CAPíTULO 4

Existencia y Unicidad, Sistemas Lineales de EDO

1. Introducción

Hasta aquí se han estudiado ecuaciones lineales con una sola función incógnita. Estudiaremos ahora sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tanto porque permiten modelar problemas físicos que involucran la interacción de varias funciones incógnita, como también porque a ellos pueden reducirse ecuaciones lineales de grado superior.

DEFINICIÓN 1.1. *Un sistema lineal de EDO en $\mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) es un sistema de n ecuaciones escrito de la forma*

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad \forall t \in I, \qquad X(t_0) = X_0, \tag{23}$$

donde $A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B(t) \in \mathbb{K}^n$ para cada t en $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalo abierto no vacío y $X_0 \in \mathbb{K}^n$ son condiciones iniciales en $t = t_0 \in I$. En el caso $B \equiv 0$ se dice que el sistema es homogéneo*. En el caso que A es una matriz constante, se dice que el sistema es de* coeficientes constantes.

2. Sistemas Lineales en $\mathbb{R}^2$

EJEMPLO 2.1 (Polución en dos estanques). Dos estanques 1 y 2, que contienen $V[m^3]$ de agua, se encuentran interconectados por medio de un canal, por el cual fluye agua desde 1 a 2 a razón de $b[\frac{m^3}{s}]$. El sistema es alimentado a través del estanque 1 a razón de $b[\frac{m^3}{s}]$, con un poluente de concentración $\sigma[\frac{kg}{m^3}]$, que contamina el agua. El agua sale del sistema por un canal del estanque 2, con un caudal de $b[\frac{m^3}{s}]$. En esta situación se produce una contaminación del agua en ambos estanques. Para tratar de disminuir este efecto negativo, se propone añadir otro canal que conecte a los dos estanques, para que devuelva flujo de 2 a 1, a razón de $b\lambda[\frac{m^3}{s}]$, donde $\lambda > 0$. Sin embargo, para evitar el rebalse del sistema, se debe aumentar el flujo del canal ya existente a $b(1+\lambda)[\frac{m^3}{s}]$. ¿Cuánto ayuda esta solución a disminuir la polución del agua en los estanques?

Para el estanque 1, tenemos que la variación de la cantidad de poluente

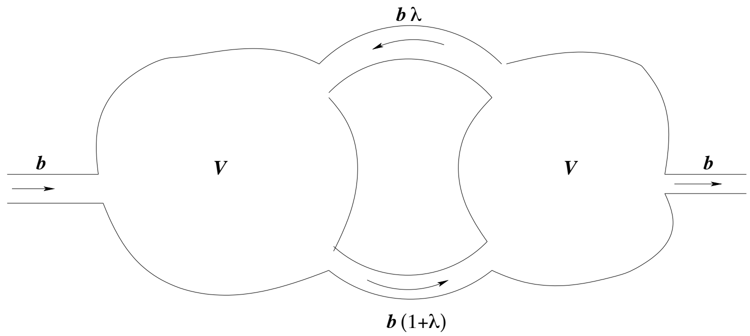

FIGURA 1. Polución en dos estanques del ejemplo 2.1

por unidad de tiempo es la diferencia de las concentraciones que entran y las que salen por unidad de tiempo, es decir:

$$x_1'\left[\frac{kg}{s}\right]=b\left[\frac{m^3}{s}\right]\ \sigma\left[\frac{kg}{m^3}\right]+b\lambda\left[\frac{m^3}{s}\right]\ x_2\,[kg]\ \frac{1}{V}\left[\frac{1}{m^3}\right]-b(1+\lambda)\left[\frac{m^3}{s}\right]\ x_1\,[kg]\ \frac{1}{V}\left[\frac{1}{m^3}\right].$$

Repitiendo el razonamiento para el estanque 2, resulta el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= b\sigma+\frac{b\lambda}{V}x_2(t)-\frac{b(1+\lambda)}{V}x_1(t)\\ x_2'(t) &= \frac{b(1+\lambda)}{V}x_1(t)-\frac{b\lambda}{V}x_2(t)-\frac{b}{V}x_2(t). \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones, por lo que se puede escribir matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V_1} & \frac{b\lambda}{V_2}\\ \frac{b(1+\lambda)}{V_1} & -\frac{b(1+\lambda)}{V_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b\sigma\\ 0\end{pmatrix}$$

Es decir, es de la forma (23), donde

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V_1} & \frac{b\lambda}{V_2}\\ \frac{b(1+\lambda)}{V_1} & -\frac{b(1+\lambda)}{V_2}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b\sigma\\ 0\end{pmatrix}, \tag{24}$$

esto es, un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden no homogéneo a coeficientes constantes.

□

Veamos algunos métodos generales para reducir un sistema lineal a coeficientes constantes a una EDO de orden superior.

Supongamos $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ (matriz constante) y $B(t)=\begin{pmatrix} b_1(t)\\ b_2(t)\end{pmatrix}$.

2.1. Método de sustitución. Para resolver el sistema,

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \tag{25}$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \tag{26}$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = x_1^0$ y $x_2(0) = x_2^0$, despejamos x_1 de (26), suponiendo $a_{21} \neq 0$, esto es

$$x_1 = \frac{x_2' - a_{22}x_2 - b_2}{a_{21}} \tag{27}$$

y luego derivamos:

$$x_1' = \frac{x_2'' - a_{22}x_2' - b_2'}{a_{21}} \tag{28}$$

Reemplazando (27) y (28) en (25) resulta:

$$x_2'' - (a_{11} + a_{22})x_2' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 + b_2',$$

que no es más que una ecuación de segundo orden, con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_2(0) &= x_2^0 \\ x_2'(0) &= a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + b_2(0) \end{aligned}$$

2.2. Método de eliminación. Utilizando la notación de operador diferencial $Dx = x'$ de la sección anterior el sistema (25) se reescribe

$$(D - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = b_1 \tag{29}$$

$$-a_{21}x_1 + (D - a_{22})x_2 = b_2 \tag{30}$$

de donde, aplicando el operador $D - a_{11}$ a la segunda ecuación, multiplicando por a_{21} la primera y sumando, se obtiene

$$(D - a_{11})(D - a_{22})x_2 - a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1 + (D - a_{11})b_2 \tag{31}$$

que es la misma EDO de orden 2 para x_2 que la obtenida con el método anterior.

