizar dos casos:

<u>Caso 1</u>: $z^2 - 3z + 2 \neq 0$.

Tenemos : $-\dfrac{(z+1)\,dz}{z^2-3z+2} = \dfrac{du}{u}$

$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$ entonces: $-\dfrac{(z+1)}{z^2-3z+2} = \dfrac{A}{(z-1)} + \dfrac{B}{(z-2)}$.

Podemos mostrar fácilmente que A = 2 y B = - 3.

Integrando, tenemos : $2\ln(z-1) - 3\ln(z-2) = \ln\left(\dfrac{u}{C}\right)$ o sea $u = C\,\dfrac{(z-1)^2}{(z-2)^3}$.

Como $z = v/u$ tenemos: $C\,(v-u)^2 = (v-2u)^3$ o sea: $\boxed{C\,(y-x-1)^2 = (y-2x)^3}$

<u>Caso 2</u>: $z^2 - 3z + 2 = 0$

Tenemos 2 casos:

$z_0 = 1$ o sea $v = u$ o sea $\boxed{y = x+1}$

$z_0 = 2$ o sea $v = 2u$ o sea $\boxed{y = 2x}$

Lunes 04.08.2003

<u>Ejemplo 2</u> : Resolver $y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-2}$

Hacemos el cambio de variable: $\boxed{z = x - y}$.

Tenemos $z' = 1 - y'$

así: $1 - z' = \frac{z-1}{z-2}$

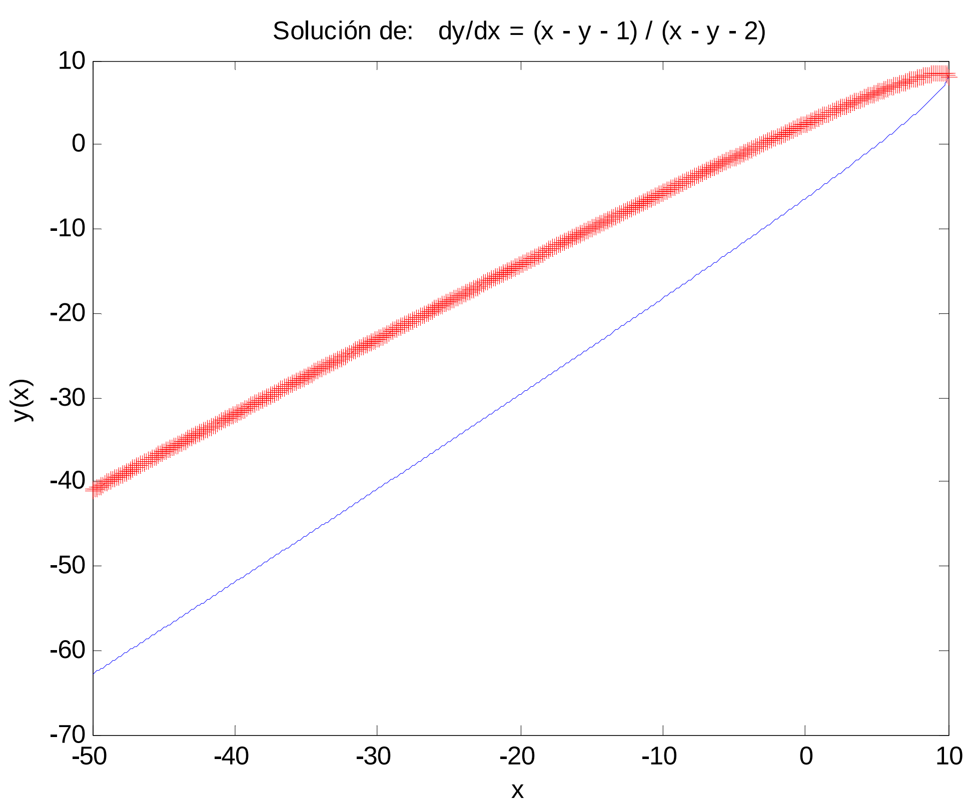
o sea: $(z-2)\,dz = -dx$.

Integrando: $\frac{1}{2}z^2 - 2z = -x + C$ o $\frac{1}{2}(z-2)^2 = -x + K$.

Como $z = x - y$ tenemos como solución las soluciones de : $(x-y-2)^2 + 2x = 2K$ o sea:

$$\boxed{y = x - 2 \pm \sqrt{2K - 2x}}$$

```
clear all; close all;

x = -50 : 0.01 : 10 ;
C = 10 ;
y =  x - 2  - sqrt( abs( 2 * C - 2 * x ) );
plot ( x , y,'-b' ),xlabel('x')  ; %dibujar en 'blue' fino
hold on;
y =  x - 2  + sqrt( abs( 2 * C - 2 * x ) );
plot(x,y,'-+r'),ylabel('y(x)'),title('Solución de: dy/dx=(x-y-1)/(x-y-2)');
%dibujar en 'red' grueso (porque cruzes cercanas)
```



2.8 EDO de la forma : $y' = f(x,y)$ con f tal que $f(\lambda x, \lambda^{\alpha} y) = \lambda^{\alpha-1} f(x,y)$

- **Si** $\underline{\alpha = 0}$, tenemos $y' = f(x,y) = \lambda f(\lambda x, y)$. Tomando $\lambda = 1/x$ tenemos $y' = 1/x \, f(1,y)$ que es una ecuación en variable separadas.

- **Si** $\underline{\alpha = 1}$, tenemos $y' = f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ que ya vimos

- **En los otros casos**, hacemos $\boxed{y = z^{\alpha}}$.

  Derivando, $y' = \alpha z^{\alpha-1} z' = f(x, z^{\alpha})$

  o sea: $z' = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha-1} f(x, z^{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{z} x, \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} z^{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x}{z}, 1\right)$

  que es una EDO homogénea.

2.9 EDO homogénea de grado k

Es una EDO de la forma $y' = f(x,y)$ con f tal que:

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{k} f(x,y)}.$$

Se dice que f es **homogénea de grado k**.

El caso particular k=1, $y' = f(x,y)$ es homogénea si se puede escribir de la forma:

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Se resuelven con el cambio de variable: $\boxed{z = \frac{y}{x}}$.

Viernes 06.08.2004

Ejemplo: resolver: $y' = \frac{y}{2x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2}$

Vamos a notar $f(x,y) = \frac{y}{2x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2}$.

Calculamos $f\left(\lambda x, \lambda^{\alpha} y\right) = \frac{\lambda^{\alpha} y}{2 \lambda x} - 3 \frac{\sqrt{\lambda x}}{\left(\lambda^{\alpha} y\right)^{2}} = \lambda^{\alpha - 1}\left(\frac{y}{2x} - 3 \frac{\lambda^{3/2 - 3\alpha} \sqrt{x}}{y^{2}}\right)$.

Esta expresión vale $f\left(x, y\right) = \frac{y}{2x} - 3 \frac{\sqrt{x}}{y^{2}}$ para $3/2 - 3\alpha = 0$ o sea $\alpha = 1/2$.

Hagamos el cambio de variable : $y = z^{1/2}$.

Entonces $y' = \frac{1}{2} z^{-1/2} z' = \frac{z^{1/2}}{2x} - 3 \frac{\sqrt{x}}{z}$

o sea : $z' = \frac{z}{x} - 6 \left(\frac{z}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

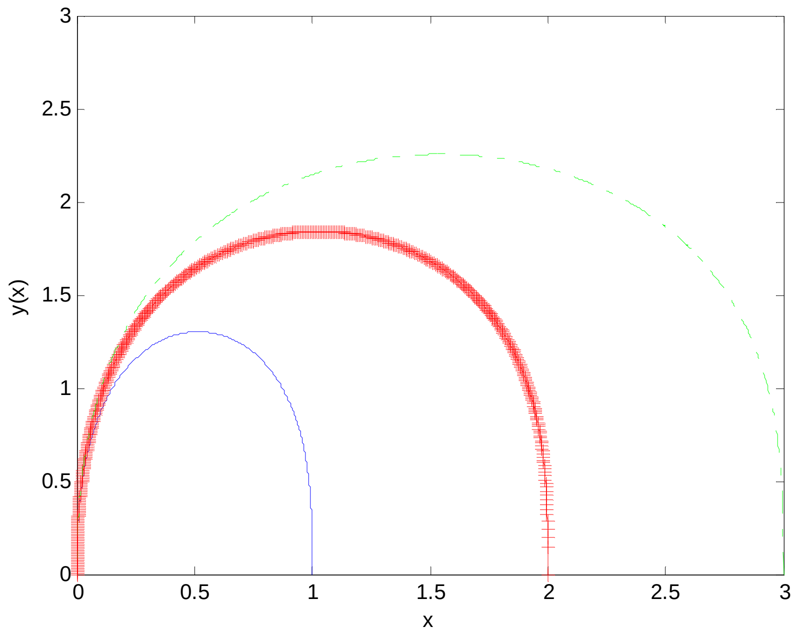
Hacemos otro cambio de variable: $u = \frac{z}{x}$.

De allí, $z' = u + x u' = u - 6 u^{-1/2}$.

Es una EDO a variables separadas, así que tenemos: $\boxed{\begin{cases} x = C e^{-\frac{1}{9} u^{3/2}} \\ y = (Cu)^{1/2} e^{-\frac{1}{18} u^{3/2}} \end{cases}}$

```
clear all; close all;

figure(1)
u = 0 : 0.01 : 100 ;
C = 1 ;
x = C * exp ( -1/9 * u .^1.5  ) ;
y =  sqrt (x .* u) ;
plot ( x , y,'-b' ),xlabel ('x'), ylabel('y(x)'), axis([0 3 0 3]);
hold on;
C = 2 ;
x = C * exp ( -1/9 * u .^1.5  ) ;
y =  sqrt (x .* u) ;
plot ( x , y,'-+r' )  ;
hold on;
C = 3 ;
x = C * exp ( -1/9 * u .^1.5  ) ;
y =  sqrt (x .* u) ;
plot ( x , y,'-.g' )  ;
```

Se genera una figura con 3 valores de la constante C:



Miércoles 01.08.2007

2.10 EDO de la forma : $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Se puede también escribir $y' = \dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ o sea

$$(2.10.1)\quad \boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

2.10.1 EDO exacta y función potencial

Se dice que esta EDO es **<u>exacta</u>** si cumple además $\boxed{P_y = Q_x}$ con $\boxed{\begin{cases} P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ Q_x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}}$

Para resolver tal ecuación (2.10.1), vamos primero comentar algunos puntos. Suponemos de antemano que P y Q son de clase C^1 (continuas con derivadas parciales continuas) en su dominio donde está definido (un abierto de R^2).

<u>Demostración</u>: Suponemos que podemos encontrar una función $F(x,y)$ en la que su diferencial sea :

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

entonces la ecuación diferencial tendrá como solución:

$$F(x,y) = C$$

donde C es una constante respecto a x y y.

Se necesita 2 cosas:

1. encontrar bajo que condiciones impuestas a P y Q tiene lugar una función F tal que su diferential total sea exactamente $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$
2. si dichas condiciones son satisfechas, determinar realmente la función F.

Por razones de cálculo, tenemos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$$

de modo que tenemos por inspecciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

Vamos ahora a derivar P respecto a y y Q respecto a x:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y)$$

Por cálculo, tenemos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y)$$

entonces tenemos:

$$(2) \qquad \boxed{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}$$

que es la condición que debe satisfacer la ecuación (1) para que sea exacta.

Al revés, ahora mostramos que si la condición anterior se satisface, la ecuación inicial es exacta. Sea $\varphi(x,y)$ una función para la cual:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

entonces $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

Como (2) es satisfecha, tenemos: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

Integramos respecto a x (mientras y se mantiene constante):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) + B(y)$$

donde B(y) es una constante respecto a x (pero que puede depender de y).

Ahora si tomamos como función F: $F(x,y) = \varphi(x,y) - \int B(y)\,dy$
entonces tenemos

$$dF = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - B(y)\, dy$$

$$dF = P\, dx + [Q + B(y)]\, dy - B(y)\, dy = P\, dx + Q\, dy$$

De aquí concluimos que la ecuación (1) es exacta, y terminamos una demostración enunciado.

Otra manera de ver: Una expresión diferencial $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ es una diferencial cerrada en una región R del plano xy si se verifica: $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ para todo (x, y). Se dice exacta si además existe una función $F(x, y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q$ para todo (x, y). Otra manera de decir es que el diferencial de F es : $dF = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$. F es única (salvo constantes) se llama **<u>función potencial</u>**. El teorema de Schwartz sobre igualdad de derivadas cruzadas nos asegura que cualquier diferencial exacta es cerrada.

Entonces, una ecuación diferencial exacta es una expresión igualada exactamente a cero. Si $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$, entonces existe una diferencial F que verifica $dF = 0$. Su solución es: $F(x, y) = C$, (con C una constante arbitraria respecto a x e y).

<u>El problema entonces es hallar F tal que</u> $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q$

o sea vamos a empezar a integrar respecto a x:

$$F(x, y) = \int P(x, y)\, dx \quad + \varphi(y)$$

donde $\varphi(y)$ es la constante de integración respecto a x (entonces puede depender de y).

Debemos verificar la segunda condición :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)\, dx \quad + \frac{d}{dy}\varphi(y)$$

Entonces $$\varphi'(y) = \frac{d}{dy}\varphi(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)\, dx.$$

Como es independiente de x, su derivada respecto a y debe ser cero.

Lo vamos a verificar :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right) = \frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)\,dx \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

porque $P_y = Q_x$.

Una vez que se conoce $\varphi'(y)$, integrando se deduce $\varphi(y)$, y sustituyendo su valor, llegamos a la **<u>función</u> <u>potencial</u>** $F(x,y)$. Así tenemos todas las soluciones $\boxed{F(x,y)=C}$

Miércoles 06.08.2003 / Lunes 09.08.2004

<u>Ejemplo</u>: Resolver : $3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0$

Vamos a poner la ecuación de la forma

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

con $\quad P(x,y) = 3y + e^x$

y $\quad Q(x,y) = 3x + \cos y$.

Verifiquemos si la EDO es exacta, es decir si la condición $P_y = Q_x$ es satisfecha.

Tenemos $P_y = 3 = Q_x$.

Entonces la ecuación diferencial es exacta.

Buscamos la función potencial F tal que:

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Como $\quad dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$

tenemos por inspección:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3y + e^x$$

Integrando respecto a x, tenemos

$$F(x,y) = 3yx + e^x + \varphi(y)$$

Derivando respecto a y, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q = 3x + \cos y$$

es decir $$\frac{d\varphi(y)}{dy} = \cos y$$

Integrando tenemos: $\varphi(y) = sen\, y + C$.

La solución es :

$$F(x,y) = 3\,y\,x + e^{x} + sen\, y + C = K$$

o sea simplemente

$$\boxed{3\,y\,x + e^{x} + sen\, y = C_1}$$ con C_1 una constante.

Jueves 02.08.2007

2.10.2 EDO no exacta y factores integrantes

Una EDO no exacta puede ser difícil de resolver. Una manera para intentar resolver tal EDO no exacta es transformarla en una EDO exacta, por ejemplo multiplicando la EDO inicial por un factor $\mu(x,y)$.

Es decir, si la ecuación:

(1) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ no es exacta,

una posibilidad para resolverla es ver si es posible encontrar una función $\mu(x,y)$ (no nula) tal que:

(2) $\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$ sea exacta.

Como las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes, sus soluciones serán las mismas. Si (2) es exacta, la podremos integrar gracias a la función $\mu(x,y)$, por eso esta función se llama un **<u>factor integrante</u>**.

