MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2007-2
Profesor: Axel Osses **Auxiliares:** Nicolás Carreño, Jorge Lemus.

Pauta Control 3

22 de Octubre de 2007

P1.- **(i)** Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\omega \neq 0$. Use la transformada de Laplace para probar la igualdad:

$$t^n * \cos \omega t = \frac{n}{\omega}\, t^{n-1} * \operatorname{sen} \omega t\,.$$

Solución: Se aplica transformada de Laplace a la expresión de la izquierda y se usa la propiedad de la convolución:

$$\mathcal{L}[t^n * \cos \omega t](s) = \mathcal{L}[t^n](s)\mathcal{L}[\cos \omega t](s).$$

Estas últimas dos transformadas son conocidas, con lo que se obtiene:

$$\mathcal{L}[t^n * \cos \omega t](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\frac{s}{s^2+w^2} = \frac{n}{\omega}\frac{(n-1)!}{s^n}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Reconociendo el producto de transformadas se obtiene:

$$\mathcal{L}[t^n * \cos \omega t](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\frac{s}{s^2+w^2} = \frac{n}{\omega}\mathcal{L}[t^{n-1} * \operatorname{sen} \omega t](s),$$

de donde usando el Teorema de Lerch se obtiene:

$$t^n * \cos \omega t = \frac{n}{\omega}\, t^{n-1} * \operatorname{sen} \omega t\,.$$

(ii) Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando transformada de Laplace:

$$ty'' - 2y' + ty = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} -\operatorname{sen} t & 0 \leq t < \pi \\ -\cos t & t \geq \pi. \end{cases}$$

Lo primero es escribir la función f *en una línea*, para lo que se usa la función escalón o Heaviside. Recordando que $\mathcal{L}[H_a f(t-a)] = e^{-as}F(s)$ y que $\cos(t-\pi) = -\cos(t)$, $\operatorname{sen}(t-\pi) = -\operatorname{sen}(t)$, se tiene:

$$f(t) = -\operatorname{sen} t + H_\pi(t)[-\cos(t) + \operatorname{sen}(t)] = -\operatorname{sen} t + H_\pi(t)[\cos(t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi)],$$

aplicando transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Ahora, llamando $F(s) = \mathcal{L}[y](s)$, al aplicar transformada de Laplace al lado izquierdo de la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{ds}[s^2F(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sF(s) - y(0)] - \frac{d}{ds}[F(s)] \\ &= -2sF(s) - s^2F'(s) - 2sF(s) - F'(s) = -(s^2+1)F'(s) - 4sF(s). \end{aligned}$$

Juntando las 2 expresiones anteriores, se obtiene:

$$(s^2+1)F'(s) + 4sF(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

$$F'(s) + \frac{4s}{s^2+1}F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{e^{-\pi s}s}{(s^2+1)^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)^2}.$$

Esto es una EDO de primer orden para $F(s)$, que resolvemos con factor integrante. $e^{\int \frac{4s}{s^2+1}ds} = (s^2+1)^2$. La ecuación queda entonces:

$$[F(s)(s^2+1)^2]' = 1 + (1-s)e^{-\pi s},$$
$$F(s)(s^2+1)^2 = s - \frac{1}{\pi}se^{-\pi s} + \frac{1+\pi}{\pi^2}e^{-\pi s},$$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{se^{-\pi s}}{\pi(s^2+1)^2} + (1+\pi)\frac{e^{-\pi s}}{\pi^2(s^2+1)^2}.$$

Aplicando antitransformada y aplicando propiededes de traslación y convolución se obtiene:

$$y(t) = (\text{sen}(\cdot) * \cos(\cdot))(t) - \frac{1}{\pi}H_\pi(t)(\text{sen}(\cdot) * \cos(\cdot))(t-\pi) + \frac{1+\pi}{\pi^2}H_\pi(t)(\cos(\cdot) * \cos(\cdot))(t-\pi).$$

P2.- Sea $A(t)$ una matriz de $n \times n$ funciones continuas para $t \in \mathbb{R}$. Una matriz fundamental <u>no canónica</u> es una matriz $W(t)$ tal que:

$$(L) \qquad W' = A(t)W, \quad \text{con } W(0) \text{ invertible.}$$

(i) Pruebe que $W(t)$ existe y que si Φ es la matriz fundamental <u>canónica</u> entonces

$$W(t) = \Phi(t)W(0).$$

Deduzca de ello que $W(t)$ es invertible para todo $t \in \mathbb{R}$.