2.3. Método de Transformada de Laplace. Se verá en el próximo capítulo (ver Teorema 13.1).

Observación: Puede verificar que en todos los casos, despejando x_1 o x_2, se llega a una EDO del tipo

$$x_i'' - (\underbrace{a_{11} + a_{22}}_{traza(A)})x_i' + (\underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{det(A)})x_i = f_i, \quad i = 1, 2$$

y con polinomio característico asociado $P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = \det(A - \lambda\mathcal{I})$. Se deja al lector corroborar que $P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathcal{I})$

es cierto para sistemas lineales a coeficientes constantes generales de tamaño $n \geq 1$. Aquí lo probamos para $n = 2$.

3. Vectores de Funciones

Las definiciones de la subsección anterior se pueden extender a espacios vectoriales de vectores de funciones o matrices de funciones.

DEFINICIÓN 3.1. $\mathcal{C}^n(I)^m = \underbrace{\mathcal{C}^n(I) \times \cdots \times \mathcal{C}^n(I)}_{m \text{ veces}}$ *son los vectores de m funciones n veces continuamente derivables en el intervalo* I. $\mathcal{C}^n(I)^{m \times k}$ *son las matrices de* $m \times k$ *funciones* n *veces continuamente derivables en el intervalo* I.

Estos conjuntos tambien tienen estructura de espacio vectorial para la suma y ponderacion por escalar componente a componente. La integración de elementos de estos espacios se definene de la forma

$$\int \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int f_1 \\ \vdots \\ \int f_m \end{pmatrix}$$

$$\int \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \dots & f_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int f_{1,1} & \dots & \int f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int f_{m,1} & \dots & \int f_{m,k} \end{pmatrix}$$

La derivación es análoga.

4. Existencia y Unicidad

Veamos primero la existencia y unicidad en un contexto más amplio que el de los sistemas lineales:

TEOREMA 4.1 (de Cauchy-Lipschitz, Existencia y Unicidad, caso general). *Sea* $T > 0$ *y* $I = [t_0, t_0 + T]$ *para un* $t_0 \in \mathbb{R}$ *dado. Sea* $F \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^m)$*, es decir,* $F(t, X)$ *es continua con respecto a* t *en* I *y con respecto a* X *en* $\mathbb{R}^m$*, donde* X *es un vector de* m *funciones a determinar. Sea ademas* $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^m$ *un vector de condiciones iniciales en* t_0*. Si* F *es Lipschitziana con respecto a la segunda variable, es decir, si*

$$\exists L > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall t \in I, \quad |F(t, X) - f(t, Y)| \leq L \|X - Y\|,$$

donde $\|h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} h_i^2}$ *la norma euclidiana en* $\mathbb{R}^m$*, entonces, para cada condición inicial* $X_0 \in \mathbb{R}^m$*, existe una única solución* $X \in \mathcal{C}^0(I)^m$ *del* *problema de Cauchy.*

$$X' = F(t, X(t)), t \in I \tag{32}$$
$$X(t_0) = X_0. \tag{33}$$

Para la demostración de este teorema primero escribiremos el sistema diferencial en forma integral. Luego, usaremos un operador que entregue esta forma integral y veremos que sus puntos fijos son soluciones del sistema en cuestión. Finalmente, demostraremos que la aplicación es contractante, utilizando una norma apropiada y concluiremos que tiene un único punto fijo. En realidad, esta demostración hace uso del Teorema del punto fijo, que se deduce del hecho de que toda sucesión de Cauchy es convergente. Esto es cierto en $\mathcal{C}(I)^m$ con la norma del supremo u otra similar, siempre que el intervalo I sea cerrado y acotado. Sin embargo, el Teorema resulta luego cierto para cualquier tipo de intervalo.

Demostración. El problema es de la forma $X' = f(t, X(t)), t \in I$ (forma diferencial), integrando entre t_0 y t se tiene que $X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))ds$ (forma integral). Se define el operador $\Phi : \mathcal{C}^0(I)^m \to \mathcal{C}^0(I)^m$ de la forma $X(t) \to \Phi(X) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))ds$. Se considerarán equivalentes las notaciones $\Phi(t, X)$ con $\Phi(X)$.
Un punto fijo para Φ es una función $\overline{X} \in \mathcal{C}^0(I)^m$ tal que $\forall t \in I, \Phi(t, \overline{X}) = \overline{X}(t)$, y si es única, quiere decir que hay solucion única.
Recordemos que en $\mathbb{R}$ se cumple que:

1. Toda sucesion de Cauchy es convergente.
2. Una función f es contractante en una parte cerrada $C \subset Dom(f)$ si $\exists K \in (0,1), \forall x, y \in C, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Si $f : C \to C$ es contractante con C una parte cerrada, entonces existe un único $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = x_0$.

En la demostración del Teorema de Existencia y Unicidad de utilizaremos los siguientes resultados, que son una extensión de lo anterior:

Teorema 4.2. *En el espacio $\mathcal{C}^0([t_0, t_0 + T])^m$, con la norma del supremo ($\|f\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} |f(t)|$), todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.*

Corolario 4.1. *Si Φ es contractante de constante $K \in (0, 1)$, entonces tiene un único punto fijo, que es una función de $\mathcal{C}^0([t_0, t_0 + T])^m$.*

Demostración. Es análoga al caso en $\mathbb{R}$. Tomando la sucesión (f_k) que cumple con $f_{k+1} = \Phi(f_k)$, se tiene que (f_k) es sucesión de Cauchy. Observemos primero las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|f_3 - f_2\|_\infty &= \|\Phi(f_2) - \Phi(f_1)\|_\infty \leq K\|f_2 - f_1\|_\infty \\
\|f_4 - f_3\|_\infty &= \|\Phi(f_3) - \Phi(f_3)\|_\infty \leq K\|f_3 - f_2\|_\infty \leq K^2\|f_2 - f_1\|_\infty \\
&\vdots \\
\|f_{k+1} - f_k\|_\infty &= \|\Phi(f_k) - \Phi(f_{k-1})\|_\infty \leq \cdots \leq K^{k-1}\|f_2 - f_1\|_\infty
\end{aligned}$$

