CAPíTULO 2

EDO Lineales de Segundo Orden

1. Introducción: Operadores Diferenciales Lineales

Así como una función transforma números en números: $f(x) = y$, un operador transforma funciones en funciones: $P(f) = g$. Por ejemplo, la derivada o la integral son operadores que transforman una función en su derivada o primitiva. Más adelante veremos también la transformada de Laplace que es también un operador. Los operadores que involucran solamente derivadas de una función se denominan operadores diferenciales (en oposición a los operadores integrales que involucran integrales de la función).

La suma y ponderación por escalar de operadores se define como la suma y ponderación por escalar de funciones. Con estas operaciones los operadores forman un espacio vectorial:

$$(P_1 + P_2)(f) = P_1(f) + P_2(f), \quad (\alpha P_1)(f) = \alpha\, P_1(f).$$

Nosotros utilizaremos los operadores diferenciales lineales, esto es aquellos que cumplen que (notar que omitiremos algunos paréntesis en este caso):

$$P(f + g) = P\,f + P\,g, \qquad P(\alpha f) = \alpha(P\,f),$$

que se definen como sigue:

Definición 1.1. *Un operador diferencial lineal de orden n es aquel de la forma:*

(19)

$$P(x, D) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) D^k = a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \ldots + a_1(x)\, D + a_0(x),$$

donde $a_k(x)$ son funciones de x, $D^0 = I$ es la identidad (que omitimos cada vez que aparece) y D^k para $k \geq 1$ representa la derivada de orden k o la derivada $D = \partial/\partial x$ compuesta k veces:

$$D^k = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k \text{ veces}} = \frac{\partial^k}{\partial x^k},$$

de modo que cada vez que se aplica el operador a una función f que sea n veces derivable se obtiene:

(20)
$$P\,f = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) D^k\, f = a_n(x) f^{(n)} + a_{n-1}(x) f^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) f' + a_0(x) f.$$

Si $a_n = 1$ el operador se dice normalizado y si los coeficientes a_k son todos constantes se dice que el operador diferencial lineal es a coeficientes constantes. En este caso el operador se escribe como un polinomio en D:

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, D^k = a_n\, D^n + a_{n-1}\, D^{n-1} + \ldots + a_1\, D + a_0. \tag{21}$$

Se define el producto de operadores diferenciales como su simple composición:

$$P_1\, P_2 = P_1 \circ P_2$$

notar que si P_1 es de orden n_1 y P_2 es de orden n_2 entonces $P_1 P_2$ es de orden $n_1 + n_2$. Con este producto y la suma ya definida, se forma de hecho una estructura algebraica de *anillo* donde la unidad es la identidad I (que se omite en los cálculos). En particular, se tiene la distributividad por la derecha y por la izquierda, que es una propiedad heredada de la composición de funciones, esto es:

$$(P_1 + P_2) Q = P_1\, Q + P_2\, Q, \qquad Q(P_1 + P_2) = Q\, P_1 + Q\, P_2.$$

Pero el producto, como la composición, no es en general conmutativo. Sin embargo, en el caso de operadores lineales a *coeficientes constantes*, el anillo es *conmutativo*, esto es, el producto sí conmuta:

$$P_1(D) P_2(D) = P_2(D) P_1(D).$$

La verificación de estas propiedades se dejan de ejercicio al lector.

Por ejemplo, si $P_1(D) = (D - \lambda_1)$, $P_2(D) = D - \lambda_2$ son dos operadores lineales de orden 1, entonces usando la distributividad, la definición de producto, la linealidad y otras propiedades de anillo es fácil verificar que:

$$\begin{aligned}
P_1(D) P_2(D) &= (D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_2) \\
&= D \circ D - D\lambda_2 - \lambda_1 D + \lambda_1 \lambda_2 \\
&= D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) D + \lambda_1 \lambda_2 \\
&= D \circ D - D\lambda_1 - \lambda_2 D + \lambda_2 \lambda_1 \\
&= (D - \lambda_2) \circ (D - \lambda_1) = P_2(D) P_1(D).
\end{aligned}$$

Usando la notación de operadores diferenciales, podemos escribir una EDO lineal de orden n de la forma:

$$P(x,D)y = \overline{Q}, \qquad \text{o} \qquad P(D)y = \overline{Q}$$

si es a coeficientes variables o constantes respectivamente, donde

$$P(x,D) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k(x)D^k, \qquad P(D) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k D^k,$$

respectivamente, con $\overline{a}_n = 1$.