<u>Solución:</u> Ver que $W(t)$ existe es una consecuencia del TEU (Teorema de Existencia y Unicidad). Para ello denotemos por $w_i(t)$ a la i-ésima columna de $W(t)$, y consideremos el sistema lineal para cada $i = 1 \ldots n$:

$$\begin{aligned} w_i'(t) &= A(t)w_i(t) \\ w_i(0) &= \bar{w}_i \end{aligned}$$

donde $\{\bar{w}_i\}_{i=1}^n$ son l.i. Por el TEU cada sistema anterior tiene solución, y es única dada la condición inicial. Así, es fácil ver que $W(t)$ satisface (SL). Sea ahora $\Psi(t) = W(t) - \Phi(t)W(0)$. Derivando:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= W'(t) - \Phi'(t)W(0) \\ \Psi'(t) &= A(t)W(t) - A(t)\Phi(t)W(0) \\ \Psi'(t) &= A(t)\Psi(t), \end{aligned}$$

o sea, Ψ satisface un sistema lineal, que llamammos (SL'). Además, $\Psi(0) = W(0) - \Phi(0)W(0) = 0$. Por el TEU, (SL') tiene solución única, pero la función idénticamente cero es solución de (SL'), por lo que podemos concluir que $\Psi(t) = 0 \quad \forall t$, es decir $W(t) = \Phi(t) \quad \forall t$. Por último, sabemos que una matriz fundamental es invertible si y sólo si es invertible en un punto. Como $W(t)$ es una matriz fundamental y es invertible en 0, concluimos que $W(t)$ es invertible $\forall t$.

(ii) Sabiendo que $W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$ es la solución de (L), encuentre $\Phi(t)$ y $A(t)$.

Compruebe que $\Phi'(0) = A(0)$ para verificar sus cálculos.

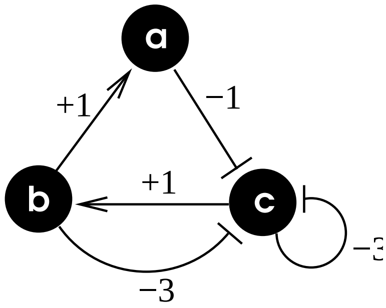
<u>Solución</u>: Calculemos $\Phi(t)$. De la parte anterior se tiene que $\Phi(t) = W(t)W^{-1}(0)$. Como $W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $W(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{-t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De la misma forma calculemos $A(t) = W'(t)W(t)^{-1}$:

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} \\ -e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t}{2} & \frac{e^t}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

P3.- Una red génica está formada de tres genes a, b y c. La actividad del gen a aumenta proporcionalmente a la actividad del gen b y se indica por una flecha que va de b a a con una constante de proporcionalidad positiva (b activa a a). Por otro lado, la actividad del gen c disminuye proporcionalmente a la actividad del gen a y se dibuja un segmento terminado en una barra desde a hacia c con una constante de proporcionalidad negativa (a inhibe a c). Y así sucesivamente. Puede también haber auto-inhibición como ocurre con el gen c.



(i) Escriba el sistema de ecuaciones lineales en las variables x_a, x_b y x_c representando las actividades de cada gen. Encuentre la matriz A del sistema y su polinomio característico.