Y por lo tanto para $m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_\infty &\leq \|f_n - f_{n-1}\|_\infty + \|f_{n-1} - f_{n-2}\|_\infty + \cdots + \|f_{m+1} - f_m\|_\infty \\
&\leq K^{n-2}\|f_2 - f_1\|_\infty + \cdots + K^{m-1}\|f_2 - f_1\|_\infty \\
&\leq \left(\sum_{i=m-1}^{n-2} K^i\right)\|f_2 - f_1\|_\infty
\end{aligned}$$

como $\displaystyle\sum_{i=m-1}^{n-2} K^i = \frac{K^{n-1} - K^{m-1}}{K-1} \leq \frac{K^{m-1}}{1-K} \to 0$ cuando $m \to \infty$ (pues $0 < K < 1$). Con esto, se tiene que $0 \leq \|f_n - f_m\|\infty \leq \left(\displaystyle\sum_{i=m-1}^{n-2} K^i\right)\|f_2 - f_1\|_\infty \to 0$, por lo tanto, (f_k) es una sucesion de Cauchy. Por el teorema (4.2), la sucesion (f_k) converge a un limite que llamaremos $\overline{f}$ y por lo tanto $\overline{f} = \lim f_k = \lim \Phi(f_{k-1}) = \Phi(\lim f_{k-1}) = \Phi(\overline{f})$. Las ultimas desigualdades se tienen ya que como Φ es contractante, implica que es continua en el conjunto donde es contractante. El hecho de que el conjunto C donde es contractante la función garantiza que el límite esta dentro del conjunto y que puede ser alcanzado por Φ. □

Con lo anterior se tiene que:

$$|\Phi(t, X(t)) - \Phi(t, Y(t))| = |X(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds - Y(t_0) - \int_{t_0}^t F(s, Y(s))ds|$$

como $\Phi(t, X(t)) = X(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^t F(s, X(s))ds$, la constante $X(t_0)$ debe ser fija (dato inicial X_0) para todas las funciones en $\mathcal{C}^0(I)^m$ y además, la norma pasa al interior de la integral por la propiedad $f \leq |f| \Rightarrow$

$\int f \leq \int |f| \Rightarrow |\int f| \leq |\int |f|| = \int |f|$, con lo que queda

$$\begin{aligned}
|\Phi(t,X(t)) - \Phi(t,Y(t))| &\leq \int_{t_0}^{t} |F(s,X(s)) - F(s,Y(s))ds| \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} |X(s) - Y(s)|ds \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \exp(2L(s-t_0))\left(\exp(-2L(s-t_0))|X(s)-Y(s)|\right)ds
\end{aligned}$$

definiendo $\|f\|_{\infty,L} = \sup_{t\in I} \exp(-2L(t-t_0))|f(t)|$,

$$\begin{aligned}
|\Phi(t,Y(t)) - \Phi(t,Z(t))| &\leq L\|X-Y\|_{\infty,L}\int_{t_0}^{t} \exp(2L(s-t_0))ds \\
&= L\|X-Y\|_{\infty,L}\frac{1}{2L}\left(\exp(2L(t-t_0)) - \exp(-2L)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\|X-Y\|_{\infty,L}\exp(2L(t-t_0))
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\exp(-2L(t-t_0))|\Phi(t,X(t)) - \Phi(t,Y(t))| \leq \frac{1}{2}\|X-Y\|_{\infty,L}$$

tomando el supremo sobre los $t \in I$,

$$\|\Phi(\cdot,X(\cdot)) - \Phi(\cdot,Z(\cdot))\|_{\infty,L} \leq \frac{1}{2}\|X-Y\|_{\infty,L}$$

por lo tanto $\Phi(\cdot,X(\cdot))$ es contractante. Por el Corolario (4.1), existe un único punto fijo para $\Phi(\cdot,X(\cdot))$, llamado $\overline{X}$, con lo cual $\forall t \in I, \Phi(t,\overline{X}(t)) = \overline{X}(t)$. □

Observación. 1. Se denomina a (34) *solución clásica* y a (35) *solución integral.*

$$X' = F(t,X(t)),\ X(t_0) = X_0 \tag{34}$$

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,X(s))ds \tag{35}$$

En principio, (34) y (35) no son equivalentes, pues no se sabe si X es continua por lo que (35) no se puede derivar. A posteriori, una vez que se sabe que la solucion de (35) es continua por el Teorema de Existencia y Unicidad, se sabe que la solucion de (35) es continua y derivando (35) se obtiene (34) por el TFC, siempre que F sea continua en la variable temporal. Si no es así, como ocurrirá por ejemplo en el próximo capítulo en que F

será solamente continua por pedazos en la variable temporal, entenderemos la solución de (34) en su forma integral (35).
2. Es posible hacer la misma demostración si F es sólo continua por pedazos con respecto a la segunda variable.
3. Un interesante ejemplo en que no se cumple la condición de Lipschitz global es la EDO $y' = y^2$, $y(x_0) = y_0 > 0$ que puede resolverse por separación de variables. La solución existe en un intervalo $[x_0, x_0 + 1/y_0[$ que *depende de la condición inicial* y en el borde de dicho intervalo, o sea cuando $x \to x_0 + 1/y_0$ la solución diverge. Este modelo sirve para modelar una combustión o explosión que ocurre tanto más rápidamente si mayor es la cantidad inicial y_0.

Para una EDO lineal de orden n, se tiene que

$$F(t, X) \quad = \quad A(t)X + B(t)$$

con $X(t_0)$ el vector de condiciones iniciales, y $A(t)$ y $B(t)$ de la forma explicitada en (23). La continuidad de F con respecto a la variable temporal (respectivamente continuidad por pedazos de F) es equivalente a la continuidad de $B(t)$ y $\overline{a}_{ij}(t)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ (respectivamente, a la continuidad por pedazos de estas funciones). La continuidad de F con respecto a la segunda variable es directa pues es una función lineal. La lipschitzianidad de F con respecto a la variable de estado se verifica como sigue:

$$\begin{aligned} |F(t, X(t)) - F(t, Y(t))| &\leq |A(t)(X(t) - Z(t)) + B(t) - B(t)| \\ &\leq |A(t)(X(t) - Y(t))| \end{aligned}$$

Como $|AX|^2 = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}x_j\right)^2$ y por Cauchy-Schwarz, $\left|\sum_j a_{ij}x_j\right|^2 = | < a_{i\cdot}, X > |^2 \leq \left(\sum_j a_{ij}^2\right)\left(\sum_j x_j^2\right) = \left(\sum_j a_{ij}^2\right)|X|^2$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} |F(t, X(t)) - F(t, Y(t))| &\leq |A(t)(X(t) - Y(t))| \\ &\leq \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2(t)}|X(t) - Y(t)| \\ &\leq \underbrace{\left(\sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2(t)}\right)}_{L} |X(t) - Y(t)| \\ &\leq L|X(t) - Y(t)| \end{aligned}$$

Por lo tanto la condición de tipo Lipschitz es válida si los a_{ij} son funciones acotadas en $[t_0, t_0 + T]$, lo que se tiene tanto si los a_{ij} son funciones continuas o si ellas son continuas por pedazos (siempre que restrinjamos las discontinuidades a discontinuidades de salto como será el caso en el próximo capítulo).