Usando la notación anterior de operadores diferenciales lineales, la siguiente tabla resume el contenido de este y el próximo capítulo.

EDO lineal orden n	**ecuación homogénea** solución homogénea	**ecuación no homogénea** solución particular
coeficientes constantes	$P(D)y = 0$ Polinomio característico Valores característicos Fórmula de traslación Multiplicidades Oscilador amortiguado	$P(D)y = \overline{Q}$ Fórmula de traslación Anulador Método de Euler o de constantes indeterminadas Resonancia
coeficientes variables	$P(x,D)y = 0$ Hay n soluciones l.i. No hay método general Fórmula de Abel Fórmula de Liouville	$P(x,D)y = \overline{Q}$ Método de Lagrange o de variación de parámetros Representación de Green

CUADRO 1. Tabla resumen de los temas tratados en los Capítulos 2 y 3. Los métodos y resultados para coeficientes variables se aplican también a coeficientes constantes.

2. EDO de Orden 2 a Coeficientes Constantes

Recordemos que una EDO lineal de segundo orden (normalizada) a coeficientes constantes es de la forma

$$\begin{aligned} y'' + \overline{a}_1 y' + \overline{a}_0 y &= 0 \qquad \text{(H)} \\ y'' + \overline{a}_1 y' + \overline{a}_0 y &= \overline{Q} \qquad \text{(S)} \end{aligned}$$

con $\overline{a}_0$, $\overline{a}_1$ en $\mathbb{R}$, de modo que usando la notación de operadores diferenciales lineales, las EDO (H) y (S) a coeficientes constantes quedan de la forma

$$P(D)y = (D^2 + \overline{a}_1 D + \overline{a}_0)y = 0 \text{ ó } \overline{Q}. \tag{22}$$

2.1. Valores Característicos.

DEFINICIÓN 2.1. *El polinomio característico de la EDO* (22) *es* $p(\lambda) = \lambda^2 + \overline{a}_1\lambda + \overline{a}_0$ *con* $\overline{a}_1, \overline{a}_0 \in \mathbb{R}$*. Sus raíces* λ_1 *y* λ_2 *son reales o complejas conjugadas y son llamadas los valores característicos de la ecuación.*

Observando que p se factoriza en como $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ es claro que λ_1 y λ_2 son tales que $\overline{a}_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ y $\overline{a}_0 = \lambda_1\lambda_2$. De modo que se tiene que $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2 = P(D)$. Esto es, el operador diferencial $P(D)$ se factoriza de forma análoga:

$$P(D)y = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y \quad = \quad \overline{Q}.$$

La ecuación escrita en forma factorizada es fácil de resolver. En efecto, si se introduce la función auxiliar $z = (D - \lambda_2)y$, se obtiene el siguiente sistema de dos EDO de primer orden:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)z &= \overline{Q} \\ (D - \lambda_2)y &= z. \end{aligned}$$

Resolviendo como se explicó en el capítulo anterior (ver (8)) se obtiene que:

$$\begin{aligned} z &= C_1 \exp(\lambda_1 x) + \exp(\lambda_1 x) \int \exp(-\lambda_1 s)\overline{Q}(s)ds \\ y &= C_2 \exp(\lambda_2 x) + \exp(\lambda_2 x) \int \exp(-\lambda_2 s)z(s)ds. \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} y \quad = \quad & \underbrace{C_2 \exp(\lambda_2 x) + C_1 \exp(\lambda_2 x) \int \exp((\lambda_1 - \lambda_2)s)ds}_{\text{Solución Homogénea } y_h} \\ & + \underbrace{\exp(\lambda_2 x) \int \exp((\lambda_1 - \lambda_2)s) \left(\int \exp(-\lambda_1 t)\overline{Q}(t)dt \right) ds}_{\text{Solución Particular } y_p}. \end{aligned}$$

2.2. Solución Homogénea.

Se tienen tres casos para los valores característicos:

1. λ_1 y λ_2 reales y distintos.
2. λ_1 y λ_2 reales e iguales.
3. λ_1 y λ_2 complejos conjugados de la forma $\sigma \pm iw$, $w \neq 0$.