La pregunta ahora es: ¿**Cómo encontrar tal factor integrante**? Lamentablemente, no hay un método general para encontrar factores integrantes. Se puede encontrar tal factor integrante fácilmente solamente para algunos casos que vamos a ver ahora. Pero hay que ver que no se trata encontrar todos los factores integrantes posibles. Basta encontrar uno que transforma la EDO inicial no exacta en una EDO exacta. Es por eso que siempre se va a **escoger un factor integrante EL MÁS SIMPLE POSIBLE**. Eso significa que cuando vamos a encontrar una constante de integración al integrar el factor integrante, vamos a escoger la constante la más simple posible (por ejemplo 0 o 1). Vamos a ver como encontrar factor integrantes simples.

Caso 1: $\mu(x,y)=\mu(x)$

Queremos que la ecuación:

$$\mu(x)P(x,y)\,dx+\mu(x)Q(x,y)\,dy=0 \text{ sea exacta}$$

o sea que verifique:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)Q(x,y)]$$

Derivando, tenemos:

$$\mu(x)P_y(x,y)=\mu'(x)Q(x,y)+\mu(x)Q_x(x,y)$$

o sea

$$\mu(x)[P_y(x,y)-Q_x(x,y)]=\mu'(x)Q(x,y)$$

o sea

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{P_y(x,y)-Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

Eso es posible si este coeficiente depende exclusivamente de x.

Notamos $h(x)=\dfrac{P_y(x,y)-Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$ a este coeficiente. Entonces:

$$\boxed{\mu(x)=e^{\int h(x)\,dx}}.$$

Caso 2: $\mu(x,y)=\mu(y)$

Es el caso simétrico del caso anterior.

Entonces tenemos: $\mu(y)=e^{\int g(y)\,dy}$ con $g(y)=\dfrac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{P(x,y)}$

Caso 3: Otros casos.

Aparte de los 2 casos anteriores, se puede intentar varios factores integrantes, imponiendo ciertas condiciones restrictivas, como por ejemplo: $\mu(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ con α y β constantes a determinar, o también $\mu(x+y)$ o $\mu(xy)$.

<u>En la práctica</u>, se puede empezar a buscar un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=\mu(x)$. Si no se puede, se puede intentar un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=\mu(y)$. Si no se puede, intentar alguno de la forma dado en el caso 3.

<u>Resumen</u>: Para resolver una EDO de la forma $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, se puede seguir los pasos siguientes:

1. ¿La EDO $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ es exacta?
   a. → SI: sabemos resolverla
   b. → NO: se busca un factor integrante de la forma: $\mu(x,y)=\mu(x)$
2. ¿La nueva EDO $\mu(x)P(x,y)dx+\mu(x)Q(x,y)dy=0$ es exacta?
   a. → SI: sabemos resolverla
   b. → NO: se busca un factor integrante de la forma: $\mu(x,y)=\mu(y)$
3. ¿La nueva EDO $\mu(y)P(x,y)dx+\mu(y)Q(x,y)dy=0$ es exacta?
   a. → SI: sabemos resolverla
   b. → NO: se busca un factor integrante de otra forma (en función de la EDO):
4. ¿La nueva EDO $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ es exacta?
   a. → SI: sabemos resolverla
   b. → NO: se podría pensar en otro tipo de método para resolver la EDO inicial
   c.

¡Ojo 1!
EN TEORIA, una vez que hemos encontrado un factor integrante $\mu(x,y)$, no es necesario verificar que la EDO $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ si es exacta, porque por construcción, si logramos encontrar un factor integrante es que la EDO $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ es exacta.
PERO EN LA PRACTICA es bueno de verificar que efectivamente la ecuación $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ es exacta, para asegurarse que no se ha hecho errores de cálculo sobre el factor integrante antes de seguir más adelante.

¡Ojo 2!
De igual manera cuando tenemos la solución de una EDO, es bueno verificar que la solución encontrada es solución de la EDO inicial. Acá, igual, en teoría debería ser así si no se ha hecho errores de cálculos, pero si la solución final no satisface la ecuación de inicio, es que hay un error en alguna parte. A veces es fácil encontrar este error, así que siempre es bueno verificarlo. Pierden poco tiempo haciéndolo, y pueden ganar mucho (por ejemplo corregir un simple error de signo…)

¡Ojo 3!
No es necesario aprender formulas de memoria (por ejemplo aprender de memoria la forma de un factor integrante) porque es muy fácil equivocarse (por ejemplo de signo). Es mucho mejor aprender las etapas y cada vez recalcular el factor integrante. Le va a costar mucho menos aprender métodos para encontrar una solución que aprender formulas y formulas de memoria que van a olvidar rápido saliendo de este curso.

¡Ojo 4!
En un examen, es bueno describir lo que están haciendo y las etapas que siguen (lo que permite a los profesores de darle un mínimo de punto mostrando que saben lo que están haciendo y adonde van).

Por ejemplo:

Vamos a verificar si la EDO $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ es exacta.

Para eso, escribimos la EDO de la forma $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ y como por definición: $dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$, por inspección tenemos: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q$.

La EDO será exacta si: $\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y)$ o sea: $\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}$

<u>Ejemplo</u>: Resolver : $(2x^2 + y)\,dx + (x^2 y - x)\,dy = 0$

En este caso, tenemos: $P(x,y) = 2x^2 + y$ y $Q(x,y) = x^2 y - x$.

Tenemos $P_y(x,y) = 1$ y $Q_x(x,y) = 2xy - 1$.

La EDO es exacta si la relación $P_y = Q_x$ es satisfecha.

Lo es si $xy = 1$.

Veamos si en este caso la EDO es satisfecha para $y = x^{-1}$
o sea si $(2x^2 + x^{-1})\,dx + (x^2 x^{-1} - x)\,dy = (2x^2 + x^{-1})\,dx = 0$

Entonces la ecuación no es exacta.

Vamos a intentar un factor integrante.

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{P_y(x,y)-Q_x(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x}=\frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)}=\frac{-2}{x}.$$

Esta expresión depende solamente de x, así que en principio es posible encontrar un factor integrante. $\mu(x)=x^{-2}$.

Entonces, multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(x)=x^{-2}$ se obtiene la ecuación exacta : $\left(2+yx^{-2}\right)dx+\left(y-x^{-1}\right)dy=0$.
Resolvemos esa ecuación exacta. Tenemos $P(x,y)=2+yx^{-2}$ y $Q(x,y)=y-x^{-1}$.

Verifiquemos que $P_y=Q_x$.

Tenemos $P_y=x^{-2}$ y $Q_x=x^{-2}$.

Ahora $F_x(x,y)=2+yx^{-2}$ o sea $F(x,y)=2x-yx^{-1}+\varphi(y)$, y derivando respecto a y: $F_y(x,y)=-x^{-1}+\varphi'(y)=y-x^{-1}$, o sea $\varphi'(y)=y$ o sea $\varphi(y)=\frac{1}{2}y^2+C$. Entonces tenemos $F(x,y)=2x-yx^{-1}+\frac{1}{2}y^2+C$. Entonces las soluciones de la ecuación inicial son las funciones y que verifican: $\boxed{2x-yx^{-1}+\frac{1}{2}y^2=K}$

Jueves 07.08.2003 / Miércoles 11.08.2004

2.11EDO lineales de primer orden: $y' + a(x)y = b(x)$

Vamos a resolver este tipo de ecuación con cuatro métodos diferentes.

2.11.1 Con un factor integrante

La EDO se escribe:

$$[a(x)y - b(x)]dx + dy = 0$$

es decir

$$P(x,y) = a(x)y - b(x) \quad \text{y} \quad Q(x,y) = 1$$

Buscamos un factor integrante de la forma: $\mu(x,y) = \mu(x)$, es decir buscamos $\mu(x)$ tal que $\mu(x)P(x,y)\,dx + \mu(x)Q(x,y)\,dy = 0$ sea exacta.

Martes 07.08.2007

o sea que verifique:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)Q(x,y)]$$

Derivando, tenemos:

$$\mu(x)P_y(x,y) = \mu'(x)Q(x,y) + \mu(x)Q_x(x,y)$$

o sea

$$\mu(x)[P_y(x,y) - Q_x(x,y)] = \mu'(x)Q(x,y)$$

o sea

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = a(x)$$

Entonces $$\mu(x) = e^{\int a(x)dx}.$$

Entonces:

$e^{\int a(x)dx}[a(x)y - b(x)]dx + e^{\int a(x)dx}dy = 0$ tiene que ser exacta.

Buscamos una función potencial F que es tal que: $dF = 0$ (la solución de la EDO será: $F(x,y) = C$).

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = F_x \, dx + F_y \, dy = 0$$

Por inspección, tenemos:

$$\begin{cases} (1) \quad F_x = e^{\int a(x)dx} [a(x)y - b(x)] \\ (2) \qquad\qquad F_y = e^{\int a(x)dx} \end{cases}$$

Vamos a resolver (2) que es más fácil:

$$F_y(x,y) = e^{\int a(x)dx}$$

o sea

$$F(x,y) = y\,e^{\int a(x)dx} + \varphi(x)$$

Ahora derivando F(x,y) respecto a x:

$$F_x(x,y) = y[a(x)]e^{\int a(x)dx} + \varphi'(x)$$

y por otra parte

$$F_x(x,y) = [a(x)y - b(x)]e^{\int a(x)dx}$$

Igualando las dos expresiones, tenemos:

$$b(x)e^{\int a(x)dx} = \varphi'(x)$$

así que

$$\varphi(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx$$

Entonces: $F(x,y) = y\,e^{\int a(x)dx} - \int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx$.

Las soluciones de la EDO son: $y\,e^{\int a(x)dx} - \int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx = C$, o sea:

$$\boxed{y = \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + C\right]e^{\int -a(x)dx}}$$

2.11.2 Método de '*variación de la constante*'

- <u>Resolver primero la ecuación homogénea asociada</u> $y' + a(x)y = 0$. Esta ecuación es de variable separada: $\frac{dy}{y} = -a(x)dx$. Su solución es $y(x) = C\,e^{\int -a(x)dx}$.

- El método de <u>variación de la constante</u> consiste a considera la constante C como una función de x, o sea $C = C(x)$, es decir que tenemos: $y(x) = C(x)e^{\int -a(x)dx}$. Vamos a buscar $C(x)$ que verifique a ecuación que queremos resolver, o sea: $y' + a(x)y = 0$. Derivando y, tenemos: $y'(x) = C'(x)e^{\int -a(x)dx} - C(x)a(x)e^{\int -a(x)dx}$, poniendo en la ecuación inicial tenemos:
  $C'(x)e^{\int -a(x)dx} - C(x)a(x)e^{\int -a(x)dx} + a(x)C(x)e^{\int -a(x)dx} = b(x)$

o sea: $C'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$, integrando tenemos: $C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} + K$.

Con eso, tenemos la expresión final:

$$y(x) = \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} + K\right]e^{\int -a(x)dx}$$

que es igual como a la del método anterior.

Miércoles 8.08.2007

2.11.3 Resolviendo con la suma de la solución de la ecuación homogénea asociada más una solución particular

Suponemos que por un método cualquiera hemos encontrado una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación. Entonces la solución general será la suma de esta solución particular $y_p(x)$ más la solución de la ecuación homogénea asociada, o sea:

$$y(x) = y_p(x) + C\,e^{\int -a(x)dx}$$

La justificación es simple:

$y_p(x)$ es solución de la EDO significa que : $y_p' + a(x)y_p = b(x)$
$y_0(x)$ es solución de la EDO homogénea asociada es decir: $y_0' + a(x)y_0 = 0$

Vamos a verificar entonces que $y_p(x) + y_0(x)$ es solución de la ecuación inicial, o sea:

$$\left[y_p(x) + y_0(x)\right]' + a(x)\left[y_p(x) + y_0(x)\right] = b(x).$$

Tenemos :

$$\left[y_p(x) + y_0(x)\right]' + a(x)\left[y_p(x) + y_0(x)\right] = \left[y_p(x)\right]' + a(x)\left[y_p(x)\right]$$
$$+\left[y_0(x)\right]' + a(x)\left[y_0(x)\right] = b(x) + 0$$

lo que teníamos que mostrar.

2.11.4 Resolviendo una descomposición $y(x)=u(x).v(x)$

Resolviendo con una descomposición $y(x)=u(x).v(x)$

Entonces tenemos: $y' = u'.v + u.v'$.

La EDO inicial es: $u'.v + u.v' + a(x)u\,v = b(x)$

o sea : $u'.v + u.\left[v' + a(x)v\right] = b(x)$.

Lo que buscamos, son dos funciones u y v de tal manera que sus producto u.v satisface la ecuación. Vamos a intentar unas fáciles.

Si intentamos v tal que $v' + a(x)v = 0$

entonces u deberá satisfacer: $u'.v = b(x)$.

Ya sabemos resolver la EDO $v' + a(x)v = 0$.

Su solución es : $v(x) = e^{-\int a(x)dx}$.

Nos queda a encontrar u que verifique: $u'.v = b(x)$ o sea $u' = b(x)e^{\int a(x)dx}$.

Integrando, tenemos para u:

$$u = \int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + C.$$

La solución final es:

$$\boxed{y(x) = \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}\,dx + C\right]e^{-\int a(x)dx}}$$

Lunes 11.08.2003

<u>Ejemplo</u>: $2\,x\,y' - 3\,y = 4\,x^2$

<u>Método 1</u>:

La EDO se escribe : $y' - \frac{3\,y}{2\,x} = 2\,x$

es decir $$d\,y = \left[\frac{3\,y}{2\,x} + 2\,x\right] d\,x$$

es decir $P\,d\,x + Q\,d\,y = 0$ con $P(x, y) = \frac{3\,y}{2\,x} + 2\,x$ y $Q(x, y) = -1$.

Como $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-3}{2\,x}$, existe un factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{-3}{2\,x} d\,x} = e^{-\frac{3}{2}\ln(x)} = x^{-3/2}$. Entonces la ecuación $x^{-3/2}\left[\frac{3\,y}{2\,x} + 2\,x\right] d\,x - x^{-3/2}\,d\,y = 0$ es exacta.

Vamos a buscar una función potencial F tal que $d\,F = 0$, o sea $F(x, y) = Cste$.

Tenemos $d\,F = \frac{\partial F}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial F}{\partial y}\,d\,y$, o sea $\frac{\partial F}{\partial y} = -\,x^{-3/2}$

es decir $F(x, y) = -\,x^{-3/2}\,y + \varphi(x)$

y debe verificar: $\frac{\partial F}{\partial x} = x^{-3/2}\left[\frac{3\,y}{2\,x} + 2\,x\right] = \frac{3}{2}\,y\,x^{-5/2} + 2\,x^{-1/2} = \frac{3}{2}\,y\,x^{-5/2} + \varphi'(x)$.

De allí deducimos $\varphi(x) = 4\,x^{1/2}$. Así $F(x, y) = -\,x^{-3/2}\,y + 4\,x^{1/2}$.

La solución de la EDO es : $-\,x^{-3/2}\,y + 4\,x^{1/2} = C$ es decir $\boxed{y = 4\,x^2 - C\,x^{3/2}}$

Viernes 13.08.2004

<u>Método 2</u>: Empezamos por resolver la ecuación homogénea asociada : $2\,x\,y' - 3\,y = 0$.

Se puede también escribir : $\frac{d\,y}{y} = \frac{3\,d\,x}{2\,x}$ que es de variables separadas, así que tenemos:

$\log y = \frac{3}{2}\log x + K$, o sea : $y = C\,x^{3/2}$.

Aplicamos ahora el método de variación de la constante, es decir $C = C(x)$ así conociendo C tendremos la solución: $y = C(x)\,x^{3/2}$.

Derivando, tenemos: $y' = C'(x)\,x^{3/2} + \frac{3}{2}C(x)\,x^{1/2}$,

sustituyendo en la EDO inicial: $2\,x\,y' - 3\,y = 4\,x^2$ tenemos:

$2\,x\left[C'(x)\,x^{3/2} + \frac{3}{2}C(x)\,x^{1/2}\right] - 3\,C(x)\,x^{3/2} = 4\,x^2$ o sea: $C'(x) = 2\,x^{-1/2}$.