Teorema 4.3 (Existencia y Unicidad, caso lineal). *Si $A \in \mathcal{C}(I)^{m\times m}$ y $B \in \mathcal{C}(I)^m$, entonces dado $X_0 \in \mathbb{R}^m$ y $t_0 \in I_0$, existe una única solución $X \in \mathcal{C}^0(I)^m$ del sistema lineal:*

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t), \quad t \in I \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

tal que $X \in \mathcal{C}^0(I)^m$.

1. De hecho en el teorema anterior $X \in \mathcal{C}^1(I)^m$, pero si A o B son solamente continuas por pedazos eso no es ya cierto y X' es solo continua por pedazos.
2. El teorema precedente es válido también en los siguientes intervalos I:
   a) $[t_0, t_0 + T[$, b) $[t_0, \infty[$, c) $[t_0 - T, t_0]$, d) $[t_0 - T, t_0]$, e)$]x_0 - T, x_0]$, f) $]-\infty, x_0]$ y en el caso que x_0 sea interior al intervalo. Para a) y b) basta considerar la extensión sucesiva de la solución en intervalos $[t_0, t_0 + T - 1/n]$ ó $[t_0, t_0 + T + n]$ cuando $n \to +\infty$. Para los casos c), d) y e) hay que hacer el cambio de variables $z = t_0 - t$. Si t_0 es interior, basta separar el intervalo en dos intervalos con extremo t_0.
3. En el diagrama de fases las curvas cubren todo el espacio y no se intersectan salvo una curva que se cierra sobre sí misma o asintóticamente. Además, en los sistemas lineales existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|\tilde{X} - X\|_\infty \le C\|\tilde{X}_0 - X_0\|$, es decir, si las condiciones iniciales son parecidas, entonces las soluciones lo son.
4. Si un sistema homogéneo (EDO lineal de orden n) parte con condiciones nulas se mantiene siempre (dentro del intervalo I) en reposo.

Corolarios 4.1. (a) *Si un sistema lineal homogéneo tiene una condición inicial nula, entonces la única solución del sistema es la función nula.*

$$\left.\begin{aligned} X' &= AX \\ X(t_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(t) = 0, \ \forall t \in I$$

(b) *Si tenemos un sistema lineal con dos trayectorias que coinciden en un punto, entonces son la misma; interpretado de otra forma, dos trayectorias $X(t)$ e $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ distintas no se* *cruzan (*determinismo*).*

$$\left.\begin{array}{rcl} X' & = & A(t)X + B(t) \\ Y' & = & A(t)Y + B(t) \\ X(t_0) & = & Y(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow X(t) = Y(t),\ \forall t \in I$$

5. Sistemas Homogéneos

En ecuaciones diferenciales es habitual estudiar primero las soluciones de la parte homogénea de las ecuaciones, porque ellas entregan importante información para luego deducir las soluciones generales. Partamos entonces estudiando detenidamente los sistemas homogéneos.

Definición 5.1.

$$H = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X,\ t \in I\}.$$

Definición 5.2.

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X + B(t),\ t \in I\}.$$

Además, del Teo. de Existencia y Unicidad, sabemos que para cualquier condición inicial, el sistema lineal homogéneo tiene una única solución, en particular para la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y entonces podemos dar la siguiente definición:

Definición 5.3. *Llamaremos* ϕ_k solución fundamental canónica k-*ésima asociada a* $t_0 \in I$ *a la solución del sistema:*

$$\begin{array}{rcl} \phi_k' & = & A(t)\phi_k, \quad t \in I \\ \phi_k(t_0) & = & e_k, \quad \forall k = 1, \dots, n. \end{array}$$

A la matriz formada por las soluciones fundamentales canónicas asociada a t_0*, es decir, que en su columna* k*-ésima tiene a* ϕ_k*, se llamará* matriz canónica fundamental *asociada a* t_0*, y se denotará por* Φ

Teorema 5.1. *El conjunto* $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ *es una base de* H*, y por lo tanto,* $dim(H) = n$*.*
A esta base se le llama base fundamental canónica

Ejemplo 5.1 (Cadena con resortes). Se tiene una cadena conextrmos fijos formada por n cuentas conectadas por resortes idénticos de constante elástica k y largo natural l_0. Cada cuenta de masa m_i, $i = 1 \dots n$, tiene libertad para oscilar horizontalmente, pero cada una presenta un rozamiento lineal con el medio, de constante c_i, $i = 1 \dots n$. Para cada cuenta tenemos la ecuación de movimiento:

$$m_i x_i'' = -c_i x_i' - k[(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})], \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

donde se ha definido $x_0 = x_{n+1} = 0$.
Matricialmente tenemos:

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_{n-1} & \\ & & & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}'' =$$

$$- \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & c_{n-1} & \\ & & & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' - k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

es decir, tiene la forma

$$MX'' + CX' + KX = 0,$$

con $X \in \mathbb{R}^n$. Para transformarlo en un sistema lineal, hacemos el cambio de variables:

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} \Rightarrow Z' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix},$$

pero

$$X'' = -M^{-1}KX - M^{-1}CX'.$$

Por lo tanto, se puede escribir el sistema lineal:

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} Z.$$

Para determinar el conjunto de soluciones fundamentales asociadas, por ejemplo, al origen, bastará resolver el sistema anterior con condiciones iniciales en cada vector canónico de $\mathbb{R}^{2n}$

$$Z(0) = e_k.$$

(En total son $2n$ sistemas con condiciones iniciales a resolver). $\square$

Demostración del Teorema 5.1. Partamos probando que efectivamente es generador, es decir,

$$< \{\phi_k\}_{k=1}^n >= H.$$

Sea $X_h \in H$ la solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} X_h' &= AX_h, \quad \forall t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Descompongamos X_0 en la base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$$X_0 = x_0^1 e_1 + \cdots + x_0^n e_n, \qquad x_0^1, \ldots, x_0^n \in \mathbb{R}.$$

Demostraremos que $X_h = x_0^1\phi_1 + \cdots x_0^n\phi_n$; para esto definimos $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} Z(t) &= x_0^1\phi_1 + \cdots x_0^n\phi_n, \quad \phi_k = \phi_k(t) \\ \Rightarrow Z'(t) &= x_0^1\phi_1' + \cdots x_0^n\phi_n', \quad \text{pero } \phi_k' = A\phi_k \\ \Rightarrow Z(t) &= A(x_0^1\phi_1 + \cdots x_0^n\phi_n) = AZ(t) \end{aligned}$$

Y además, por la definición de los ϕ_k tenemos que: $Z(t_0) = x_0^1 e_1 + \cdots + x_0^n e_n$
$\therefore Z$ es solución del mismo sistema de ecuaciones diferenciales que X_h, con las mismas condiciones iniciales. Luego, por teorema de existencia y unicidad, $Z(t) = X_h(t) \quad \forall t \in I$

Observación. Notar que lo anterior demuestra también que si se tienen soluciones del sistema homogéneo, entonces cualquier combinación lineal de ellas también satisface el sistema, salvo las condiciones iniciales.