Analizemos la solución homogénea y_h. Se sabe que los valores de la integral $\int \exp((\lambda_1 - \lambda_2)x)dx$ son:

1. Para λ_1 y λ_2 reales y distintas : $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\exp((\lambda_1 - \lambda_2)x)$
2. Para λ_1 y λ_2 reales e iguales : x
3. Para λ_1 y λ_2 complejos conjugados : $\dfrac{1}{2iw}\exp(2iwx)$

Por lo tanto, los valores de y_h son:

1. $\widetilde{C}_1 e^{\lambda_1 x} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_2 x}$
2. $\widetilde{C}_1 e^{\lambda x} + \tilde{C}_2 x e^{\lambda x}$, con $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$
3. $\widetilde{C}_1 e^{\sigma} \operatorname{sen} wx + \tilde{C}_2 e^{\sigma} \cos wx$, con $\lambda = \sigma \pm iw$

donde $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ son constantes. Con esto, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *La EDO* (22) *a coeficientes constantes con valores característicos λ_1, λ_2 tiene por solucion homogénea y_h dada por:*

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 : y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} : y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
3. $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} (w \neq 0) : y_h = C_1 e^{\sigma x} \operatorname{sen} wx + C_2 e^{\sigma x} \cos wx$

Nota: en el caso 3 se usó que $\exp(\pm i\theta) = \cos(\theta) \pm i \operatorname{sen}(\theta)$ y se tomó la parte real de la solución homogénea y_h. Observar que $(f + ig)' = f' + ig'$ por lo que por linealidad y_h es solución homogénea si y sólo si sus partes reales e imaginarias lo son.

Ejemplo 2.1 (Analogía electromecánica). En la figura (1), el sistema de la izquierda representa un sistema mecánico en el cual m es la masa del objeto, k es la constante de elasticidad del resorte y b es la constante de amortiguamiento. La fuerza total del sistema, en función del tiempo se representa por $F(t)$. El sistema de la derecha representa un circuito eléctrico RCL, donde L es la inductancia de la bobina, C es la capacidad del condensador y R es la resistencia. $E(t)$ representa el voltaje aplicado en función del tiempo. La corriente que circula se representa por $\frac{dq}{dt}$. Las ecuaciones que describen cada sistema son

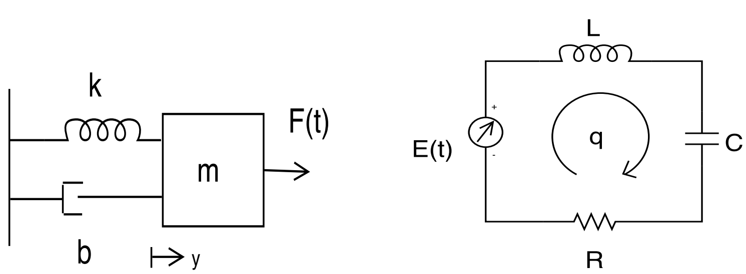

Figura 1. Analogía electromecánica.

$$\begin{aligned} y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y &= \frac{F(t)}{m} \\ q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{CL}q &= \frac{E(t)}{L} \end{aligned}$$

Ambos sitemas están definidos por una EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes, si se tiene que $m \approx L, b \approx R$ y $k \approx \frac{1}{C}$ (todas constantes positivas), entonces son análogos. El polinomio característico es $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$, y sus soluciones son $\lambda = \dfrac{-b}{2m} \pm \sqrt{\dfrac{b^2}{4m^2} - \dfrac{k}{m}}$ ($\triangle = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$). Hay 3 situaciones:

1. $\dfrac{b^2}{4m^2} > k$, entonces las soluciones son reales y distintas.
2. $\dfrac{b^2}{4m^2} = k$, las soluciones son reales e iguales
3. $\dfrac{b^2}{4m^2} < k$, las soluciones son complejos conjugadas.