Integrando tenemos: $C(x) = 4\,x^{1/2} + K$.

Así tenemos: $\boxed{y = \left(4\,x^{1/2} + K\right)x^{3/2} = K\,x^{3/2} + 4\,x^2}$

<u>Método 3</u>: En este método, debemos encontrar una solución particular. No hay método general para hallar tal solución. Mirando la ecuación que debemos resolver, podemos sospechar que tal vez una solución de tipo polinómica podría ser una solución particular.

Intentamos entonces de encontrar una solución particular del tipo: $y = a\,x^2 + b\,x + c$.

Derivando, $y' = 2\,a\,x + b$.

Sustituyendo en la EDO inicial: $2\,x\,y' - 3\,y = 4\,x^2$ tenemos:

$$2\,x\left(2\,a\,x + b\right) - 3\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 4\,x^2 .$$

Tenemos: $2\,x\left(2\,a\,x + b\right) - 3\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 4\,x^2$

o sea: $a\,x^2 - b\,x - 3\,c = 4\,x^2$

Igualando los términos de mismo grado tenemos: $a = 4 \quad y \quad b = c = 0$.

Así una solución particular es: $y_p = 4\,x^2$.

La solución de la ecuación homogénea asociada es (ya lo hemos hecho): $y_0 = C\,x^{3/2}$.

La solución general es la solución particular más la solución de la ecuación homogénea asociada o sea:

$$\boxed{y = C\,x^{3/2} + 4\,x^2}$$

Método 4: El ultimo método consiste a escribir y de la forma de un producto de dos funciones dependiendo de x:

$$y = u(x)v(x).$$

Derivando: $$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Sustituyendo en: $2xy' - 3y = 4x^2$ tenemos:

$$2x\left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right] - 3u(x)v(x) = 4x^2$$

o sea: $$2xu'v + \left[2xv' - 3v\right]u = 4x^2.$$

El propósito es de encontrar dos funciones u y v tal que el producto satisface la EDO inicial, y no de encontrar todas la funciones u y v que satisfacen tal condición.

Vemos que si el termino factor de u es 0, será más fácil resolver la ecuación.

Entonces vamos a buscar v tal que: $$2xv' - 3v = 0$$

o sea: $$\frac{v'}{v} = \frac{3}{2x}.$$

Integrando tenemos: $\log v = \frac{3}{2}\log x + K$

o sea: $v = C x^{3/2}$.

Como buscamos u y v tal que y = u v, podemos tomar la constante C = 1, porque no buscamos todas las funciones u y v sino una función v y una vez fijada una función u que dependerá de como hemos encontrado la función v, de tal manera que y = u v. Pero para mostrar eso, guardamos la constante C y vemos que va a pasar con ella. Ahora la ecuación con esta condición queda: $2xu'v = 4x^2$

es decir $u' = \frac{2x}{v} = \frac{2x^{-1/2}}{C}$. Integrando: $u = \frac{4x^{1/2}}{C} + K$.

Como teníamos $y = u(x)v(x)$, tenemos: $\boxed{y = \left[\frac{4x^{1/2}}{C} + K\right]C x^{3/2} = 4x^2 + D x^{3/2}}$

2.12 Ecuación de Bernoulli: $y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0$

Formulada por Jakob Bernoulli y resuelta por su hermano Johann

Miembro de la familia Bernoulli. **Jakob** I (1654-1705) abandonó los estudios de teología para dedicarse a la matemáticas y a la astronomía. A partir de los planteamientos de Leibniz desarrolló problemas de cálculo infinitesimal. Fundó en Basilea un colegio experimental. En su obra principal y póstuma *Ars Conjectandi* (1713) aparecen por primera vez los números de Bernoulli y un teorema relativo a los conceptos de certeza, probabilidad, posibilidad, etc. Formuló la ecuación diferencial de Bernoulli. **Johann Bernoulli** (27 de julio 1667 - 11 de enero 1748) fue un matemático, médico y filólogo suizo. Discípulo de su hermano Jakob, tras haber ejercido como profesor de matemáticas en Groninga (1695-1705) le sustituyó como catedrático de matemáticas en Basilea durante 42 años, donde tuvo como discípulo a Leonhard Euler. Se centró en el cálculo infinitesimal y resolvió la ecuación diferencial de Bernoulli, propuesta por su hermano.

Caso 1: Si $\alpha = 0$, la EDO es lineal. Ya sabemos resolver.

Caso 2: Si $\alpha = 1$, la EDO es de variables separadas. Ya sabemos resolver.

Caso 3: En otros casos, vamos a ver como resolverla.

Vemos que lo que nos molesta es el último término y^{α}.

Si no estuviese, casi tendríamos una EDO lineal.

Dividimos entonces por y^{α}.

Así tenemos: $\frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)y^{1-\alpha} + b(x) = 0$.

Vamos entonces a efectuar el cambio de variable: $\boxed{y^{1-\alpha} = z}$.

Derivando: $(1-\alpha)\, y^{-\alpha}\, y' = z'$ es decir: $\dfrac{y'}{y^{\alpha}} = \dfrac{z'}{1-\alpha}$.

Así tenemos: $\dfrac{z'}{1-\alpha} + a(x)\, z + b(x) = 0$

o sea: $z' + (1-\alpha)\, a(x)\, z = (\alpha - 1)\, b(x)$

que es una ecuación lineal que sabemos resolver.

Otra manera de resolver, es descomponer $y = u(x)\, v(x)$.

Derivando, $y' = u' . v + u . v'$

Sustituyendo en la EDO tenemos: $y' = u' . v + u . v'$

$$u' . v + u . v' + a(x)\, u\, v + b(x)\, u^{\alpha}\, v^{\alpha} = 0$$

o sea $$u' . v + u \left[v' + a(x)\, v \right] + b(x)\, u^{\alpha}\, v^{\alpha} = 0 .$$

Vamos a buscar un v tal que $$\left[v' + a(x)\, v \right] = 0 \ .$$

De eso, encontramos la función v(x), y queda:

$$u' . v + b(x)\, u^{\alpha}\, v^{\alpha} = 0$$

que es una ecuación de variables separables. Resolviéndola, tenemos u(x), y así y.

Ejemplo: $x\, y' + 2\, y + x^5\, y^3\, e^x = 0$

Dividiendo por x, tenemos: $y' + 2\,\dfrac{y}{x} + x^4\, y^3\, e^x = 0$.

Es una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 3$.

Dividiendo por y^3 tenemos

$$\frac{y'}{y^3} + 2\,\frac{1}{x\, y^2} + x^4\, e^x = 0$$

Hacemos el cambio de variable: $\dfrac{1}{y^2} = z$

así $\quad z' = -2\, y^{-3}\, y' \quad$ o sea $\quad \dfrac{y'}{y^3} = -\dfrac{z'}{2}$.

En la EDO, da: $\quad -\dfrac{z'}{2} + 2\dfrac{z}{x} + x^4 e^x = 0$

sea $\quad z' - 4\dfrac{z}{x} = 2\, x^4 e^x$

que es una ecuación lineal. La solución es:

$$z = \left[\int 2\, x^4 e^x e^{\int -\frac{4}{x} d\,x} d\,x + C \right] e^{\int \frac{4}{x} d\,x} = x^4 \left(2\, e^x + C \right) \text{ o sea } y = x^{-2} \left(2\, e^x + C \right)^{-1/2}$$

Podemos también resolver tal ecuación haciendo el cambio $y = u(x)\, v(x)$

2.13 Ecuación de Riccati: $y' + a(x)\, y + b(x)\, y^2 = c(x)$

La **ecuación de Riccatí** es una ecuación diferencial desarrollada en el siglo XVIII por el matemático italiano Jacopo Francesco Riccati, con el fin de analizar la hidrodinámica. El conde **Jacopo Francesco Riccati** (Venecia, 28 de mayo de 1676 – 15 de abril de 1754) fue un matemático veneciano, que estudió detalladamente la hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana, a cuya introducción en Italia colaboró. En su momento se le ofreció la presidencia de la Academia de Ciencias de San Petersburgo pero rechazó el honor en favor de su retirada y aristocrática vida.

Se le recuerda por el estudio de ecuaciones que llevan su nombre, un tipo de ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = q_0(x) + q_1(x)\, y + q_2(x)\, y^2$$

extensiones de la ecuación diferencial de primer orden, que se resiste a la mayoría de las técnicas elementales de solución.

Aunque ello es un accidente histórico, pues su trabajo se limitó al análisis de casos particulares de la ecuación. Siendo esta planteada y analizada en la forma que conocemos por la familia Bernoulli.

En las investigaciones de esa familia de ecuaciones planteó la *ecuación especial de Riccati*, que sí posee solución en términos finitos para un número limitado de casos.

Para resolverla, tenemos que seguir 2 pasos:

Paso 1: Encontrar una solución particular $y_p(x)$. Esa solución verifica:

$y_p' + a(x)y_p + b(x)y_p^2 = c(x)$

Paso 2: Hacer el cambio $y = y_p + z$ y así llegar a una ecuación de Bernoulli.

Así tenemos derivando: $y' = y_p' + z'$.

Sustituyendo, $y_p' + z' + a(x)[y_p + z] + b(x)[y_p + z]^2 = c(x)$.

Como $y_p' + a(x)y_p + b(x)y_p^2 = c(x)$ queda:

$z' + a(x)[z] + b(x)[z]^2 + 2b(x)z\,y_p = 0$

es decir: $z' + \left[a(x) + 2b(x)y_p(x)\right]z + b(x)[z]^2 = 0$

que es una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 2$.

Así se hace un cambio $u = z^{-1}$ que se reducirá a una ecuación lineal.

Ejemplo: $y' + y^2 = x^2 - 2x$

Paso 1: Encontrar una solución particular $y_p(x)$.

Vamos a intentar un polinomio de primer orden: $y_p(x) = ax + b$

Vamos a ver si es posible encontrar (a,b) que satisface la EDO: $a + (ax + b)^2 = x^2 - 2x$. Se encuentra (a , b) = (- 1 , 1).

o sea: $y_p(x) = -x + 1$

<u>Paso 2</u>: Se hace el cambio $y = y_p + z$.

Así tenemos derivando: $y' = y_p' + z'$.

Sustituyendo, tenemos: $y_p' + z' + \left(y_p + z \right)^2 = x^2 - 2x$.

Queda: $z' + 2\left(-x + 1 \right) z + z^2 = 0$ que es una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 2$.

Así se hace un cambio $z = u^{-1}$ que se reducirá a una ecuación lineal

$$u' + 2\left(x - 1 \right) u = 1.$$

La solución es: $u = \left[\int e^{x^2 - 2x} \, dx + C \right] e^{2x - x^2} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{y + x - 1}$

Así: $$\boxed{\frac{1}{y + x - 1} = \left[\int e^{x^2 - 2x} \, dx + C \right] e^{2x - x^2}}$$

Lunes 16.08.2004

2.14 Ecuación de la forma: $y' = f\left(x, y \right)$

Para resolverla, si no es de ningún tipo que ya vimos, se puede intentar un cambio de variable astuto. Todo el problema es encontrarlo.

2.15 Teorema de existencia y unicidad de soluciones:

Jueves 09.08.2007

Se trata de determinar las condiciones suficientes para asegurar la existencia de una solución que tenga ciertas propiedades.

2.15.1 Ecuación de orden 1:

Sea la ecuación de orden 1: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

y T la región rectangular, de centro (x_0, y_0) definida por: $|x - x_0| \le a$ y $|y - y_0| \le b$

Supongamos que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas de x y y en cada punto de T. Entonces, existe un intervalo alrededor de x_0, $|x - x_0| \le h$ y una función $\varphi(x)$ que tiene las propiedades siguientes:

a) $y = \varphi(x)$ es una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ en el intervalo $|x - x_0| \le h$

b) En el intervalo $|x - x_0| \le h$, $\varphi(x)$ satisface la desigualdad

$$|\varphi(x) - y_0| \le b$$

c) En x = x_0, tenemos: $\varphi(x_0) = y_0$

d) $\varphi(x)$ es única en el intervalo $|x - x_0| \le h$ en el sentido de que es la única función que tiene todas las propiedades enunciadas en a), b) y c).

El intervalo $|x - x_0| \le h$ puede o no ser más pequeño que el intervalo $|x - x_0| \le a$ en el cual se impusieron las condiciones sobre f(x,y) y $\frac{\partial f}{\partial y}$

El teorema establece que si f(x,y) 'se comporta bien' cerca del punto (x_0,y_0), entonces la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tiene una solución que pasa por el punto (x_0,y_0) y esa solución es única cerca de (x_0,y_0).
Para mostrar eso, vamos a ver 3 pasos importantes:

A. Condición de Lipschitz
B. Demostración del teorema de existencia
C. Demostración del teorema de unicidad

e implica la prueba de que cierta sucesión de funciones tiene un límite y que la función límite es la solución deseada. La sucesión considerada será definida como sigue (iteraciones de **Piccard**):

$$y_0(x) = y_0$$
$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right)dt$$
$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1(t)\right)dt$$
$$\vdots$$
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt$$

Antes de empezar la demostración, vamos a dar algunos ejemplos para ilustrar el problema.

Ejemplo 1: Demuestre que la sucesión de funciones definidas en las ecuaciones previas converge en una solución para el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = y; \qquad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

Tenemos:

$$y_0(x) = 1$$
$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$
$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

Con base en el patrón que se desarrolla, es fácil conjeturar que:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

y se lo puede mostrar por inducción.

El límite de esta sucesión existe para todo número real x, ya que no es más que el desarrollo en serie de Maclaurin para e^x, que converge para toda x. Esto es:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Pueden verificar que e^x es efectivamente una solución al problema de valor inicial dado.

Nota: El desarrollo de **MacLaurin** (matemático escocés) es una serie de Taylor acerca de 0:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

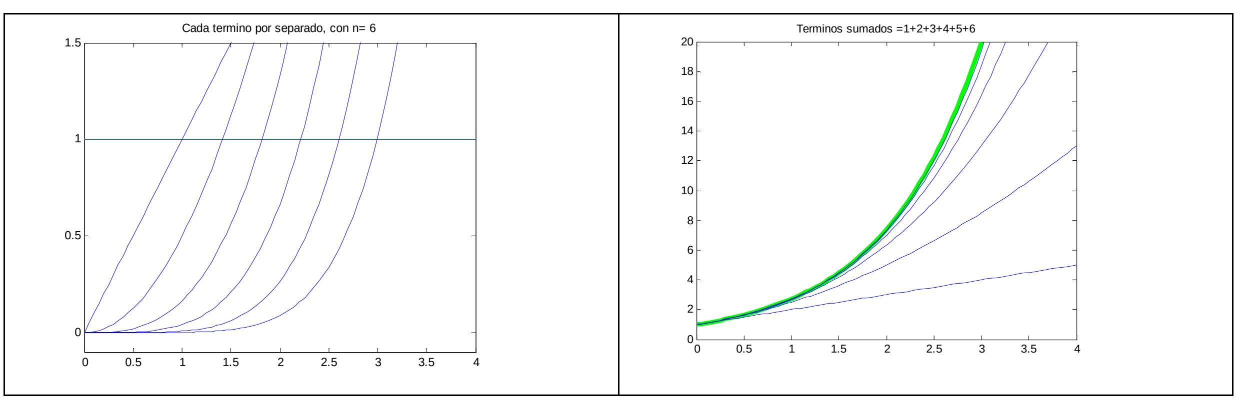
Matemático escocés (Febrero de 1698 en Kilmodan - 4 de junio de 1746 en Edimburgo).