Ahora veamos que $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ son soluciones l.i.,
P.d.q.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k\phi_k(t) = 0, \ \forall t \Rightarrow \alpha_k = 0 \ \forall k = 1, ., n$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k\phi_k(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \vdots & \vdots & \phi_n \end{pmatrix}}_{\Phi} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si pudiéramos probar que $\det(\Phi(t)) \neq 0, \forall t$, entonces la única solución del sistema es $\vec{\alpha} = 0$, que era lo que hay que demostrar. Se define el Wronskiano de una familia de funciones vectoriales, justamente como el determinante de la matriz que tiene en sus columnas dichas funciones, así

$$W(\phi_1, \phi_2, .., \phi_n) = \det(\Phi)$$

Notamos también que:

$$W(t_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_n) = 1$$

Así el Wronskiano es no nulo en un punto, lo que implica que no se anula en todo el intervalo. En efecto, razonando por contradicción, supongamos que existe $\bar{t} \in I$ tal que $W(\bar{t}) = 0$, como el Wronskiano corresponde al determinate de la matriz fundamental canónica, tenemos que esta matriz tiene sus columnas l.d., es decir, $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ constantes no todas nulas, tal que:

$$\alpha_1 \phi_1(\bar{t}) + \cdots + \alpha_n \phi_n(\bar{t}) = 0$$

Pero vimos que cualquier combinación lineal de soluciones fundamentales canónicas, también es solución del sistema homogéneo, y claramente la función nula también es solución con la condición inicial impuesta en $\bar{t}$. Por lo tanto, por Teo. de Existencia y Unicidad,

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \cdots + \alpha_n \phi_n(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

lo que es una contradicción, pues en t_0 no se cumple. Luego, concluimos la independencia lineal buscada, y por tanto, $dim(H) = n$ $\square$

COROLARIO 5.1. *La solución del sistema homogéneo*

$$\begin{aligned} X_h' &= AX_h \quad \forall t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

está dada por

$$X_h = x_0^1 \phi_1 + \cdots x_0^n \phi_n,$$

o equivalentemente

$$X_h = \Phi(t) X_0.$$

COROLARIO 5.2 (Propiedades de la matriz canónica fundamental Φ asociada a t_0).
(a) $\Phi(t_0) = I_n$
(b) $\Phi'(t) = A\Phi(t)$
(c) Φ *es única.*
(d) Φ *es invertible,* $\quad \forall t \in I$

DEMOSTRACIÓN. (a) Es directa de la definición.
(b) Entendiendo la derivada en el sentido que se deriva componente a componente, se tiene que:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \vdots & \vdots & \phi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\phi_1 & A\phi_2 & \vdots & \vdots & A\phi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \vdots & \vdots & \phi_n \end{pmatrix} = A\Phi$$

(c) Se concluye por Teo. de Existencia y Unicidad aplicado al sistema formado por (b) , con las condiciones iniciales de (a).
(d) Se probó en la demostración del teorema anterior que si:

$$\exists\ t_0 \ \det(\Phi(t_0)) \neq 0 \Rightarrow \ \forall t \in I \ \det(\Phi(t)) \neq 0$$

Lo que prueba lo pedido, pues $\det(\Phi(t_0)) = 1$.

$\square$

Para generalizar los resultados anteriores, definamos una matriz fundamental (no necesariamente canónica) como la matriz $M(t) = \left[\begin{array}{cccc} \psi_1| & \psi_2| & \vdots \; \vdots & |\psi_n \end{array} \right]$, $\forall t \in I$, donde ψ son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} \psi_k' &= A(t)\phi_k, \quad t,\ t_0 \in I \\ \psi_k(t_0) &= v_k \quad ,\forall k = 1, .., n \end{aligned}$$

donde $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ es una base (no necesariamente canónica) de $\mathbb{R}^n$, y entonces concluimos el siguiente corolario:

COROLARIO 5.3. *Sea una matriz fundamental $M(t)$, entonces:*
(i) Si existe t_0 tal que $\det(M(t_0)) \neq 0$, entonces $\det(M(t)) \neq 0$, $\forall t \in I$.
(ii) Si el sistema $X' = AX$ tiene condiciones iniciales X_0 no nulas, entonces $X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0$.

DEMOSTRACIÓN. (i) Consecuencia directa.
(ii) De la observación del teorema anterior, tenemos que una combinación lineal de los ψ_i resuelve el sistema, es decir:

$$X(t) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_n\psi_n = MC$$

donde el vector $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ queda dado por las condiciones iniciales, entonces

$$X(t_0) = M(t_0)C \Rightarrow C = M(t_0)^{-1}X_0 \Rightarrow X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0$$

$\square$

6. Soluciones Particulares

Teniendo bien estudiadas las soluciones del sistema homogéneo, sólo falta encontrar las soluciones particulares, gracias a que se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1. *Dada una solución particular X_p de $X' = AX + B$, toda solución del sistema se escribe como suma de X_p y alguna solución del sistema homogéneo.*

$$X_G = X_p + X_h.$$

Demostración. Sea X_G una solución general del sistema, y X_p una particular, entonces:

$$\begin{aligned} X_G' &= AX_G + B \\ X_p' &= AX_p + B, \end{aligned}$$

restando las ecuaciones:

$$(X_G - X_p)' = A(X_G - X_p).$$

Luego $X_G - X_p$ es solución de la homogénea, es decir:

$$X_h = X_G - X_p \Rightarrow X_G = X_p + X_h.$$

□

Ahora, buscamos una fórmula de variación de parámetros, es decir, buscamos $X_p = \Phi(t)C(t)$, ecuación que podemos reemplazar en $X_p' = AX_p + B$, pero falta una fórmula para derivar productos de matrices, que se estudia en el siguiente lema:

Lema 6.1. *Sean* $A(t) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B(t) \in M_{m\times p}(\mathbb{R}),\ \ X(t) \in \mathbb{R}^n$
i) $(A(t)X(t))' = A'(t)X(t) + A(t)X'(t)$
ii) $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$

Demostración. (i) Por componentes:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\right)' &= \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(t)x_j(t))' = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}'(t)x_j(t) + a_{ij}(t)x_j'(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}'(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j'(t) \end{aligned}$$

(ii) Análogo. □

Luego, volviendo al problema de variación de parámetros, podemos reemplazar $X_p = \Phi(t)C(t)$ y derivar:

$$\begin{aligned} & X_p'(t) &= A(t)X_p(t) + B(t) \\ \Rightarrow & (\Phi(t)C(t))' &= A(t)\Phi(t)C(t) + B(t) \\ \Rightarrow & \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) &= A(t)\Phi(t)C(t) + B(t) \\ \Rightarrow & C'(t) &= \Phi^{-1}(t)B(t) \\ \Rightarrow & C(t) &= \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)ds \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_p = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)ds$, y se concluye el siguiente teorema

TEOREMA 6.2 (Variación de Parámetros). *La solución del sistema:*

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned}$$

está dado por :

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

donde Φ es la matriz fundamental canónica asociada a t_0.