Si al sistema no se le aplica fuerza o voltaje, es decir, $F(t) = 0$ o $E(t) = 0$, se tendrá en cada situación:

1. $y_h = C_1 \exp\left\{\left(\underbrace{\dfrac{-b}{2m} + \sqrt{\triangle}}_{<0}\right) t\right\} + C_2 \exp\left\{\left(\underbrace{\dfrac{-b}{2m} - \sqrt{\triangle}}_{<0}\right) t\right\}$
(Régimen sobreamortiguado)
2. $y_h = C_1 \exp\left\{\left(\dfrac{-b}{2m}\right) t\right\} + C_2 t \exp\left\{\left(\dfrac{-b}{2m}\right) t\right\}$ (Régimen críticamente amortiguado)
3. $y_h = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\triangle}t\right) \exp\left\{\left(\dfrac{-b}{2m}\right) t\right\} + C_2 \cos\left(\sqrt{-\triangle}t\right) \exp\left\{\left(\dfrac{-b}{2m}\right) t\right\}$
o equivalentemente $y_h = C_3 \exp\left\{\left(\dfrac{-b}{2m}\right) t\right\} (\operatorname{sen}\left(\sqrt{-\triangle}t\right) + C_4)$, pues $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$ (Régimen subamortiguado).

En la figura (3) se tienen los posibles valores de las raíces. En la figura (4) se grafica la dependencia con respecto a b, con $b \to 0$ (es decir , $\lambda_1(b)$ y $\lambda_2(b)$), y se obtiene su diagrama de bifurcación. La solucion homogénea de esta EDO se representa como la combinación lineal de dos funciones y_1 e y_2 que varian en cada caso.

2.3. Solución Particular: Método de Variación de Parámetros. Se sabe que $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, es decir, cada función y_1 e y_2 satisface (H) para $C_1 = 1, C_2 = 0$ y $C_1 = 0, C_2 = 1$

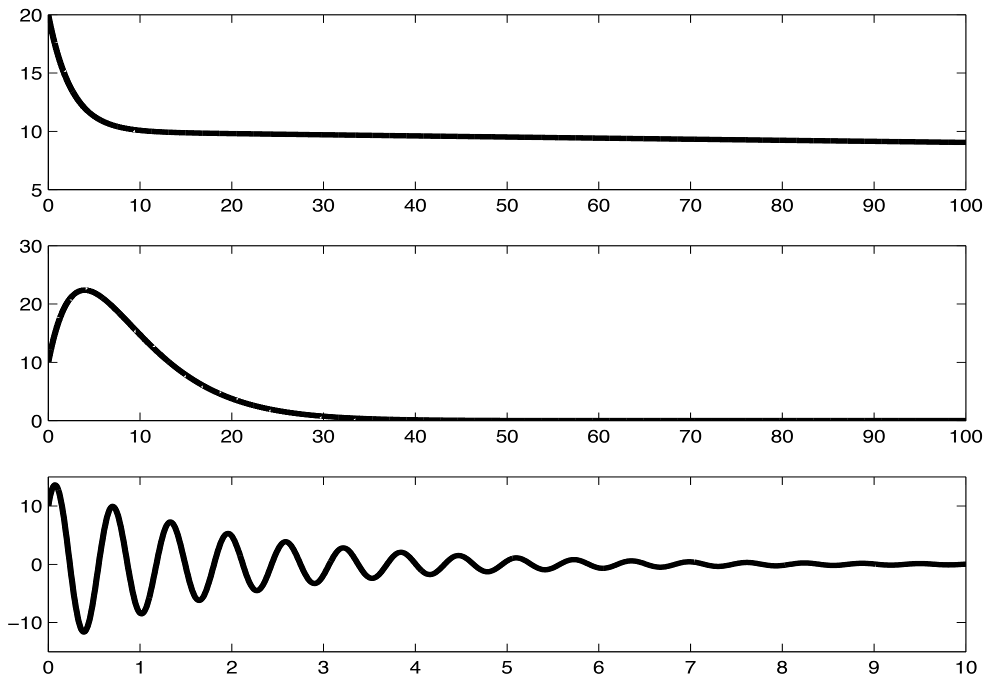

Figura 2. Regimen Sobreamortiguado (arriba), Criticamente Amotiguado (centro) y Subamortiguado (abajo), con $C_1 = C_2 = 10$.