Solución: El sistema de ecuaciones vienen dado por:

$$\begin{aligned} x_a' &= x_b \\ x_b' &= x_c \\ x_c' &= -x_a - 3x_b - 3x_c \end{aligned}$$

o matricialmente

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

Encontremos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(\lambda(\lambda+3)+3) - 1 \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 \\ &= -(\lambda+1)^3 \end{aligned}$$

(ii) Encuentre los valores y vectores propios (o vectores propios generalizados) de A. A partir de esto encuentre la descomposición diagonal (o en forma de Jordan) de A.

Solución: Se puede ver de la parte anterior que -1 es el único valor propio (con multiplicidad 3). Busquemos los vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\begin{aligned} v_1 &= -v_2 \\ v_3 &= -v_2 \end{aligned}$$

Fijando $v_2 = 1$, obtenemos el primer vector propio: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Encontremos ahora un vector propio generalizado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 - v_2 \\ v_3 &= -1 - v_2 \end{aligned}$$

Fijando $v_2 = 0$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Como todavía no completamos una base del espacio, buscamos un nuevo vector propio generalizado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 - v_2 \\ v_3 &= -v_2 \end{aligned}$$

Fijando $v_3 = 0$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si definimos $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la descomposición en forma de Jordan es entonces:

$$A = PJP^{-1}$$

(iii) Establezca la forma general que tiene la actividad de la red si no hay influencias externas a ella y muestre que las actividades tienden a cero.

Solución: Si no hay influencias externas, se debe resolver el sistema homogéneo para encontrar la forma general de la red. Sabemos que la solución viene dada por:

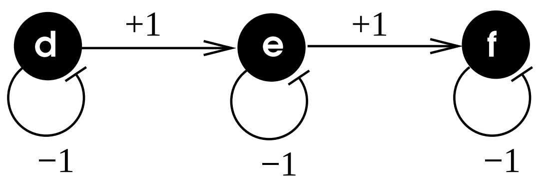
$$x(t) = e^{At} x_0$$

con $x(t) = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$, y x_0 una condición inicial. Explícitamente, la solución es:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2} e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \vec{c}, \quad \vec{c} = P^{-1} x_0$$

Cuando $t \to \infty$, todos los términos de la matriz anterior tienden a cero, con lo que se concluye que todas las actividades son nulas en el límite.

(iv) Pruebe que la red anterior es equivalente en la base propia a la red siguiente:



donde debe determinar qué combinaciones de las actividades originales representan las nuevas actividades de d, e y f. Finalmente, a partir de esta nueva red, diga cuál de estas tres actividades converge en principio más lentamente a cero. (Nota: le puede servir definir las variables x_d, x_e y x_f).
Solución: El sistema para esta nueva red es:

$$\begin{aligned} x_f' &= -x_f + x_e \\ x_e' &= -x_e + x_d \\ x_d' &= -x_d \end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_f \\ x_e \\ x_d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f \\ x_e \\ x_d \end{pmatrix}$$

Llamando $y = \begin{pmatrix} x_f \\ x_e \\ x_d \end{pmatrix}$ y $x(t) = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$.
El sistema es entonces:

$$y' = Jy$$

Por otro lado, el sistema original:

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x' &= PJP^{-1}x \\ P^{-1}x' &= JP^{-1}x \end{aligned}$$

es decir, el nuevo sistema es equivalente a expresar las variables originales en otra base, mediante el cambio $y = P^{-1}x$.
De la relación $x = Py$, se puede deducir que

$$\begin{aligned} x_a &= x_f + x_e + x_d \\ x_b &= -x_f \\ x_c &= x_f - x_e. \end{aligned}$$

Además, para las nuevas variables y se tiene:

$$y = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \vec{c}_1, \quad \vec{c}_1 = y_0.$$

Dependiendo de las condiciones iniciales, se tendrá que existirá alguna componente y_i, $i = 1, 2, 3$, tal que $\forall t > t_0$, $y_i(t) \leq y_j(t)$, $i \neq j$. Esa componente será la que converge más lentamente a cero.