7. Exponencial de una Matriz

Para calcular $\Phi(t)$ resulta útil la noción de exponencial de una matriz:

DEFINICIÓN 7.1 (Exponencial de una Matriz). *Sea $M(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La exponencial de M se define como:*

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Como estamos tratando en general con series de funciones en cada componente, es útil tener presente el siguiente lema:

LEMA 7.1 (Criterio M de Weierstrass). *Sean $f_k : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ funciones. Si existe una sucesión $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de reales positivos tales que*

$$|f_k(x)| \leq M_k, \forall n > n_0,\ \forall x \in S,$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente en S.

DEMOSTRACIÓN. Como $|f_k(x)| \leq M_k, \forall n > n_0,\ \forall x \in S$, por criterio de comparación de series tenemos que para cada $x \in S$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge (convergencia puntual). Definamos entonces $g : S \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.
Sean $m > n > n_0$, hagamos la diferencia

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k = \sum_{k=1}^{m} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, podemos tomar límite $m \to \infty$:

$$\left|g(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

Pero como la serie de los M_k converge, tenemos que:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > n_0,\ \forall n \geq N,\ \left| g(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \epsilon,\ \forall x \in S.$$

Recordando que $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, se tiene la convergencia uniforme.

□

TEOREMA 7.1. *Si las componentes de la matriz $M(t)$ están uniformemente acotadas en un intervalo I, entonces cada componente de $e^{M(t)}$ converge uniformemente en I.*

DEMOSTRACIÓN. P.d.q. $(e^{M(t)})_{ij}$ converge uniformemente en I. Tenemos por definición que

$$(e^{M(t)})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}.$$

Esto es una serie de funciones, por lo que para demostrar la convergencia uniforme usaremos el criterio M de Weierstrass. Veamos que, como cada componente está uniformemente acotada en I, se tiene:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} :\ \forall i, j\ \ |(M(t))_{ij}| \leq \alpha, \forall t \in I.$$

Luego,

$$\forall i, j\ \ \left|(M^2)_{ij}\right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} (M)_{ik}(M)_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |(M)_{ik}||(M)_{kj}| \leq \alpha^2 n$$

Así, por inducción, se tiene:

$$\forall k > 0\ \forall i, j\ \ \left|(M^k)_{ij}\right| \leq \alpha^k n^{k-1}, \forall t \in I.$$

De esta forma encontramos una cota para los términos de la serie independiente de t

$$\forall k > 0\ \forall i, j\ \ \left| \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!} \right| \leq \alpha^k n^{k-1}, \forall t \in I.$$

Sólo falta ver que la serie se estas cotas converge, en efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} &= \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha^k n^k}{k!} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto converge, incluso sabemos cuando vale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} = \frac{e^{\alpha n}}{n} - \frac{1}{n}$$

Finalmente, por criterio M de Weierstras, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}$$

converge uniformemente en I, y por tanto lo hace también

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}.$$

$\square$

Algunas propiedades de la exponencial de una matriz, son:

PROPIEDADES 7.1. *Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices constantes, $t, s \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. $e^{0\cdot t} = I$
2. $e^{A\cdot 0} = I$
3. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$
4. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$
5. e^{At} *es invertible, y* $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
6. $AB = BA \Leftrightarrow Be^{At} = e^{At}B$
7. $AB = BA \Leftrightarrow e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

DEMOSTRACIÓN. Las propiedades 1) y 2) son directas de la definición.
3) Notamos que en cada intervalo $[-b, b]$, $b \in \mathbb{R}$, las componentes de la matriz At están uniformemente acotadas por $|\max(a_{ij})||b|$, luego tenemos la convergencia uniforme de $h_p(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(A^k)_{ij}t^k}{k!}$, es decir, tenemos la convergencia de la serie de potencias $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij}t^k}{k!}$, por lo que sabemos que h_p converge uniformemente a h, y la sucesión $h_p'(t) = \sum_{k=1}^{p} k\frac{(A^k)_{ij}t^{k-1}}{k!}$ converge uniformemente en $(-b, b)$ a $\sum_{k=1}^{p} k\frac{(A^k)_{ij}t^{k-1}}{k!}$ y principalmente que $h(t)$ es derivable y que

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(A^k)_{ij}t^{k-1}}{k!}, \ \forall t \in (-b, b),$$

pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(A^k)_{ij}t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^{k+1})_{ij}t^k}{k!} = (A^k)_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij}t^k}{k!}.$$

En conclusión,

$$\frac{d}{dt}(e^{At})_{ij} = A_{ij}(e^{At})_{ij} \ \forall t \in (-b, b),$$

y dado que b era arbitrario, se tiene el resultado para todo $t \in \mathbb{R}$.
4) Para cada s fijo, tomamos la función

$$\psi(t) = e^{A(t+s)} - e^{At}e^{As},$$

de este modo

$$\psi(0) = 0$$

y

$$\psi'(t) = Ae^{A(t+s)} - Ae^{At}e^{As} = A\psi(t)$$

Luego por Teo. de Existencia y Unicidad,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = 0 \ \Rightarrow \forall t, s \in \mathbb{R}\ e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}.$$

5) De 4) sabemos que

$$e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = I \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

6) Por inducción, es fácil ver $AB = BA \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\{0\},\ A^kB = BA^k$, pues

$$\begin{array}{rcl} A^kB & = & BA^k \quad / \cdot A \\ A^{k+1}B & = & ABA^k \quad \text{ pero } AB = BA \\ A^{k+1}B & = & BAA^k \\ A^{k+1}B & = & BA^{k+1}. \end{array}$$

Para la otra implicancia basta tomar $k = 1$. Ahora:

$$Be^{At} = B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{BA^kt^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}\cdot B = e^{At}B.$$