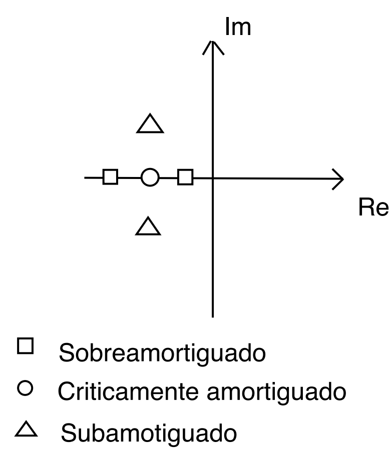

Figura 3. Posibles valores de λ_1 y λ_2 en $\mathbb{C}$.

respectivamente. Se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1'' + \overline{a}_1 y_1' + \overline{a}_0 y_1 &= 0 \\ y_2'' + \overline{a}_1 y_2' + \overline{a}_0 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

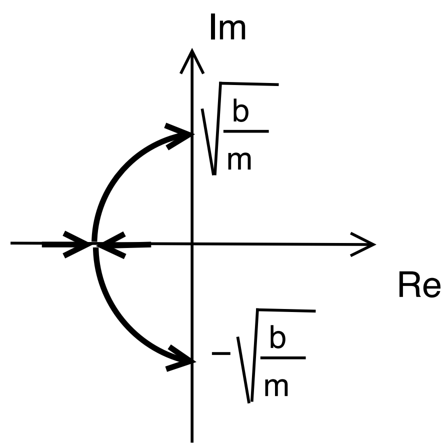

FIGURA 4. Diagrama de Bifurcación de $\lambda_1(b)$ y $\lambda_2(b)$ en $\mathbb{C}$, con $b \to 0$.

Multiplicando por $C_1 \in \mathbb{R}$ la primera ecuación, por $C_2 \in \mathbb{R}$ la segunda y sumando ambas, se obtiene

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + \overline{a}_1(C_1y_1 + C_2y_2)' + \overline{a}_0(C_1y_1 + C_2y_2) \;=\; 0$$

Luego, cualquier combinación lineal de y_1 e y_2 es también solución de la ecuación homogénea. Se busca una solucion particular de la forma $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son incógnitas. Reemplazando y_p en (S),

$$\begin{aligned}
\overline{Q} &= y_p'' + \overline{a}_1y_p' + \overline{a}_0y_p\\
\overline{Q} &= (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)'' + \overline{a}_1(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)' + \overline{a}_0(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)\\
\overline{Q} &= (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2')' + \overline{a}_1(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2')\\
&\quad +\overline{a}_0(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)\\
\overline{Q} &= (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'\\
&\quad +\overline{a}_1(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') + \overline{a}_0(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)
\end{aligned}$$

Como se tiene (23), $C_1(x)(y_1'' + \overline{a}_1y_1' + \overline{a}_0y_1) = 0$ y $C_2(x)(y_2'' + \overline{a}_1y_2' + \overline{a}_0y_2) = 0$, por lo tanto

$$(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + \overline{a}_1(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' \;=\; \overline{Q}$$

Imponiendo $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$, se tiene el sistema

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0\\
C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= \overline{Q}
\end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{Q} \end{pmatrix}$$

Si el determinante de esta matriz es no nulo para cualquier valor de x, el sistema tiene solución única.

DEFINICIÓN 2.2 (Wronskiano). *Dada la solución homogénea $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ y $x \in \mathbb{R}$, el Wronskiano de esa solución se define como*

$$\begin{aligned} W(x, y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \end{aligned}$$

En otras palabras, si $\forall x \in \mathbb{R}, W(x, y_1, y_2) \neq 0$, el sistema tendrá solución única de la forma

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{1}{W(x, y_1, y_2)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \overline{Q} & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{-\overline{Q}y_2}{W(x, y_1, y_2)} \\ C_2'(x) &= \frac{1}{W(x, y_1, y_2)} \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \overline{Q} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\overline{Q}y_1}{W(x, y_1, y_2)} \end{aligned}$$

Integrando ambas expresiones, se obtienen los valores de $C_1(x)$ y $C_2(x)$:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{\overline{Q}y_2}{W(x, y_1, y_2)} dx + K_1 \\ C_2(x) &= \int \frac{\overline{Q}y_1}{W(x, y_1, y_2)} dx + K_2 \end{aligned}$$