Hijo de un ministro de parroquia, quedó huérfano de padre a los seis meses y héerfano de madre a los nueve años de edad. A los once años ingresó en la universidad de Glasgow y se graduó a los catorce. En 1725 Newton recomendó a Maclaurin para un puesto en la Universidad de Edimburgo, donde pasó el resto de su vida, ocho años después se casó con Ana Stewart con quien tuvo siete hijos. En 1742 publicó *Treatise of fluxions*, donde utiliza el *Teorema de MacLaurin*, que permite evaluar funciones.

Ver en anexo 1 algunos desarrollos para algunas funciones.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Series de Piccard
%  Primavera 2007. MA26  U. de Chile
%  de dy / dt = y con x0=0 y con y0=1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

echo off; clear all; close all; clc

% Taza de muestreo (paso) y duracion de la funcion:
paso=0.05;  duracion=4;

%Numero de terminos sumados:
Nf=6;

%Tiempo
t0 = [0 : paso : duracion] ;
% Función que queremos modelar y'=y o sea y(t)=exp(t)
ft=exp(t0);
```

```
%Calculo de cada termino de la approximacion de f(t)
figure(1)
% Termino y0=1
unos=ones(length(t0));
titulo=['Cada termino por separado, con n= ' num2str(1)]
plot(t0,unos); axis([0 duracion -1.5 1.5]), title(titulo);

for n=1:1:Nf
    termino(n,:) = t0 .^ n / factorial(n);
    titulo=['Cada termino por separado, con n= ' num2str(n)];
    hold on
    plot(t0,termino(n,:)); axis([0 duracion -0.1 1.5]), title(titulo);
    pause (0.5)
end
print -dpsc exp1.ps

%Sumatoria de los terminos:
[a,b]=size(t0);
yn=zeros(Nf,b);
suma='1';

figure (2)
%plot(t0,ft,'g-'); axis([0 pi 0 1.5]);%con zoom
plot(t0,ft,'g-','LineWidth',4); axis([0 duracion 0 20]);%sin zoom

for n=1:1:Nf
    figure(2)
    yn(1,:) = yn(1,:) + termino(n,:);
    if (n==1) yn(1,:)=1+yn(1,:); end
    if(n ~= 1)
        suma=[suma,'+',num2str(n)];
    end
    %suma='100';
    titulo=['Terminos sumados =' suma ];
    hold on
    %plot(t0,ytotal(1,:)); axis([0 pi 0 1.5]), title(titulo); %con zoom
    plot(t0,yn(1,:)); axis([0 duracion 0 20]), title(titulo); %sin zoom

    pause(0.5)
end
print -dpsc exp2.ps
```



Ejemplo 2: Demuestre que la sucesión de funciones definidas en las ecuaciones previas converge en una solución para el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = x^2; \qquad x_0 = 2, \quad y_0 = 1$$

Tenemos:

$$y_0(x) = 1$$
$$y_1(x) = 1 + \int_2^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$
$$y_2(x) = 1 + \int_2^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$
$$y_n(x) = 1 + \int_2^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

Queda claro que el límite de esta sucesión es $\frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$ y esta función es solución del problema de valor inicial (se puede verificar facilmente).

Ahora vamos a mostrar las tres etapas del teorema.

A. Condición de Lipschitz

Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (14 de mayo, 1832 - 7 de octubre, 1903) fue un matemático alemán, profesor en la universidad de Bonn desde 1864. Supervisó el trabajo inicial de Felix Klein. Lipschitz dio su nombre a la condición de continuidad de Lipschitz, y trabajó en una amplia gama de áreas. Éstas incluyen teoría de números, álgebras con involución, análisis matemático, geometría diferencial y mecánica clásica.

En las hipótesis del teorema de existencia anterior hemos supuesto que la función f y su derivada $\partial f / \partial y$ son continuas en el rectángulo T. Así, cuando (x,y_1) y (x,y_2) son puntos en T, se puede aplicar el teorema del valor medio a f como una función de y. De aquí que exista un número y* entre y_1 y y_2 tal que:

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y^*\right)\left(y_1-y_2\right)$$

La suposición de que $\partial f / \partial y$ sea continua en T nos permite asegurar que $\partial f / \partial y$ es acotada en T. Esto es, existe un número K>0 tal que:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$$

para todo punto en T. Como $\left(x,y^*\right)$ está en T, resulta que:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y^*\right)\right| . \left|y_1-y_2\right|$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le K . \left|y_1-y_2\right| \quad (1)$$

para toda pareja de puntos (x,y_1) y (x,y_2) en T.

La desigualdad (1) es llamada **condición de Lipschitz** para la función f. Hemos demostrado que bajo las hipótesis de nuestro teorema de existencia, la condición de Lipschitz (1) se cumple para cada par de puntos (x,y_1) y (x,y_2) en T.

B. Demostración del teorema de existencia

Vamos a usar la condición de Lipschitz en lugar de la hipótesis de continuidad de $\partial f / \partial y$. Por lo tanto, podríamos reformular el teorema de existencia en términos de la condición (1) en vez de suponer $\partial f / \partial y$ es continua en T.

Una hipótesis del teorema de existencia que acabamos de hacer es que f es continua en el rectángulo T. De ello resulta que f debe ser acotada en T. Supongamos que M>0 es un número tal que:

$$|f(x,y)| \leq M$$

para todo punto en T. Ahora tomamos h como el más pequeño de los dos números a y b/M, y definimos el rectángulo R como el conjunto de puntos (x,y) para el que:

$$|x - x_0| \leq h \quad \text{y} \quad |y - y_0| \leq b$$

Resulta evidente que R es un subconjunto de T.

Ahora, vamos a considerar la sucesión de funciones (iteraciones de **<u>Piccard</u>**):

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt$$

y vamos a demostrar el siguiente lema.

<u>Lema 1</u>: Si $|x - x_0| \leq h$, entonces: $|y_n(x) - y_0| \leq b$ para n=1,2,3,...

Lo vamos a demostrar por inducción.

Si $|x - x_0| \leq h$, tenemos: $|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0(t)\big)dt \right|$

$$\leq M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right|$$

$$\leq M\,|x - x_0| \leq Mh \leq b$$

Ahora, si $|x - x_0| \leq h$ y si $|y_n(x) - y_0| \leq b$, mostramos que $|y_{n+1}(x) - y_0| \leq b$

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt \right|$$

$$\leq M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right|$$

$$\leq M\,|x - x_0| \leq Mh \leq b$$

Entonces, el lema esta demostrado.

Podemos enunciar el lema 1 de una manera un poco diferente:
si $\left| x - x_0 \right| \le h$, entonces los puntos (x, y_n(x)) con n=0,1,2,... están en R. La condición de Lipschitz puede usarse ahora para deducir el lema siguiente.

Lema 2: Si $\left| x - x_0 \right| \le h$, entonces:

$$\left| f\left(x, y_n(x)\right) - f\left(x, y_{n-1}(x)\right) \right| \le K \ . \left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \text{para n=1,2,3,...}$$

Lema 3: Si $\left| x - x_0 \right| \le h$, entonces:

$$\left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \le \frac{M \ . K^{n-1} . \left| x - x_0 \right|^n}{n!} \le \frac{M \ . K^{n-1} . h^n}{n!} \text{ para n=1,2,3,...}$$

Lo vamos a demostrar por inducción.

Para n=1: Si $\left| x - x_0 \right| \le h$, tenemos: $\left| y_1(x) - y_0 \right| \le M \left| x - x_0 \right|$ eso usando el lema 1.

Ahora, suponemos que:

$$\left| y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x) \right| \le \frac{M \ . K^{n-2} . \left| x - x_0 \right|^{n-1}}{(n-1)!}$$

debemos mostrar que $\left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \le \dfrac{M \ . K^{n-1} . \left| x - x_0 \right|^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^{x} \left[f\left(t, y_{n-1}(t)\right) - f\left(t, y_{n-2}(t)\right) \right] dt \right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, y_{n-1}(t)\right) - f\left(t, y_{n-2}(t)\right) \right| dt \\ &\le K \int_{x_0}^{x} \left| y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) \right| dt \end{aligned}$$

$$\le K \int_{x_0}^{x} \frac{M \ . K^{n-2} . \left| t - x_0 \right|^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{M \ . K^{n-1}}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} \left| t - x_0 \right|^{n-1} dt \le \frac{M \ . K^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\left| x - x_0 \right|^n}{n}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Para el caso $x_0 - h \le x \le x_0$, el mismo tipo de argumento dará el mismo resultado. Así la demostración del lema 3 queda completa.

Vamos ahora utilizar los resultados del lema 3, comparando las dos series infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right] \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M\,.\,K^{n-1}\,h^n}{n!}$$

La segunda serie es una serie absolutamente convergente. Ademas, por el lema 3, la segunda serie domina la primera. De aquí que, por el criterio M de Weierstrass, la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right]$ converge absoluta y uniformemente en el intervalo $\left| x - x_0 \right| \le h$. Si consideramos la k-ésima suma parcial de esta serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right] = \left[y_1(x) - y_0(x) \right] + \left[y_2(x) - y_1(x) \right] + \cdots$$
$$+ \left[y_k(x) - y_{k-1}(x) \right]$$

vemos que: $\sum_{n=1}^{k}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right] = y_k(x) - y_0(k)$

El enunciado de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right]$ converge absoluta y uniformemente equivale al enunciado de que la sucesión yn(x) converge uniformemente en el intervalo: $\left| x - x_0 \right| \le h$

Vamos ahora definir :

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

y recordamos que, según la definición de la sucesión yn(x), cada yn(x) es continua en $\left| x - x_0 \right| \le h$, resulta que $\Phi(x)$ también es continua (ya que la convergencia es uniforme) y:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt$$

A causa de la continuidad de f y de la convergencia uniforme de la sucesión yn(x), podemos intercambiar el orden de los dos procesos de límite para demostrar que $\Phi(x)$ es una solución de la ecuación entegral:

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \Phi(t)\right)dt$$

Derivando, se deduce inmediato que $\Phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ en el intervalo } \left| x - x_0 \right| \le h$$

Además de $\Phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\Phi(t))\,dt$ queda claro que $\Phi(x_0)=y_0$

Por último, como mostramos en el lema 1 que $\left| y_n(x)-y_0 \right| \le b$ para cada n y para $\left| x-x_0 \right| \le h$, deducimos que la misma desigualdad se cumple para $\Phi(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Esto es, si $\left| x-x_0 \right| \le h$, entonces $\left| \Phi(x)-y_0 \right| \le b$

Así terminamos la demostración del teorema de existencia. Vamos ahora a ver la prueba de la unicidad.

Martes 14.08.2007

C. Demostración del teorema de unicidad

Para mostrar la unicidad de la solución $\Phi(x)$, vamos a suponer que existen 2 soluciones y que son las mismas. Vamos a llamar $\Lambda(x)$ una otra función solución, o sea que verifica:

$$\frac{d\Lambda}{dx}=f(x,\Lambda(x))=y_0$$
$$\left| \Lambda(x)-y_0 \right| \le b$$

para $\left| x-x_0 \right| \le h$

Entonces podemos escribir: $\Lambda(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\Lambda(t))\,dt$

Si comparamos $\Lambda(x)$ con la función de la sucesión $y_n(x)$ anterior, vemos que:

$$\left| \Lambda(x)-y_n(x) \right| \le \int_{x_0}^{x} \left| f(t,\Lambda(t))-f\left(t,y_{n-1}(t)\right) \right| dt$$

Ahora, demostraremos que cuando $n\to\infty$, la integral del lado derecho anterior se aproxima a cero para $\left| x-x_0 \right| \le h$. Entonces resulta que $\Lambda(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ de modo que, finalmente $\Lambda(x)=\Phi(x)$ en el intervalo $\left| x-x_0 \right| \le h$.

Para cualquier x dentro del intervalo $\left| x-x_0 \right| \le h$, ocurre que (x, $\Lambda(x)$) y (x, y_{n-1}(x)) están en el rectángulo R, de aquí que la condición de Lipschitz nos permita decir:

$$\left| \Lambda(x)-y_n(x) \right| \le K\int_{x_0}^{x} \left| \Lambda(t)-y_{n-1}(t) \right| dt$$

Ahora continuemos con una demostración inductiva y limitemos nuestra atención a los valores de x mayores que x_0 (un argumento análogo logra el mismo resultado para $x_0 - h \le x \le x_0$).

Para n=1, tenemos:

$$| \Lambda(x) - y_1(x) | \le K \int_{x_0}^{x} \left| \Lambda(t) - y_0(t) \right| dt \le K\, b \left| x - x_0 \right|$$

Queremos demostrar que si:

$$| \Lambda(x) - y_n(x) | \le \frac{b\,.\,K^n}{(n)!} \left| x - x_0 \right|^n$$

entonces tenemos:

$$| \Lambda(x) - y_{n+1}(x) | \le \frac{b\,.\,K^{n+1}}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}$$

Para $x_0 - \le x \le x_0$:

$$\begin{aligned} | \Lambda(x) - y_{n+1}(x) | &\le \int_{x_0}^{x} \left| f(t, \Lambda(t)) - f(t, y_n(t)) \right| dt \\ &\le K \int_{x_0}^{x} \left| \Lambda(t) - y_n(t) \right| dt \\ &\le \frac{b\,.\,K^{n+1}}{(n)!} \int_{x_0}^{x} \left| t - x_0 \right|^n dt \\ &\le \frac{b\,.\,K^{n+1}}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos mostrar.

Para $\left| x - x_0 \right| \le h$ tenemos de la desigualdad $| \Lambda(x) - y_n(x) | \le \frac{b\,.\,K^n}{(n)!} \left| x - x_0 \right|^n$ que

$$| \Lambda(x) - y_n(x) | \le \frac{b\,.\,K^n}{(n)!} h^n$$

Cuando $n \to \infty$, la expresión del lado derecho tiende a cero. De aquí resulta que para $\left| x - x_0 \right| \le h$, $y_n(x) \to \Lambda(x)$. Por lo tanto, $\Lambda(x)$ debe ser la misma función $\Phi(x)$ que obtuvimos antes. Esto es, la solución $\Phi(x)$ es única.

2.15.2 Ecuación lineal de orden 1:

Sea la ecuación lineal de orden 1:

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

Por el momento, supongamos que para $y' + a(x)\,y = b(x)$ existe un factor de integración positivo $\mu(x) > 0$ función solamente de x.

Entonces:

$$\mu(x)\left[\frac{dy}{dx} + a(x)\,y\right] = \mu(x)\,b(x)$$

es una ecuación exacta.

Se puede anotar esta ecuación:

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

con

$$P = \mu(x)\,a(x)\,y - \mu(x)\,b(x)$$

y

$$Q = \mu(x)$$

si la ecuación $\mu(x)\left[\frac{dy}{dx} + a(x)\,y\right] = \mu(x)\,b(x)$ es exacta, debe satisfacer:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

o sea:

$$\mu(x)\,a(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

es decir:

$$a(x)\,dx = \frac{d\mu}{\mu(x)}$$

o sea:

$$\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$$

Entonces mostramos que si la ecuación $y' + a(x)\,y = b(x)$ tiene un factor integrante independiente de y, entonces ese factor es de la forma: $\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$

Nos falta ahora mostrar que la función $\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$ es en realidad un factor de integración de la ecuación: $y' + a(x)\,y = b(x)$

Vamos a multiplicar la ecuación $y' + a(x)y = b(x)$ por $\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$.
Tenemos:

$$e^{\int a(x)dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a(x)\left(e^{\int a(x)dx}\right)y = b(x)e^{\int a(x)dx}$$

El término izquierdo de esa ecuación es la derivada del producto:

$$y\left(e^{\int a(x)dx}\right)$$

entonces:

$$\frac{d\left[y\left(e^{\int a(x)dx}\right)\right]}{dx} = F(x)$$

con $F(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$ que depende solamente de x.

Entonces $e^{\int a(x)dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a(x)\left(e^{\int a(x)dx}\right)y = b(x)e^{\int a(x)dx}$ es exacta.

3 EDO implícitas de orden 1 : $F\left(x, y, y'\right)=0$

3.1 EDO de la forma : $\left(y'\right)^n + a_1(x,y)\left(y'\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)\,y' + a_n(x,y) = 0$

Pesamos esta expresión como un polinomio en y' de grado n.

Resolverla, es obtener sus raíces $y' = f_i(x,y)$ con $i = 1, n$, sea:

$$\left[y' - f_1(x,y)\right]\left[y' - f_2(x,y)\right]\cdots\left[y' - f_n(x,y)\right]=0$$

Las soluciones de la EDO inicial son las de cada EDO $\boxed{y' - f_i(x,y) = 0}$ con $i = 1, n$.

Tenemos así n familias de curvas uniparamétricas.

Hemos pasado de un polinomio de grado n a n ecuaciones diferenciales de orden 1.

Ejemplo: $y^2\left[\left(y'\right)^2+1\right]=1$

Se escribe: $\left(y'\right)^2 = \dfrac{1-y^2}{y^2}$.

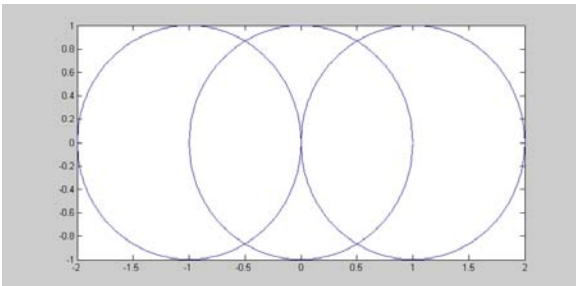
Así tenemos dos ecuaciones: $$d\,y = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,d\,x$$

sea: $$\frac{\pm\, y\,d\,y}{\sqrt{1-y^2}} = d\,x\,.$$

Integrando: $\pm\sqrt{1-y^2} = x + C$, sea: $\boxed{(x+C)^2 + y^2 = 1}$.

Son círculos de centro –C, de radio 1.