7) Análogamente a 4) tomamos la función

$$\psi(t) = e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t},$$

que cumple con

$$\psi(0) = 0,$$

y

$$\begin{array}{rcl} \psi'(t) & = & Ae^{At}e^{Bt} + \underbrace{e^{At}B}e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} \\ & \underbrace{=}_{\text{por 6)}} & Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} \\ & = & (A+B)(e^{At}e^{Bt} - e^{(A+B)t}) = (A+B)\psi(t), \end{array}$$

es decir, tenemos:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (A+B)\psi(t) \\ \psi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos por Teo. de Existencia y Unicidad, que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \psi(t) = 0.$$

□

Las propiedades anteriores entregan mucha información sobre las soluciones de sistema lineales a *coeficientes constantes*.
De 2) y 3) vemos que $e^{A(t-t_0)}$ cumple el mismo sistema que la matriz fundamental canónica asociada a t_0, entonces, por Teo. de Existencia y Unicidad:

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}, \quad \forall t \in I$$

Luego, recordando que en un sistema lineal cualquiera, la solución está dada por:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

en términos de la matrix exponencial queda:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

El problema ahora se reduce sólo al cálculo de la matriz exponencial, para esto nos ayudarán las propiedades anteriores, y la forma de la matriz A, en el sentido de si es o no diagonalizable.

7.1. Caso diagonalizable. En el caso de que A sea diagonalizable, por ejemplo, en los casos en que A es simétrica ($A^t = A$), antisimétrica ($A^t = -A$), o normal ($AA^t = A^tA$), A se que puede escribir de la forma $A = PDP^{-1}$, con D, matriz diagonal formada por los valores propios de A, y P una matriz que tiene en sus columnas los vectores propios respectivos. De esta forma tenemos, que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A, y $v_1, \ldots, v_n$ sus respectivos vectores propios:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad P = \left(\, v_1 \mid \;\; v_2 \mid \;\; \cdots \;\; \mid v_n \, \right),$$

entonces

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k t^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!}\right)P^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1},$$

donde

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma la solución del sistema homogéneo se puede escribir como:

$$X_h(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 = Pe^{Dt}e^{-Dt_0}P^{-1}X_0 = Pe^{Dt}C,$$

donde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ es un vector constante que depende de las condiciones iniciales. O bien, desarrollando las matrices, tenemos:

$$\begin{aligned} X_h(t) &= \left(e^{\lambda_1 t}v_1 \mid e^{\lambda_2 t}v_2 \mid \cdots \mid e^{\lambda_n t}v_n \right) C \\ &= c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}v_n. \end{aligned}$$

Para aplicar todo esto, veamos un

Ejemplo 7.1 (Confort de un auto). Un modelo para estudiar el confort de un auto está dado por

$$x'' = -(k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\theta$$

$$\theta'' = (k_1L_1 - k_2L_2)x - (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta,$$

donde las constantes k_1, k_2, L_1 y L_2 son respectivamente las rigideces y las distancias de los amortiguadores traseros y delanteros al centro de masas G del auto. En un instante $t > 0$, $x(t)$ representa la posición vertical de G y $\theta(t)$ el giro del auto en torno a G.

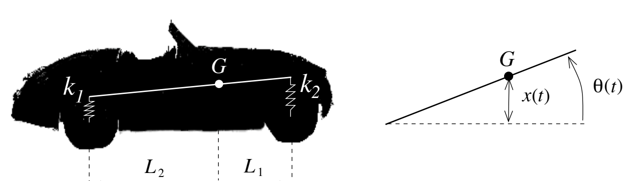

Figura 2. Modelamiento de los amortiguadores de un auto del ejemplo 7.1

Este sistema de orden 2, lo llevamos a un sistema lineal tomando la variables: x, θ, x', θ', resultando:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1+k_2) & k_1L_1 - k_2L_2 & 0 & 0 \\ k_1L_1 - k_2L_2 & -(k_1L_1^2 + k_2L_2^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue supondremos que $k_2 = \mu k_1$ y $L_1 = \mu L_2$, donde $0 < \mu < 1$, pues generalmente el G de los autos está hacia delante del auto, debido al peso del motor. De esta forma se anulan los términos de acoplamiento $k_1L_1 - k_2L_2$. Si para simplificar notación llamamos k a k_1 y L a L_2, resulta el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}, \text{ donde } a = -(1+\mu)k \text{ y } b = -\mu(1+\mu)kL^2.$$

Dado que tenemos la forma $X' = AX$, podemos calcular la exponencial de la matriz. Para esto analicemos cómo son la potencias de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix};$$

luego, elevando a k:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix},$$

y si multiplicamos por A, queda:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo todas las potencias calculadas, procedemos a determinar la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si tomamos $a = -\alpha^2$ y $b = -\beta^2$, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\beta t), \end{aligned}$$

y de la mima manera:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\beta} \sin(\beta t). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta t) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta}\sin(\beta \\ -\alpha\sin(\alpha t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\sin(\beta t) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ponemos alguna condición inicial, como por ejemplo una frenada, representada por:

$$x(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad \theta'(0) = -1,$$

y reemplazamos en la formúla obtenida para sistema a coeficientes constantes, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \\ -\frac{\sin(\beta t)}{\beta} \\ -\cos(\alpha t) \\ -\cos(\beta t) \end{pmatrix},$$

es decir, la solución del movimiento es:

$$x(t) = \frac{-\sin(\alpha t)}{\alpha}, \qquad \theta(t) = \frac{-\sin(\beta t)}{\beta},$$

con $\alpha = \sqrt{(1+\mu)k}$ y $\beta = L\sqrt{\mu(1+\mu)k}$, que físicamente representan la frecuencia de cada modo. Otro método para solucionar este problema es analizar los valores y vectores propios del sistema.
Calculemos los valores propios de A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & b & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - a)(\lambda^2 - b).$$

En términos de las variables antes definidas quedan los valores propios imaginarios puros:

$$\lambda_1 = i\alpha, \quad \lambda_2 = -i\alpha, \quad \lambda_3 = i\beta, \quad \lambda_4 = -i\beta,$$

que tienen asociados respectivamente los vectores propios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la solución general será:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o bien,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} &= c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \end{pmatrix} \\ &= (ic_2 e^{-i\alpha t} - ic_1 e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + (ic_4 e^{-i\beta t} - ic_3 e^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aquí se ve que el movimiento del sistema se expresa fundamentalmente sólo como el movimiento vertical de G (representado en el vector $(1/\alpha, 0)$ y separadamente la rotación del eje que une los resortes, en torno a G, representado en el vector $(0, 1/\beta)$, y por tanto la solución general del sistema no es más que la combinación lineal de estos dos movimientos fundamentales llamados modos propios. Los valores propios cuando son imaginarios puros, representan la frecuencia natural de cada modo propio, en este caso al modo de movimiento vertical