Y la solución particular y_p queda de la forma

$$y_p = -y_1 \int \frac{\overline{Q}y_2}{W(x, y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{\overline{Q}y_1}{W(x, y_1, y_2)} dx + K_1y_1 + K_2y_2$$

Veamos que para cualquier valor de las raíces del polinomio característico el Wronskiano es distinto de cero:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 : y_h = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$$\begin{aligned} W(x, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}}_{>0} \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} : y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \Rightarrow y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} W(x, e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & \lambda x e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2\lambda x}(\lambda x + 1 - \lambda x) \\ &= \underbrace{e^{2\lambda x}}_{\neq 0} \end{aligned}$$

3. $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} (w \neq 0) : y_h = C_1 e^{\sigma} \operatorname{sen} wx + C_2 e^{\sigma} \cos wx \Rightarrow$ $y_1 = e^{\sigma} \operatorname{sen} wx, y_2 = e^{\sigma} \cos wx$

$$\begin{aligned} W(x, e^{\sigma} \operatorname{sen} wx, e^{\sigma} \cos wx) &= \begin{vmatrix} e^{\sigma x} \operatorname{sen} wx & e^{\sigma x} \cos wx \\ \sigma e^{\sigma x} \operatorname{sen} wx + w e^{\sigma x} \cos wx & \sigma e^{\sigma x} \cos wx - w e^{\sigma x} \operatorname{sen} wx \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{w}_{\neq 0} \underbrace{e^{2\sigma x}}_{\neq 0} \end{aligned}$$

3. Independencia Lineal y Wronskiano

DEFINICIÓN 3.1. *Sea I un intervalo real. Se define $\mathcal{C}^0(I)$ como el conjunto de funciones $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en el intervalo I. Se define $\mathcal{C}^n(I)$ como el conjunto de funciones $f : I \to \mathbb{R}$ con $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ continuas en el intervalo I.*

Estos conjuntos son subespacios vectoriales del espacio de funciones de $\to \mathbb{R}$ con la suma y ponderación de funciones. En efecto, $0 \in \mathcal{C}^n(I)$ y si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ entonces para todo real λ se cumple que $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n$.

DEFINICIÓN 3.2. *Las funciones $y_1, \dots, y_k$ en $\mathcal{C}^n(I)$ son linealmente independientes (l.i.) si se cumple que ,*

$$\forall x \in I, C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0 \text{ (función nula)}$$
$$\text{entonces}$$
$$C_1 = \cdots = C_k = 0 \text{ (escalar nulo)}$$

EJEMPLO 3.1. Veamos que $y_1 = \operatorname{sen} x, y_2 = \cos x$ son l.i. Si se tiene la igualdad $C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x = 0$, derivándola con respecto a

x se obtiene $C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x = 0$, luego si el sistema de estas dos igualdades tiene solución única, las funciones son l.i. :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la matriz vale $-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$ para todo $x \in I$, el sistema tiene solución única, por lo tanto $C_1 = C_2 = 0$ (notar que el Wronskiano de ambas funciones coincide con el determinante de la matriz).

En general, para cualquier par de funciones $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(I)$, se tiene la siguiente propiedad:

Propiedad 3.1. *Dadas dos funciones $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(I)$, si $W(x_0, y_1, y_2) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces y_1 e y_2 son linealmente independientes.*

Observación. Existen puntos donde la combinación lineal se anula sin que se anulen los coeficientes. En el ejemplo (3.1), basta con evaluar en $x_0 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Definición 3.3. *Las funciones $y_1, \ldots, y_k$ en $\mathcal{C}^n(I)$ son linealmente dependientes (l.d.) si existen constantes $C_1, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\forall x \in I, C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0$.*

En el caso de la dependencia lineal, no se puede utilizar el Wronskiano como método de prueba, es decir, la implicancia $\forall x \in I, W(x_0, y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1$ e y_2 son l.d.. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2. Sean $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$. Para ver que son l.i. basta con evaluar la expresión $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ en $x = 1$ y $x = -1$ y se tendrán las ecuaciones $C_1 + C_2 = 0$ y $-C_1 + C_2 = 0$, con lo cual $C_1 = C_2 = 0$. Ahora, veamos que $\forall x \in I, W(x, y_1, y_2) = 0$. El Wronskiano tiene 2 posibles valores, si $x \geq 0$, $\begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$, o si $x < 0$, $\begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$. Con esto se prueba que la implicancia no se tiene.