```
for i=1:3
C = 2-i;
x1=i-3;
x2=i-1;
x = x1 : 0.01 : x2 ;
xC = x + C ;
y1 = + sqrt( 1- (xC) .^2 ) ;
y2 = - sqrt( 1- (xC) .^2 ) ;
plot ( x , y1 )  ;
hold on
plot ( x , y2 )  ;
hold on
end
```



3.2 Envolvente

Si tenemos una familia uniparamétrica de curvas en el plano, la envolvente de la familia es una nueva curva tal que en cada punto de contacto de la envolvente con las curvas, la tangente de la envolvente y de la curva es la misma.

Familia de curvas de la forma: $F(x, y, C) = 0$

Para cada constante C, tenemos una curva.
Una envolvente es una curva que pasa por un punto de la curva y de misma tangente en este punto, o sea debe satisfacer:

Las envolventes se obtienen eliminando el parámetro C del sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial C} F(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Familia de curvas de la forma: $\begin{cases} x = x(t, C) \\ y = y(t, C) \end{cases}$

La envolvente se obtiene diciendo que el Jacobiano es 0 para satisfacer la condición de una envolvente:

$$Jacobiano = 0 = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial C} & \dfrac{\partial y}{\partial C} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Con el ejemplo precedente, debemos eliminar C del sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = (x + C)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial C} F(x, y, C) = 2(x + C) = 0 \end{cases}$$

es decir:

$$\begin{cases} (x + C)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x + C) = 0 \end{cases}$$

es decir tenemos 2 líneas como envolvente: $\begin{cases} y_1 = +1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$, que intuitivamente es lo esperado para una familia de círculos trasladados horizontalmente.

3.3 Ecuación de la forma: $y = f\left(x, y'\right)$

Para resolver tal ecuación, generalmente se toma como cambio de variable:

$$\boxed{y' = p}$$

después derivamos $y = f\left(x, y'\right)$ respecto de x, así tenemos:

$$y' = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d y'}{d x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, p)\, p'$$

que es una ecuación diferencial en p, que a veces es más fácil de resolver. Si es el caso, tendremos :

$$x = \varphi(p, C)$$

y la solución final será:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f\left(\varphi(p, C), p\right) \end{cases}}$$

que es una familia de curvas en paramétricas.

Pero no es siempre posible resolver la ecuación en p. Vamos ahora a ver 3 casos clásicos por los cuales se puede.

3.3.1 Ecuación de la forma $y = f\left(y'\right)$

Empezamos haciendo el cambio de variable:

$$\boxed{y' = p}$$

después derivamos $y = f\left(y'\right)$ respecto de x, así tenemos:

$$y' = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d y'}{d x} = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(p)\, p' \; = \frac{d f}{d p}(p)\, p'$$

que es una ecuación diferencial en p, que se puede escribir de la forma:

$$p = f'(p)\, p'$$

Si $p \neq 0$:

$$dx = \frac{f'(p)}{p}\, dp$$

que es de variables separadas.

Integrando: $$x = \int \frac{f'(p)}{p}\, dp = \varphi(p) + C$$

Las soluciones serán las curvas:

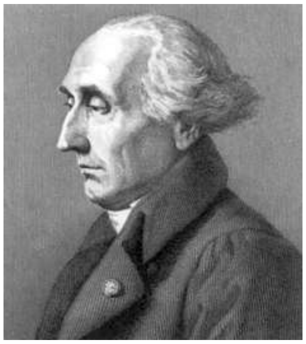
$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(p) + C \\ y = f(p) \end{cases}}$$

Todas las curvas tienen la misma forma, se diferencian únicamente en un desplazamiento horizontal.

Si p=0: la solución es: $\boxed{y = f(0)}$

Miércoles 18.08.2004, Martes 14.08.2007

3.3.2 Ecuación de Lagrange



Joseph Louis de Lagrange (bautizado como *Giuseppe Lodovico Lagrangia*) (25 de enero de 1736 - 10 de abril de 1813) fue un matemático, físico y astrónomo italiano que después vivió en Prusia y Francia. Lagrange trabajó para Federico II de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Lagrange demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía.

3.4 Tabla de contenidos

[ocultar]

3.5 Biografía

3.5.1 Primeros años

Nació (como el Giuseppe Luigi Lagrangia) en Turín. Su padre militar, era de posición social buena y adinerada, pero antes de que su hijo creciera había perdido la mayoría de sus propiedades especulando, y el joven Lagrange tenía que confiar en sus propias habilidades.

Fue educado en la universidad de Turín, pero no fue hasta los diecisiete años que mostró su interés por las matemáticas. Su entusiasmo lo despertó la lectura de una obra del astrónomo Edmund Halley. Tras un año de incesante trabajo, era ya un matemático consumado.

Cuando tenía sólo diecinueve años, envió una carta a Leonhard Euler en que resolvió un problema que había sido un asunto de discusión durante más de medio siglo mediante una nueva técnica: el cálculo de variaciones. Euler reconoció la generalidad del método, y su superioridad; y con una cortesía rara en él, retuvo un papel que él había escrito previamente para que el joven italiano tuviera tiempo para completar su trabajo, como exige la invención de un nuevo método de cálculo. El nombre de esta rama del análisis la sugirió el propio Euler. Este trabajo puso a Lagrange en primera línea entre los matemáticos de su época. En 1758, con la ayuda de sus alumnos, Lagrange publicó en la Academia de Turin la mayoría de sus primeros escritos consistentes en los cinco volúmenes, normalmente conocidos como **Miscellanea Taurinensia** .

En 1761 Lagrange no tenía rival en el campo de las matemáticas; pero su trabajo incesante durante los últimos nueve años habían afectado seriamente su salud, y los doctores se negaron a ser responsables de su vida a menos que él se lo tomara en serio. Aunque su salud fue temporalmente restablecida, su sistema nervioso nunca recuperó su tono, y de aquí en adelante padeció constantemente ataques de melancolía severa.

Lagrange era de mediana altura, complexión débil, con ojos azul claro y un color de piel pálida. Era de un carácter nervioso y tímido, detestó la controversia, y al evitarla de buena gana permitió a otros tener crédito por cosas que él había hecho.

3.5.2 En la corte real de Prusia

En 1766 Euler abandonó Berlín, y Federico II el Grande escribió a Lagrange para expresarle su deseo de que "el rey más grande de Europa" debería tener "el matemático más grande de Europa" viviendo en su corte. Lagrange aceptó la oferta y durante los próximos veinte años en Prusia, no sólo produjo la serie más grande de documentos publicada en el Berlín sino que publicó su trabajo monumental, la **Mécanique analytique**.

Su estancia en Berlín comenzó con un desafortunado error: estando la mayoría de sus colegas casados, y aconsejado por sus esposas de que era la única manera de estar contento, se casó; su esposa se murió pronto, pero la unión no fue feliz.

Lagrange era el favorito del rey y frecuentemente disertó sobre las ventajas de una regularidad perfecta en la vida. La lección la aplicó a su vida, y Lagrange estudió su mente y su cuerpo como si fueran máquinas, y encontró experimentando la cantidad exacta de trabajo que podía hacer sin perder la salud. Todas las noches se ponía una tarea definida para el próximo día, y al completar cualquier tema escribía un corto análisis para ver qué puntos en las demostraciones eran susceptibles de mejora. Siempre pensó en sus artículos antes de componerlos, y normalmente los escribió con aseo y sin una sola raspadura o corrección.

3.5.3 Última etapa en Francia

En 1787 Federico II murió, y Lagrange que se había adaptado al clima de Berlín aceptó alegremente la oferta de Luis XVI para emigrar a París. Había recibido invitaciones similares de España y Nápoles. En Francia fue recibido con distinción, y se prepararon apartamentos especiales en el Louvre para su recepción. Al principio de su residencia tuvo un ataque de melancolía, y tuvo una copia impresa de su **Mécanique** , en la que había trabajado un cuarto de siglo, sin abrir en su escritorio durante más de dos años. La curiosidad acerca de los resultados de la revolución francesa lo sacó de su letargo, una curiosidad que pronto se volvió en alarma con el desarrolló de la revolución.

En 1792, la inexplicable tristeza de su vida y su timidez movió la compasión de una joven muchacha que insistió en casarse siendo feliz con dicha unión. Aunque el decreto de octubre de 1793 que exigía que todos los extranjeros dejaran Francia no le fue aplicado, deseaba marcharse cuando le ofrecieron la presidencia de la comisión para la reforma de pesos y medidas. La opción de las unidades finalmente seleccionadas era principalmente debida a él, y por su influencia se aceptó por la comisión la subdivisión decimal 1799.

Aunque Lagrange había querido salir de Francia, nunca estuvo en peligro y los diferentes gobiernos revolucionarios (y más tarde, Napoleón) lo llenaron de honores y distinciones. En 1795 Lagrange ocupó una silla matemática honorífica en la **École normale** que disfrutó sólo durante cuatro meses. Sus conferencias aquí eran bastante elementales, y no contiene nada de importancia especial. En 1797 Lagrange fue nombrado profesor de **École Polytechnique** y las conferencias que dio allí a los matemáticos que tuvieron la buena suerte de poder asistir a ellas, tenían su base en su **Théorie des fonctions analytiques**

En 1810 Lagrange comenzó una revisión completa de la **Mécanique analytique** , pero sólo pudo completar unos dos tercios antes de su muerte que sucedió en 1813.

3.6 Su obra

3.6.1 Miscellanea Taurinensia

El primer volumen contiene un documento de la teoría de la propagación de sonido; indica un error hecho por Newton, y obtiene la ecuación diferencial general para el movimiento, y halla la solución para el movimiento en línea recta. Este volumen también contiene la solución completa del problema de una cuerda que vibra transversalmente; en este trabajo señala la falta de generalidad en las soluciones dadas previamente por Brook Taylor, D'Alembert y Euler llegando a la conclusión que la forma de la curva para un tiempo *t* cualquiera viene dada por la ecuación $y = a\sin(mx)\cdot\sin(nt)$. El artículo concluye con una hábil discusión sobre ecos y sonidos compuestos. Otros artículos en este volumen son serie recursivas, probabilidad y cálculo de variaciones.

El segundo volumen contiene un documento largo que incluye los resultados de varios documentos del primer volumen y notas sobre el cálculo de variaciones; e ilustra su uso deduciendo el principio de mínima acción, y las soluciones de varios problemas de dinámica.

El tercer volumen incluye la solución de varios problemas de dinámica mediante el cálculo de variaciones; algunos documentos de cálculo integral; una solución del problema de Fermat, encontrar un número x qué hará que $(x^2 n + 1)$ sea un cuadrado dónde n es un entero dado que no es un cuadrado; y las ecuaciones de diferencial generales del problema del movimiento de n-cuerpos y su aplicación al Problema de los tres cuerpos que se mueven bajo sus atracciones mutuas.

3.6.2 Los tratados

Su actividad mental durante estos veinte años en Prusia fue asombrosa, no sólo por el hecho de producir su espléndida **Mécanique analytique**, sino por contribuir, con doscientos trabajos, a las Academias de Berlín, Turin, y París. Algunos de éstos realmente son tratados, y todos, sin excepción, son de una extraordinaria calidad. Salvo un corto tiempo cuando él estaba enfermo en que produjo aproximadamente un artículo por término medio al mes. Los más importantes son:

- Sus contribuciones a los volúmenes cuarto y quinto, 1766 -1773, de la *Miscellanea Taurinensia* ; el más importante fue uno en 1771 en que discutió cómo numerosas observaciones astronómicas deben combinarse para dar el resultado más probable.
- Después, sus contribuciones a los primeros dos volúmenes, 1784 - 1785, de la Academia de Turin. Un papel sobre la presión ejercida por los fluidos en movimiento, y el segundo un artículo en la integración de una serie infinita, y el tipo de problemas para que es conveniente.

3.6.3 La astronomía

El siguiente trabajo fue en 1764 sobre la libración de la Luna, y una explicación acerca de por qué siempre ofrece la misma cara a la Tierra, un problema que él trató con la ayuda del trabajo virtual. Su solución es especialmente interesante por contener el germen de la idea de ecuaciones generalizadas de movimiento, ecuaciones que demostró formalmente en 1780.

La mayoría de los trabajos enviados a París versaba sobre preguntas astronómicas, y entre estos papeles cabe mencionar el sistema joviano en 1766, su ensayo en el problema de los tres cuerpos en 1772, su trabajo sobre la ecuación secular de la Luna en 1773, y su tratado sobre las perturbaciones cometarias de 1778. Éstos eran todos asuntos propuestos por la Academia francesa, y en cada caso el premio se le otorgó a él.

Hay numerosos artículos de astronomía. De estos los más importantes son los siguientes:

- Intentando resolver el Problema de los tres cuerpos, descubrió los puntos de Lagrange en 1772 de interés porque en ellos se han encontrado los asteroides troyanos y satélites troyanos de Saturno.
- Gravitación de elipsoides, 1773: Punto de partida del trabajo de Maclaurin.
- La ecuación secular de la Luna, 1773; también notable por la introducción de la idea de potencial. El potencial de un cuerpo en un punto es la suma de la masa de cada elemento del cuerpo dividido por su distancia del punto. Lagrange mostró que si el potencial de un cuerpo a un punto externo fuera conocido, la atracción en cualquier dirección podría encontrarse en seguida. La teoría del potencial se elaboró en un artículo enviado a Berlín en 1777.
- El movimiento de los nodos de la órbita de un planeta 1774.
- La estabilidad de las órbitas planetarias, 1776.
- Dos artículos sobre el método para determinar la órbita de un cometa con tres observaciones, en 1778 y 1783,: esto no se ha demostrado prácticamente disponible de hecho, pero su sistema de calcular las perturbaciones por medio de las cuadraturas mecánicas ha formado la base de la mayoría de las investigaciones subsecuentes en el asunto.
- Su determinación de las variaciones seculares y periódicas de los elementos orbitales de los planetas, 1781-1784: los límites superiores asignados para que éstos están de acuerdo con aquéllos obtenidos después por Le Verrier, y Lagrange procedió hasta donde el conocimiento permitía entonces de las masas de los planetas.
- A este tema volvió durante los últimos años de su vida cuando estaba ya en París. La teoría del movimiento planetario había formado parte de algunos de los más notable papeles de Berlín de Lagrange. En 1806 el asunto se volvió a abrir por parte de Poisson, quién, en un papel leído antes de la Academia francesa, mostró las fórmulas de Lagrange llevadas a ciertos límites para la estabilidad de las órbitas. Lagrange que estaba presente discutió ahora de nuevo el asunto entero, y en una carta comunicada a la Academia en 1808 explicó cómo, por la variación de constantes arbitrarias, las desigualdades periódicas y seculares de cualquier sistema de cuerpos mutuamente unidos por la gravitación podrían ser determinadas.

3.6.4 El álgebra

El mayor número de sus artículos de álgebra los envió a la Academia de Berlín. Cabe destacar:

- Su discusión de la solución enteras de las formas cuadráticas, 1769, y generalmente de ecuaciones indeterminadas, 1770.
- Su tratado de la teoría de eliminación de parámetros, 1770.
- Sus papeles en el proceso general por resolver una ecuación algebraica de cualquier grado, 1770 y 1771; este método falla para las ecuaciones de un orden superior al cuarto, porque involucra la solución de una ecuación de orden superior, pero da todas las soluciones de sus predecesores.
- La solución completa de una ecuación binomial de cualquier grado, esta ocupa el último lugar en los papeles mencionados.
- Por último, en 1773, su tratamiento de determinantes de segundo y tercer orden, y de sus invariantes.

3.6.5 La teoría de números

Algunos de sus papeles iniciales también tratan de preguntas conectadas con el abandonado pero singularmente fascinante tema de la teoría de números. Entre éstos es lo siguiente:

- Su prueba del teorema que cada entero positivo que no es un cuadrado puede expresarse como la suma de dos, tres o cuatro cuadrados de enteros, 1770.
- Su prueba del teorema de Wilson que si n es un número primo, entonces (n - 1)! + 1 siempre es un múltiplo de n , 1771.
- Sus papeles de 1773, 1775, y 1777, qué da las demostraciones de varios resultados enunciadas por Fermat, y no demostrado previamente.
- Y, por último, su método por determinar los factores de números de la forma $x^2 + ay^2$.

3.6.6 La Mecánica analítica o lagrangiana

Entre 1772 y 1788, Lagrange re-formuló la **mecánica clásica** de Isaac Newton para simplificar fórmulas y facilitar los cálculos. Esta mecánica se llama mecánica Lagrangiana o **mecánica analítica**. Escribe su gran tratado **La Mecánica analítica**. En el libro extiende la ley del trabajo virtual, y hace de él un principio fundamental, con la ayuda del cálculo de variaciones, deduce toda la mecánica, de los sólidos y fluidos.

El objeto del libro es mostrar que el asunto es implícitamente incluido en un solo principio, que permite dar fórmulas generales de las que cualquier resultado particular puede obtenerse. El método de coordenadas generalizadas que obtuvo es quizás el resultado más inteligente de su análisis. En lugar de seguir el movimiento de cada parte individual de un sistema material, como D'Alembert y Euler había hecho, mostró que, si nosotros determinamos su configuración por un número suficiente de variables cuyo número es igual que los grados de libertad que posee el sistema, entonces pueden expresarse los energías cinéticas y potenciales del sistema por lo que se refiere a esas variables, y las ecuaciones del diferenciales del movimiento se deducen por la diferenciación. Por ejemplo, en la dinámica de un sistema rígido él reemplaza la consideración del problema particular por la ecuación general que se escribe ahora normalmente con la fórmula

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

T es la energía Cinética y V para la energía Potencial. Entre otros teoremas menores aquí dado puede mencionar la proposición de que la energía cinética de un sistema material bajo las restricciones dadas es un máximo, y el principio de mínima acción. Todo el análisis es tan elegante que William Rowan Hamilton dijo que este trabajo "*sólo podría describirse como un poema científico*". Puede ser interesante observar que Lagrange comentó que la mecánica realmente era una rama de matemática pura análoga a una geometría de cuatro dimensiones, a saber, el tiempo y las tres coordenadas del punto en el espacio. Al principio ninguna editorial quería publicar el libro; pero Legendre por fin persuadió una empresa de París para hacerlo, y se hizo bajo su supervisión en 1788.

3.6.7 Miscelánea

Hay también numerosos artículos sobre varios puntos de geometría analítica. En dos de ellos, escrito bastante después, en 1792 y 1793, redujo las cuádricas a su forma canónica.

Durante los años de 1772 a 1785 contribuyó con una larga serie de artículos que crearon ciencia, la ecuaciones diferenciales, en derivadas parciales. Una gran parte de estos resultados se ha reunido en la segunda edición del cálculo integral de Euler que se publicó 1794.

Durante los últimos años en Francia su trabajo se centra en el Análisis

3.6.8 Théorie des fonctions analytiques

Sus conferencias en **École Polytechnique** trataron del cálculo diferencial la base de su **Théorie des fonctions analytiques** qué se publicó en 1797. Este trabajo es la extensión de una idea contenida en un artículo que él había enviado a Berlín en 1772. Un método algo similar se había usado previamente por John Landen en el *Análisis Residual*, publicó en Londres en 1758. Lagrange creyó que podía librarse así de las dificultades por el uso de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, que los filósofos objetaron en el tratamiento usual del cálculo del diferencial. El libro esta dividido en tres partes. Da una prueba algebraica del Teorema de Taylor. La segunda trata las aplicaciones a la geometría; y la tercera aplicaciones a la mecánica. Otro tratado en las mismas líneas fue su *Leçons sur le calcul des fonctions* , publicado en 1804. Estos trabajos pueden ser considerados como el punto de arranque- para las investigaciones de Cauchy, Jacobi y Weierstrass.

3.6.9 Infinitesimales

Con posterioridad Lagrange usó los infinitesimales en el cálculo diferencial en el estudio de fórmulas algebraicas; y en el prólogo a la segunda edición del **Mécanique** que se publicó en 1811, él justifica el empleo de infinitesimales, con estas palabras: "*cuando nosotros hemos cogido el espíritu del método infinitesimal, y lo ha verificado la exactitud de sus resultados por el método geométrico de primeras y últimas proporciones, o por el método analítico de funciones derivadas, nosotros podemos emplear las cantidades infinitamente pequeñas como un medio seguro y valiosos de acortar y simplificar nuestras pruebas.* "

3.6.10 Fracciones continuas

Su **Résolution des équations numériques**, publicada en 1798, también es fruto de sus conferencias en la Escuela politécnica. En él da el método de aproximar las raíces reales de una ecuación por medio de Fracciones continuas, y enuncia varios otros teoremas. Al final en una nota muestra el pequeño teorema de Fermat

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \,,$$

donde *p* es un número primo y *a* es un número entero primo entre sí con *p* (m.c.d. (a, p)=1), puede aplicarse para dar la solución algebraica completa de cualquier ecuación binomial. Explica también cómo la ecuación cuyas raíces son los cuadrados de las diferencias de las raíces de la ecuación original puede usarse para dar mucha información acerca de la posición y naturaleza de esas raíces.

3.7 La matemática pura

Los intereses de Lagrange eran esencialmente aquéllos de un estudiante de matemática pura: buscó y obtuvo resultados abstractos de largo alcance, y estaba satisfecho de dejar las aplicaciones a otros. De hecho parte de los descubrimientos de su gran contemporáneo, Laplace, consiste en la aplicación de las fórmulas de Lagrange a los hechos de naturaleza; por ejemplo, las conclusiones de Laplace de la velocidad de sonido y de la aceleración secular de la Luna están ya implícitamente en los resultados de Lagrange. La única dificultad en Lagrange es generalidad extrema de sus procesos; pero su análisis es tan lúcido y luminoso como es simétrico e ingenioso."

Un reciente escritor que habla de Lagrange dice de verdad que él tomó una parte fundamental en el avance de casi todas las ramas de la matemática pura. Como Diofanto y Fermat, él poseyó un genio especial para la teoría de números, y en este asunto dio soluciones de muchos de los problemas que se habían propuesto por Fermat, y agregó algunos teoremas propios. Creó el cálculo de variaciones. La teoría de ecuaciones diferenciales está en deuda con él por convertirla en una ciencia en lugar de una colección de ingeniosos artificios para la solución de problemas particulares.

Contribuyó al cálculo de diferencias finitas con la fórmula de interpolación que lleva su nombre. Sus tres trabajos sobre el método de interpolación de 1783, 1792 y 1793,: están ahora en la misma fase en que Lagrange los dejó.

3.8 Véase también

Polinomio de Lagrange

Mecánica Lagrangiana

Puntos de Lagrange

Multiplicadores de Lagrange

Teorema de Lagrange

****

Es una ecuación de la forma: $\boxed{y + x\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right) = 0}$

Empezamos haciendo el cambio de variable: $\boxed{y' = p}$

Después derivamos respecto de x, así tenemos:

$$p + \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = 0$$

<u>Caso 1</u>: $p+\varphi(p)\neq 0$. Tenemos, multiplicando por dx/dp:

$$\frac{dx}{dp}+x\frac{\varphi'(p)}{p+\varphi(p)}+\frac{\psi'(p)}{p+\varphi(p)}=0$$

donde x es la función y p la variable. Si la podemos resolver, tenemos como solución:

$x=\theta(p,C)$, o sea las soluciones de la ecuación de Lagrange es:

$$\boxed{\begin{cases} x=\theta(p,C) \\ y=-\theta(p,C)\varphi(p)-\psi(p) \end{cases}}$$

<u>Caso 2</u>: $p+\varphi(p)=0$

Significa que existe un λ tal que: $\lambda+\varphi(\lambda)=0$

Tomamos $y'=\lambda$, así tenemos:

$$y+x\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)=0$$

es decir : $\boxed{y=x\lambda-\psi(\lambda)}$

Son rectas, soluciones de la ecuación de Lagrange, **<u>soluciones singulares</u>** de la ecuación. Se dice que **<u>una solución es singular cuando la solución no es única</u>**.

Ahora, recíprocamente, si $y=x\lambda-\psi(\lambda)$ es solución de la ecuación de Lagrange, entonces cumple: $\lambda+\varphi(\lambda)=0$, que es verdad porque $y=x\lambda-\psi(\lambda)$ satisface la ecuación.

3.8.1 Ecuación de Clairaut

Alexis Claude Clairault (también conocido como **Clairault**, a secas) (* 3 de mayo de 1713 - † 17 de mayo de 1765) fue un matemático francés.

Nacido en París, donde su padre era profesor de matemáticas, fue considerado un niño prodigio. A los 12 años escribió un desarrollo sobre cuatro curvas geométricas, y llegó a alcanzar tal progreso en el tema (bajo la tutela de su padre), que a la edad de 13 años leyó ante la Academia francesa un resumen de las propiedades de las cuatro curvas que había descubierto. Tres años más tarde, completó un tratado sobre curvas de doble curvatura, *Recherches sur les courbes a double courbure*, que la valió su admisión a la Academia de Ciencias Francesa tras su publicación en 1731, a pesar de que aún no contaba con la mínima edad legal de 18 años para ser admitido.

En 1736, junto con Pierre Louis Maupertuis, formó parte de una expedición a Laponia, que tenía como objetivo estudiar un meridiano. Tras su regreso, publicó un tratado que dio en llamar *Théorie de la figure de la terre* (1743). En este trabajo planteó por primera vez su teorema, que luego se haría conocido con el nombre de Teorema de Clairault, según el cual se conecta la gravedad en los puntos superficiales de un elipsoide en rotación con la compresión y la fuerza centrífuga en el ecuador.

Clairault obtuvo una ingeniosa resolución aproximada para el problema de los tres cuerpos. En 1750 obtuvo el premio de la Academia rusa de ciencias por su ensayo *Théorie de la lune*, y en 1759 calculó el perihelio del cometa Halley.

La *Théorie de la lune* de Clairault es estrictamente newtoniana en su carácter. En este ensayo el autor explicó el movimiento del afelio que había desconcertado a los científicos y a mismo Clairault hasta entonces, que había considerado al fenómeno tan inexplicable al punto de plantearse una hipótesis de revisión de las leyes de atracción. Fue entonces cuando se le ocurrió llevar la observación al tercer orden, tras lo cual concluyó que los resultados eran conherentes con las observaciones. Esto fue corroborado en 1754 por algunas tablas lunares. Clairault escribió tras ello varios *papers* referidos a la órbita de la luna, y también sobre el movimiento de los cometas y su perturbación por parte de los planetas, particularmente en el caso del cometa Halley.

En 1731, Clairault presentó una demostración de una afirmación de Newton, en la cual el inglés notaba que todas las curvas de tercer orden eran proyecciones de una de cinco parábolas.

En 1741, Clairault partició en una expedición cuyo objetivo era medir la longitud de un meridiano en la tierra, y a su regreso en 1743 publicó su trabajo *Théorie de la figure de la terre*. Estas ideas se basaban sobre un trabajo de Maclaurin, que había demostrado que una masa de fluido homogéneo en rotación alrededor de un eje que pase por su baricentro tomaría, bajo la atracción mutua de sus partículas, la forma de un esferoide. El trabajo de Clairault trataba sobre esferoides heterogéneos y contenía la demostración de su fórmula para el efecto de aceleración gravitacional en un sitio de latitud I. En 1849, Stokes demostró que el mismo resultado se mantenía válido independientemente de la constitución interna y de la densidad de la tierra, si la superficie era un esferoide de equilibrio o de baja elipticidad.

Clairault falleció en París, a la edad de 52 años.

Es una ecuación de la forma: $\boxed{y - x\,y' + \psi\left(y'\right) = 0}$

Entonces es una caso particular de ecuación de Lagrange con $\varphi\left(y'\right) = -y'$
es decir somos en el caso 2 anterior de una ecuación de Lagrange que satisface $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$.
Solo aparecen rectas. Las soluciones son las familias de rectas:

$$\boxed{y = \lambda\,x - \psi(\lambda)}$$

Vamos a ver que además existe una solución particular, que es la envolvente de estas familias de rectas.

Las envolventes se obtienen despejando λ del sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = y - \lambda\,x + \psi(\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda} F(x, y, \lambda) = -x + \psi'(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Eso no es siempre posible o simple. Nos vamos a quedar con su expresión paramétrica:

$$\begin{cases} x = \psi'(\lambda) \\ y = \lambda\,\psi'(\lambda) - \psi(\lambda) \end{cases}$$

Pero podríamos resolver una ecuación de Clairaut sin saber que es un caso particular de una ecuación de Lagrange. Al igual que una ecuación de Lagrange, podemos hacer el cambio de variable:

$$\boxed{y' = p}$$

Después derivamos la ecuación de Clairaut respecto de x, así tenemos:

$$p - p - x\,p' + \psi'(p)\;p' = 0$$

es decir: $\left[-x + \psi'(p)\right]p' = 0$

Tenemos entonces 2 casos posibles:

$$\begin{cases} p' = 0 \\ \psi'(p) = x \end{cases}$$

Si $p' = 0$:

$$p' = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\int \frac{dp}{dx}\, dx = \int \frac{d^2 y}{dx^2}\, dx = \lambda \quad constante$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \lambda \quad constante$$

$$\boxed{y = \lambda x - \psi(\lambda)}$$

Si $\psi'(p) = x$: las soluciones son: $\boxed{\begin{cases} x = \psi'(p) \\ y = p\psi'(p) - \psi(p) \end{cases}}$ que son las soluciones singulares

Ejemplo 1: Resolver: (E): $y = (y')^2 + 2(y')^3$
¿Cuales son las envolventes?

1. Hagamos el **cambio de variable**: $\boxed{y' = p}$

2. **Derivamos (E) respecto a x**: $\frac{d(E)}{dx}$: $y' = 2(y')y'' + 6(y')^2 y''$

$$p = 2(p)p' + 6(p)^2 p'$$
$$p = p\,p'(2 + 6p)$$

Caso 1: $p \neq 0$
En este caso, podemos dividir por p, y tenemos:

$$1 = p'(2 + 6p)$$
$$dx = dp(2 + 6p)$$

3. Integrando, tenemos como **solución una familia de curvas paramétricas**:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = (p)^2 + 2(p)^3 \end{cases}}$$

Caso 2: $p = 0$

En este caso, como (E) es : $y = \left(y'\right)^2 + 2\left(y'\right)^3 = (p)^2 + 2(p)^3 = 0$.

La solución es la **solución singular** : $\boxed{y = 0}$.

Para encontrar las envolventes, igualamos el Jacobiano a 0:

$$Jacobiano = 0 = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial C} & \frac{\partial y}{\partial C} \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 6p & 2p + 6p^2 \end{vmatrix}$$

$$p(2 + 6p) = 0$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ p = -1/3 \end{cases}$$

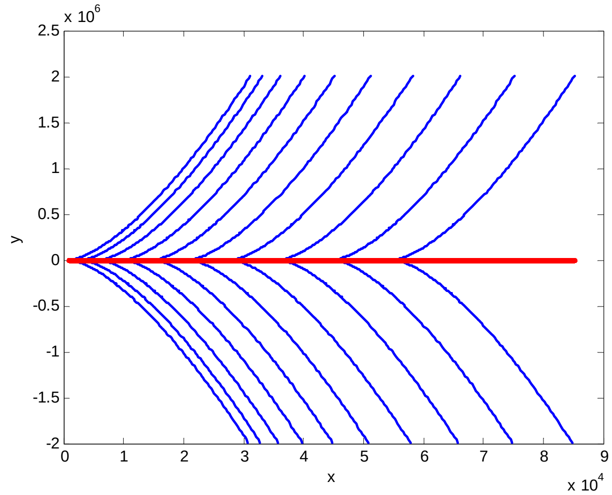
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 1/27 \end{cases}$$

Para p=0, tenemos y=0 que es solución de (E).
Para p=-1/3, tenemos y=1/27 que no es solución de (E).

Como en cada punto (x,y) la tangente es $\left(\dot{x}, \dot{y}\right) = \left(\frac{dx}{dp}, \frac{dy}{dp}\right) = \left(2 + 6p, 2p + 6p^2\right)$, cuando p=0, el vector tangente es (2,0), pero cuando p=-1/3, el vector tangente es (0,0), es decir que no hay vector tangente.

La envolvente es la curva y=0. La recta y=1/27 es el lugar geométrico de los puntos de retroceso de la familia de curvas solución.