4. EDO de Orden 2 a Coeficientes Variables

4.1. Solución Homogénea: Fórmulas de Abel y Liouville. En las secciónes anteriores se vio que para una EDO de la forma (H) o (S) a coeficientes constantes, la solución homogénea es de la forma $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ donde y_1 e y_2 son dos soluciones homogéneas linealmente independientes. Veremos en el próximo capítulo que ellas existen, sin embargo, en el caso de coeficientes variables, el método de los valores característicos no se puede aplicar y no existe una metodología general para encontrar y_1 e y_2. No obstante, presentaremos una fórmula que permite encontrar una solución a partir de la otra: es la fórmula de Abel.

Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO $y'' + \overline{a}_1(x)y' + \overline{a}_0(x)y = 0$. El Wronskiano para esas soluciones es

$$\begin{aligned} W(x, y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= y_1y_2' - y_1'y_2 \end{aligned}$$

Derivando este valor, se tiene que

$$\begin{aligned} W'(x, y_1, y_2) &= \frac{d}{dx}(y_1y_2' - y_1'y_2) \\ &= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1''y_2 \\ &= y_1y_2'' - y_1''y_2 \end{aligned}$$

Como y_1 e y_2 son soluciones, cumplen con las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} y_1'' + \overline{a}_1(x)y_1' + \overline{a}_0(x)y_1 &= 0 \\ y_2'' + \overline{a}_1(x)y_2' + \overline{a}_0(x)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por y_2 la primera, por y_1 la segunda y restando ambas ecuaciones, se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} \underbrace{(y_1y_2'' - y_1''y_2)}_{W'(x,y_1,y_2)} + \overline{a}_1(x)\underbrace{(y_1y_2' - y_1'y_2)}_{W(x,y_1,y_2)} &= 0 \\ W'(x, y_1, y_2) + \overline{a}_1(x)W(x, y_1, y_2) &= 0 \\ W(x, y_1, y_2) &= C\exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx\right) \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Esta expresión se conoce como *fórmula de Abel*.
Con esta fórmula, se puede despejar el valor de y_2 en función de y_1:

$$\begin{aligned}
y_2' y_1 - y_1' y_2 &= C \exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx\right)\\
y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 &= \frac{C}{y_1} \exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx\right)\\
y_2' \underbrace{\exp\left(-\int \frac{y_1'}{y_1}dx\right)}_{\frac{1}{y_1}, y_1 \neq 0} - \frac{y_1'}{y_1} y_2 \exp\left(-\int \frac{y_1'}{y_1}dx\right) &= \frac{C}{y_1} \exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx - \int \frac{y_1'}{y_1}dx\right)\\
\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{C}{y_1^2} \exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx\right)\\
y_2 &= y_1 \tilde{C} + y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx\right) du
\end{aligned}$$

Si se supone que $y_2 = v(x) y_1$, con $v(x)$ variable, el único valor que puede tomar $\tilde{C}$ es cero, con lo cual se tiene la *fórmula de Liouville*:

$$y_2 = y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx\right) du$$

con $v(x) = C \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int \overline{a}_1(x)dx\right) du$.

Ejemplo 4.1. Se tiene la EDO $x^2 y'' + xy' - y = 0$ y una solución $y_1 = x$. Se pide encontrar y_2:

$$\begin{aligned}
xy_2'' - y_2 &= C \exp\left(\int -\frac{dx}{x}\right)\\
y_2' - \frac{y_2}{x} &= \frac{C}{x^2}\\
\left(\frac{y_2}{x}\right)' &= \frac{C}{x^3}\\
\frac{y_2}{x} &= \frac{C}{-2x^2} + \underbrace{\tilde{C}}_{=0}\\
y_2 &= \frac{\bar{C}}{x}, \bar{C} = \frac{-C}{2}
\end{aligned}$$

Al evaluar y_2 en la EDO, se verifica que sea solución de ésta: $\frac{2}{x^3}x^2 - \frac{1}{x^2}x - \frac{1}{x} = 0$

4.2. Solución Particular. El mismo método de variación de parámetros visto antes para coeficientes constantes se aplica en el caso de coeficientes variables. Para ello, se debe disponer primero de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.