```
close all; clear all;

p = [-100 : 0.5 : 100] ;

%Solucion: familia de curvas.
%Para cada C hay una curva.
%Dibujamos 10 curvas con 10
valores
%diferentes de C (por ejemplo
hemos
%tomas aqua: c = C +i * 1000
%con i variando de 1 a 10
% y el valor inicial de C es -1

C = -1
for i=1:10
    C = C + i * 1000;
    x = 2*p + 3*p .^2 + C;
    y = p .^2 + 2*p .^3 ;
    plot ( x , y, 'LineWidth',2 ), xlabel(' x '), ylabel('y')  ;
    hold on
    y0=zeros(length(x)); %Dibujo de la envolvente
    plot(x,y0,'r-','LineWidth',3)
    hold on
end

print -dps fig3331.ps
```



Viernes 20.08.2004, Martes 21.08.2007

<u>Ejemplo 2</u>: Resolver: (E) $y = x + y' - 3\left(y'\right)^2$

Es una ecuación de Lagrange. Hagamos el cambio de variable y'=p y derivar (E) respecto a x:

1. Hagamos el **<u>cambio de variable</u>**:

$$\boxed{y' = p}$$

2. **<u>Derivamos (E) respecto a x</u>**:

$$\frac{d(E)}{dx}: \qquad y' = 1 + y'' - 6\left(y'\right)y''$$

$$p = 1 + p' - 6\,p\,p'$$

$$\left(p - 1\right)dx = \left(1 - 6\,p\right)dp$$

Caso 1: $p \neq 1$

En este caso, podemos dividir por (p-1), y tenemos:

$$dx = \frac{1-6\,p}{p-1}\,dp \;\; = \left(-6 - \frac{5}{p-1}\right) dp$$

Ecuación de variables separadas.

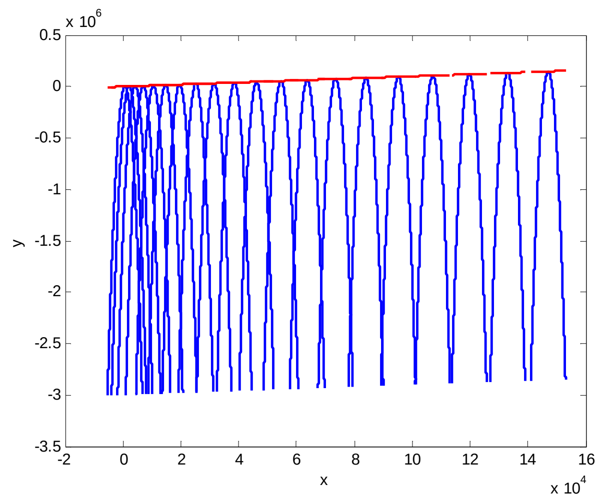
3. Integrando, tenemos como **solución una familia de curvas paramétricas**:

$$\boxed{\begin{cases} x = -6\,p - 5\log(p-1) + C \\ y = -5\,p - 3p^2 - 5\log(p-1) + C \end{cases}}$$

Caso 2: $p = 1$

En este caso, como (E) es: $y = x + y' - 3\left(y'\right)^2 = x + p - 3\,p^2 = x - 2$

La solución es la **solución singular** : $\boxed{y = x - 2}$.




```
close all; clear all;

p = [-1000 : 0.10 : 1000] ;

%Solucion: familia de curvas.
%Para cada C hay una curva.
%  el valor inicial de C es -1

C = -1;
for i=1:20
    C=C+i*700;
    x = -6*p - 5*log( abs((p-1)) ) + C;
    y =-5*p -3*p.^2 - 5*log( abs((p-1)) ) + C ;
    plot ( x , y, 'LineWidth',2 ), xlabel(' x '), ylabel('y')   ;
    hold on
    ysingular=x-2;
    plot(x,ysingular,'r-','LineWidth',2), xlabel(' x '), ylabel('y')
end
print -dps fig3332.ps
```

Ejemplo 3: Resolver: $y = y' x - 2\left(y'\right)^2$
¿Cual son las envolventes?

Es una ecuación de Clairaut. Hagamos el cambio de variable y'=p
y deriva (E) respecto a x:

1. Hagamos el **cambio de variable**:

$$\boxed{y' = p}$$

2. **Derivamos (E) respecto a x**:

$$\frac{d(E)}{dx}: \quad y' = y'' x + y' - 4\left(y'\right)y''$$

$$p = p' x + p - 4(p)p'$$

$$0 = p'(x - 4p)$$

Caso 1: $p' = 0$

En este caso, tenemos p=C=dy/dx, en (E) da: $\boxed{y = Cx - 2(C)^2}$

con C constante.

Para encontrar las **envolventes**, se debe verificar:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 = y - Cx + 2(C)^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial C} F(x, y, C) = 0 = -1x + 4C \end{cases}$$

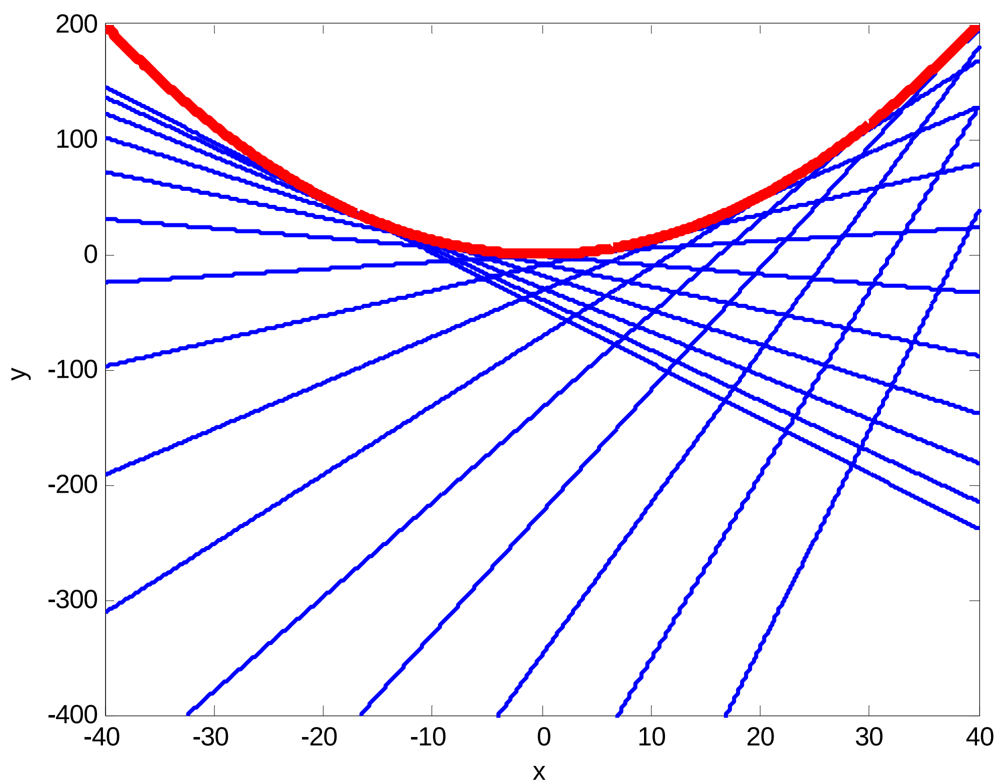
$$\begin{cases} y = Cx - 2(C)^2 \\ x = 4C \end{cases}$$

es decir: $\boxed{y = \dfrac{x^2}{8}}$

Caso 2: $x = 4p$

La solución de (E) es la solución singular: $\boxed{\begin{cases} x = 4p \\ y = px - 2p^2 = 2p^2 \end{cases}}$

```
close all; clear all;

%Solucion: familia de curvas.
%Para cada C hay una curva.

x = [-40 : 0.01 : 40] ;

C=-5;

for i=1:15
    C=C+i*0.2;
    y = C*x - 2*C .^2;
    plot ( x , y, 'LineWidth',2 ), xlabel(' x '), ylabel('y')  ;
    hold on
end

%Solucion singular:

p = [-10 : 0.01 : 10] ;

x = 4*p;
y = 2*p .^2;
plot ( x , y,'r-','LineWidth',4), xlabel(' x '), ylabel('y')  ; axis([-40 40 -
400 200]);
hold on

print -dps fig3333.ps
```



Ejemplo 4:

Resolver: $$xy''' + (y''')^2 = y''.$$

Hacemos $$y'' = p,$$

por tanto $$xp' + (p')^2 = p,$$

obteniendo la ecuación de Clairaut, cuya solución es $p = y'' = Cx + C^2,$

de la cual podemos obtener *y* integrando dos veces,

así $y = \int\int y''\,dxdx = \int\int (Cx+C^2)\,dxdx = \int (\frac{Cx^2}{2}+C^2x+D)\,dx = \frac{Cx^3}{6}+\frac{C^2x^2}{2}+D^2x+E,$

siendo *D* y *E* otras dos constantes cualquiera.

Solución: $$\boxed{y = \frac{Cx^3}{6} + \frac{C^2x^2}{2} + D^2x + E.}$$

3.9 EDO de la forma : $x = f\left(y, y'\right)$

Son ecuaciones similares al parágrafo 3.4 de la forma: $y = f\left(x, y'\right)$, cambiando solamente el papel de x e y. Vamos a proceder de manera idéntica:

$$\text{(E)} \quad x = f\left(y, y'\right)$$

1. Hagamos el **<u>cambio de variable</u>**: $\boxed{y' = p = \frac{dy}{dx}}$

2. **<u>Derivamos (E) respecto a y</u>**: $\frac{d(E)}{dy}:\quad \frac{dx}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} f(y,p) + \frac{\partial}{\partial p} f(y,p)\frac{dp}{dy}$

Si : $p = 0 = \dfrac{dy}{dx}$, entonces: y=cste

Si : $p \neq 0$

Tenemos: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx} = \dfrac{1}{p}$ entonces:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial}{\partial y} f(y,p) + \frac{\partial}{\partial p} f(y,p) \frac{dp}{dy}$$

Si podemos resolver tal ecuación, obtenemos una solución del tipo:

$$y = \varphi(p, C)$$

La solución será entonces la familia de las curvas paramétricas:

$$\boxed{\begin{cases} x = f(\varphi(p,C), p) \\ y = \varphi(p,C) \end{cases}}$$

De igual manera como el 3.3, podemos distinguir 3 casos simples para los cuales se puede resolver la ecuación intermedia.

3.9.1 Ecuación de la forma: $x = f\left(y'\right)$

3.9.2 Ecuación de la forma: $x + y\,\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right) = 0$

3.9.3 Ecuación de la forma: $x - \dfrac{y}{y'} + \psi\left(y'\right) = 0$

Se hacen de igual manera, usando derivadas respecto a y como acabamos de ver. Se deja a cada uno hacer estos casos como ejercicio.

Ejemplo: Resolver: (E) $x = \left(y'\right)^3 + y'$

1. Hagamos el **cambio de variable**:

$$\boxed{y' = p = \frac{dy}{dx}}$$

2. **Derivamos (E) respecto a y**:

$$\frac{d(E)}{dy}: \qquad \frac{dx}{dy} = 3\left(y'\right)^2 \frac{dy'}{dy} + y''$$

Tenemos: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx} = \dfrac{1}{p}$ entonces:

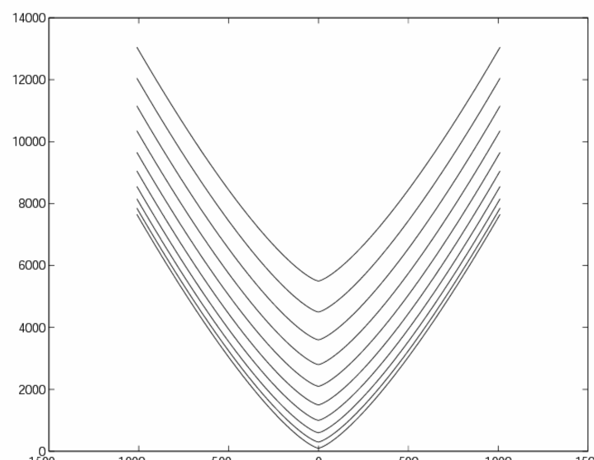
$$\frac{1}{p} = 3(p)^2 \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dy}$$

$$dy = \left(3p^3 + p\right)dp$$

Integrando, la solución será entonces la familia de las curvas paramétricas:

$$\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \dfrac{3}{4}p^4 + \dfrac{1}{2}p^2 + C \end{cases}$$

```
close all; clear all;

%Solucion: familia de curvas.
%Para cada C hay una curva.

p = [-10 : 0.01 : 10] ;

C=-1;
for i=1:10
   C=C+i*100;
   x = p .^3+p;
   y = 3/4*p .^4+1/2*p .^2+C;
   plot ( x , y )  ;
   hold on
end

print -dps fig34.ps
```



lunes 23.08.2004

3.10 EDO de la forma : $F\left(y, y'\right)=0$

Para intentar resolver esta ecuación, vamos a considerar la curva:

$$F(\alpha, \beta)=0$$

suponemos que hemos logrado encontrar una representación paramétrica de la curva:

$$\begin{cases}\alpha=\varphi(t)\\ \beta=\psi(t)\end{cases}$$

tal que: $\boxed{F(\varphi(t), \psi(t))=0}$

Si es así, hacemos el cambio de función $\boxed{y=\varphi(t)}$, teniendo en cuenta que: $\boxed{y'=\psi(t)}$

Vamos a derivar $y=\varphi(t)$ respecto de x:

$$y'=\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

así tenemos:

$$\psi(t)=\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

que ya sabemos resolver (ecuación de variables separadas).

<u>Caso 1</u>: $\psi(t)\neq 0$

$$dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$$

integrando: $$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c$$

Las soluciones son la familia de curvas:

$$\boxed{\begin{cases}x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c\\ y=\varphi(t)\end{cases}}$$

Caso 2: Si existe algún t_0 tal que $\psi(t_0)=0$, para este t_0 tenemos:

$0=\varphi'(t_0)\frac{dt}{dx}$ así que $0=\varphi'(t_0)$. Formalmente, vamos a decir que es verdad para todo t, así que: $\varphi'(t)=0$, es decir: $\varphi(t)=cste=\varphi(t_0)$. Así, tenemos $y=\varphi(t_0)$.

Podemos comprobar con rigor que esta recta horizontal es solución de la EDO sin más que sustituir en ella: $F(y,y')=0=F(\varphi(t_0),0)=F(\varphi(t_0),\psi(t_0))$

Ejemplo: Resolver : $y^{2/3}+(y')^{2/3}=1$

Hagamos tomamos: $y=\cos^3(t)$, $y'=\sin^3(t)$, entonces tenemos: $[\cos^3(t)]^{2/3}+[\sin^3(t)]^{2/3}=1$.
Derivando $y=\cos^3(t)$ tenemos: $y'=-3\cos^2(t)\sin(t)\frac{dt}{dx}$, lo que usando $y'=\sin^3(t)$ resulta: $\sin^3(t)=-3\cos^2(t)\sin(t)\frac{dt}{dx}$

Caso 1: si $\sin^3(t)\neq 0$, tenemos: $dx=-3\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}dt$, o sea:

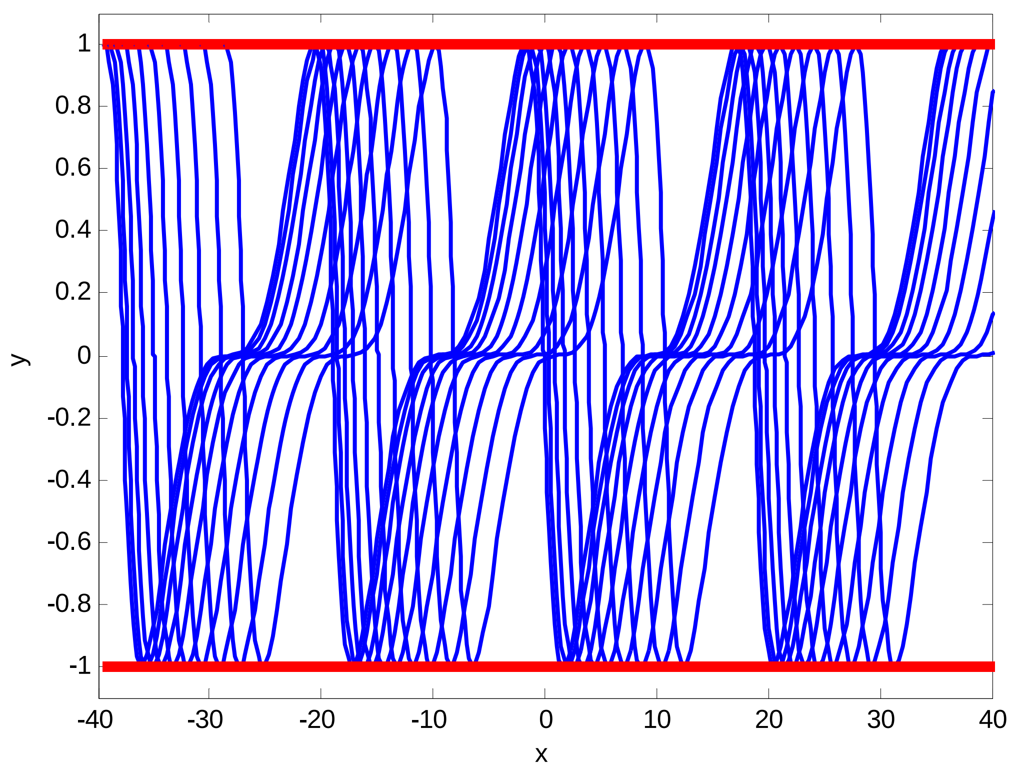
$$x=-3\int\cot^2(t)dt=-3\int[1+\cot^2(t)]dt+3\int dt=3\cot(t)+3t+C$$

Las soluciones son:

$$\boxed{\begin{cases} x=3\cot(t)+3t+C \\ y=\cos^3(t) \end{cases}}$$

Caso 2: Para los t tales que $\sin^3(t)=0$, es decir t=kπ, con $k\in Z$, aparecen como soluciones singulares las rectas horizontales: $y=\cos^3(k\pi)$, es decir $\boxed{y=1}$ e $\boxed{y=-1}$.

```
close all; clear all;

%Solucion: familia de curvas.
%Para cada C hay una curva.

t = [-4*pi : 0.1 : 4*pi] ;

C=-5;

for i=1:10
    C=C+i*0.2;
    x = 3*cos(t) + 3*t + C;
    y = (cos(t)) .^ 3;
    plot ( x , y, 'LineWidth',2 ), xlabel(' x '), ylabel('y')  ;
    hold on
    ysingular1 = ones(length(x));
    ysingular2 = - ones(length(x));
    plot ( x , ysingular1,'r-','LineWidth',4), xlabel(' x '), ylabel('y')
,axis([ -40 40 -1.1 1.1]);
    plot ( x , ysingular2,'r-','LineWidth',4), xlabel(' x '), ylabel('y') ;

end

print -dpsc fig310.ps
```



3.11 EDO de la forma : $F\left(x, y^{'}\right) = 0$

<u>Caso 1</u>: $y^{'} = g(x)$

Entonces, tenemos directamente: $\boxed{y = \int g(x)dx}$

<u>Caso 2</u>: $x = h\left(y^{'}\right)$

$$y^{'} = p \qquad y^{'} = \frac{dy}{dx} = p \qquad dx = \frac{dy}{p}$$

Como $x = h\left(y^{'}\right)$, tenemos: $dx = h^{'}(p)\,dp = \dfrac{dy}{p}$, entonces: $y = \int p\,h^{'}(p)\,dp$

La solución es:

$$\boxed{\begin{cases} x = h(p) \\ y = \int p\,h^{'}(p)\,dp \end{cases}}$$

<u>Caso 3</u>: $\begin{cases} x = h(t) \\ y^{'} = g(t) \end{cases}$ tal que: $F\left(h(t), g(t)\right) = 0$

Igual como antes, con $y^{'} = p$.

3.12 EDO de la forma : $F\left(\dfrac{y}{x}, y^{'}\right) = 0$

Suponemos que conocemos una representación paramétrica

$$\alpha = \varphi(t) \text{ y } \beta = \psi(t)$$

que verifique:

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

Hagamos el **<u>cambio de variable</u>**: $\boxed{\dfrac{y}{x} = \varphi(t)}$

e impongamos la **<u>condición</u>** : $\boxed{y^{'} = \psi(t)}$

Vamos a derivar y, así que tenemos: $y^{'} = \varphi(t) + x\varphi^{'}(t)\dfrac{dt}{dx}$

$$\psi(t) = \varphi(t) + x\varphi^{'}(t)\frac{dt}{dx}$$

$$\psi(t)-\varphi(t)=x\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

que en principio es una ecuación en variables separadas.
Si $\psi(t)\neq\varphi(t)$:

$$\frac{dx}{x}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)-\varphi(t)}$$

de solución :

$$x=C\,e^{\Phi(t)} \text{ con } \Phi(t)=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)-\varphi(t)}$$

entonces $$\boxed{y=C\,e^{\Phi(t)}\,\varphi(t)}$$

Si $\psi(t)=\varphi(t)$:

$$0=x\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$
$$0=\varphi'(t)$$
$$\varphi(t)=C$$
$$\boxed{y=C\,x}.$$

Ejemplo: Resolver: $x^2\left(y'\right)^2-\left(y^2+x^2\right)=0$

Dividiendo por x^2 tenemos :

$$\left(y'\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^2=1$$

Esta forma nos hace recordar la relación $(\cosh t)^2-(\sinh t)^2=1$, así que vamos a hacer el cambio: $y'=\cosh t$ y $\dfrac{y}{x}=\sinh t$.

Vamos a derivar $y=x\sinh t$ así que tenemos $y'=\sinh t+x\cosh t\,\dfrac{dt}{dx}$.

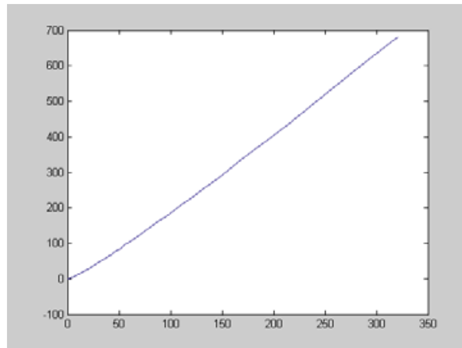
Entonces tenemos $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{\cosh t}{\cosh t-\sinh t}\,dt$.

Tenemos $x=C\,e^{\Phi(t)}$ con

$$\Phi(t)=\int\frac{\cosh t}{\cosh t-\sinh t}\,dt=\int\frac{e^t+e^{-t}}{2\,e^{-t}}\,dt=\frac{1}{2}\int\left(1+e^{2t}\right)dt=\frac{1}{2}\,t+\frac{1}{4}e^{2t}.$$

La solución de la EDO son las curvas: $\boxed{\begin{cases} x = C\, e^{\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}} \\ y = C\, sht\, e^{\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}} \end{cases}}$

```
t = -1.5 : 0.01 : 1.5 ;
C = 1 ;
x = C * exp ( t / 2 + 1 / 4 * exp ( 2 * t) ) ;
y =  x .* sinh ( t ) ;
plot ( x , y );
```



Miércoles 25.08.2004:

Ejercicios para preparar el control.

Viernes 27.08.2004:

Parágrafo 2.15 Teorema de existencia y unicidad de soluciones.
2.15.1 y puntos A y B hasta el lema 3 incluido.

Lunes 30.08.2004:

Fin del parágrafo 2.15 Teorema de existencia y unicidad de soluciones.
Fin del punto B y el punto C y 2.15.2 ecuación lineal de orden 1.

Miércoles 25.08.2004:

4 EDO implícitas en las que se puede reducir el orden

Sea la EDO de la forma:

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad con\; n > 0$$

No hay un método general para resolver tal EDO, así que vamos a ver solamente algunos casos.

4.1 EDO de la forma : $F\left(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad con\; 1 \le k \le n$

Hagamos el **cambio de variable**: $\boxed{y^{(k)} = z}$

Tenemos:

$$F\left(x, z, \cdots, z^{(n-k)}\right) = 0 \quad con\; 1 \le k \le n,$$

que es una EDO de orden (n-k).

Si logramos resolverla, su solución será de la forma: $z = \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-k} \right)$, donde C_i son n-k constantes. Como $y^{(k)} = z$, basta integrar k veces $z = \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-k} \right)$ respecto de x, es decir:

$$y = \iint \cdots \int \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-k} \right) dx\, dx \cdots dx$$

k veces, lo que va a introducir k nuevas constantes.

La solución general será:

$$\boxed{y = \iint \cdots \int \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-k} \right) dx\, dx \cdots dx \;+\; C_{n-k+1}\, x^k + \cdots + C_{n-1}\, x + C_n}$$

Maclaurin series for common functions include (desde la página: http://mathworld.wolfram.com/MaclaurinSeries.html)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \text{ for } -1 < x < 1 \quad (2)$$

$$\operatorname{cn}(x,k) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}(1+4k^2)x^4 + \ldots \quad (3)$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6 - \ldots \text{ for } -\infty < x < \infty \quad (4)$$

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{40}x^5 - \tfrac{5}{112}x^7 - \ldots \text{ for } -1 < x < 1 \quad (5)$$

$$\cosh x = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6 + \tfrac{1}{40{,}320}x^8 + \ldots \quad (6)$$

$$\cot^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{9}x^9 + \ldots \quad (7)$$

$$\cot^{-1}\left(\tfrac{1}{x}\right) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 + \ldots \quad (8)$$

$$\coth^{-1}(1+x) = \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln x + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{16}x^2 + \ldots \quad (9)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln 2 - \ln x + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{32}x^4 + \tfrac{5}{96}x^6 - \ldots \quad (10)$$

$$\operatorname{dn}(x,k) = 1 - \tfrac{1}{2}k^2x^2 + \tfrac{1}{24}k^2(4+k^2)x^4 + \ldots \quad (11)$$

$$\operatorname{erf} x = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{21}x^7 + \ldots\right) \quad (12)$$

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \ldots \text{ for } -\infty < x < \infty \quad (13)$$

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = 1 + \tfrac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \tfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots \quad (14)$$

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \text{ for } -1 < x < 1 \quad (15)$$

$$\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{2}{5}x^5 + \tfrac{2}{7}x^7 + \ldots \text{ for } -1 < x < 1 \quad (16)$$

$$\sec x = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^4 + \tfrac{61}{720}x^6 + \tfrac{277}{8064}x^8 + \ldots \quad (17)$$

$$\operatorname{sech} x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^4 - \tfrac{61}{720}x^6 + \tfrac{277}{8064}x^8 + \ldots \quad (18)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln 2 - \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{32}x^4 - \ldots \quad (19)$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7 + \ldots \text{ for } -\infty < x < \infty \quad (20)$$

$$\sin^{-1} x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \ldots \quad (21)$$

$$\sinh x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + \tfrac{1}{5040}x^7 + \tfrac{1}{362,880}x^9 + \ldots \qquad (22)$$

$$\sinh^{-1} x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 - \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 - \ldots \qquad (23)$$

$$\mathrm{sn}(x,k) = x - \tfrac{1}{6}(1+k^2)x^3 + \tfrac{1}{120}(1+14k^2+k^4)x^5 + \ldots \qquad (24)$$

$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \tfrac{62}{2835}x^9 + \ldots \qquad (25)$$

$$\tan^{-1} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots \text{ for } -1 < x < 1 \qquad (26)$$

$$\tan^{-1}(1+x) = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{40}x^5 + \ldots \qquad (27)$$

$$\tanh x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 - \tfrac{17}{315}x^7 + \tfrac{62}{2835}x^9 + \ldots \qquad (28)$$

$$\tanh^{-1} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 + \ldots. \qquad (29)$$

The explicit forms for some of these are

$$\tfrac{1}{1-x} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (30)$$

$$\cos x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (31)$$

$$\cosh x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2n)!}x^{2n} \qquad (32)$$

$$\csc x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}2(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} \qquad (33)$$

$$e^x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}x^n \qquad (34)$$

$$\ln(1+x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \qquad (35)$$

$$\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{(2n-1)}x^{2n-1} \qquad (36)$$

$$\sec x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} \qquad (37)$$

$$\sin x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (38)$$

$$\sinh x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (39)$$

$$\tan x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n 2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)B_{2n+2}}{(2n+2)!}x^{2n+1} \qquad (40)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1} \tag{41}$$

$$\tanh^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}, \tag{42}$$

where B_n are Bernoulli numbers and E_n are Euler numbers.