$(1/\alpha, 0)$ tiene asociado la frecuencia propia $w = \alpha$. Una aplicación del conocimiento de este valor es que si se deseara tener un fenómeno de resonancia, bastaría aplicar una fuerza externa sinusoidal sobre el auto con esta misma frecuencia ($F = F_0 \sin(\alpha t)$, F_0 constante). La misma interpretación se tiene para la frecuencia β en el modo $(0, 1/\beta)$. Para comprobar que este método entrega la misma solución que la exponencial de la matriz, impongamos las mismas condiciones iniciales, para determinar las constantes:

$$\begin{aligned} -c_1 + c_2 \quad &= 0 \\ -c_3 + c_4 \quad &= 0 \\ \tfrac{-i}{\alpha} c_1 + c_2 \tfrac{-i}{\alpha} \quad &= -1 \\ \tfrac{-i}{\beta} c_3 + c_4 \tfrac{-i}{\beta} \quad &= -1 \quad , \end{aligned}$$

de donde se obtiene $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -\frac{1}{2}$, por tanto:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2}(-e^{-i\alpha t} + e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(-e^{-i\beta t} + ie^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix};$$

recordando la identidad $e^{is} - e^{-is} = 2i\sin(s)$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = -\sin(\alpha t) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(\beta t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix},$$

que es el mismo resultado antes obtenido. □

7.2. Caso no diagonalizable. Si A es una matriz cuadrada cualquiera (en particular no diagonalizable) siempre existe una descomposición dada denominada *Forma canónica de Jordan* que estudiaremos a continuación, aunque sólo se enunciarán los resultados, puesto que estas propiedades forman parte de los resultados clásicos del álgebra lineal, y su demostración es bastante extensa. La demostración de éstas se pueden consultar en el libro *The Theory of Matrices*, de Peter Lancaster.

DEFINICIÓN 7.2. *Se llama* Bloque de Jordan *de tamaño $k \times k$ y valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ a la matriz $B \in M_{k\times k}(\mathbb{C})$ dada por:*

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se llama suprabloque de Jordan *de tamaño $m \times m$ y valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ a matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es un bloque de Jordan de diversos o iguales tamaños, todos con el mismo valor propio λ.*

Una matriz se dice Forma canónica de Jordan *si es diagonal por bloques, formada por uno o más suprabloques de Jordan.*

Ejemplo 7.2. Una matriz formada por un suprabloque de Jordan de tamaño 2 formado por dos bloques de Jordan de valor propio 8; un suprabloque de Jordan de tamaño 3 formado por dos bloques de Jordan de valor propio 3, y un suprabloque de tamaño 1 de valor propio 4 es una forma de Jordan.

$$\begin{pmatrix} \boxed{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}.$$

Proposición 7.1. *Sea λ valor propio de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ de multiplicidad algebraica m. Sea $E_s = \ker(A - \lambda I)^s$, $s \in \mathbb{N}$, entonces existe p, $1 \leq p \leq m$, tal que:*

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots E_p = E_{p+1} = E_{p+2} = \cdots .$$

Definición 7.3. *Los espacios E_s, $1 \leq s \leq p$, de la Proposición (7.1) se denominan* espacios propios generalizados de A de orden s *asociados al valor propio λ.*
Un elemento no nulo v tal que $v \in E_s$ y $v \notin E_{s-1}$ se dice vector propio generalizado de A de orden s.

Observación: Con la definición anterior, los vectores propios usuales son vectores propios generalizados de orden 1.

Proposición 7.2. *v_s es un vector propio generalizado de A de orden s ($s \geq 2$) asociado a λ si y sólo si $v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s$ es un vector propio generalizado de A de orden $s-1$ asociado a λ.*

De la proposición (7.2) tenemos que si tomamos v_s (vector propio generalizado de orden s), entonces v_{s-1} dado por

$$v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s \Leftrightarrow Av_s = \lambda v_s + v_{s-1}$$

es un vector propio generalizado de orden $s-1$, y así recursivamente tenemos definidos:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= \lambda v_2 + v_1 \\ Av_3 &= \lambda v_3 + v_2 \\ &\vdots \\ Av_s &= \lambda v_s + v_{s-1}, \end{aligned}$$

donde v_1 es el vector propio usual.
Una cadena $v_1, v_2, \ldots, v_s$ así construida, se denomina *cadena de Jordan de largo* s, cuando es maximal, es decir, $s = p$ o si $s < p$, entonces el problema

$$(A - \lambda I)v = v_s$$

no tiene solución con v vector propio generalizado de orden $s+1$.
La cadena también se denomina como cadena asociada al vector propio v_1.

Proposición 7.3. *Los elementos de una cadena de Jordan son linealmente independientes.*

Proposición 7.4. *El número k_s de cadenas de Jordan de largo s es*

$$k_s = 2l_s - l_{s-1} - l_{s+1},$$

donde $l_s = \dim\ker(A - \lambda I)^s$.

Teorema 7.2 (Descomposición de Jordan). *Para toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, existe una Forma de Jordan J asociada, y una matriz P invertible tal que:*

$$A = PJP^{-1}.$$

Además, la matriz J es única, salvo permutaciones de sus bloques.

Observación: Para construir la descomposición se puede proceder de la siguiente manera:

- Se calculan los valores propios de A.
- Se toma un valor propio λ de multiplicidad algebraica m, y se determina la dimensión de los espacios $\ker(A - \lambda I)^s$, aumentando s hasta m.
- Se calculan los k_s, de donde se obtiene un bloque de Jordan de tamaño k_s asociado a cada cadena, y los respectivos valores propios generalizados asociados determinan la matriz P.

Ejemplo 7.3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A tiene valores propios $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica 4. De esta forma sabemos que la matriz J estará formada por dos suprabloques, uno asociado a cada valor propio.
Para λ_1, como tiene multiplicidad 1, sólo le correponderá un bloque de Jordan de tamaño 1, y tomamos como vector propio asociado $(0, 1, 1, 0, 0)$.
Para λ_2 calculamos:

$$\begin{aligned} l_1 &= \dim\ker(A - I) = 2 \\ l_2 &= \dim\ker(A - I)^2 = 4 \\ l_3 &= \dim\ker(A - I)^3 = 4 \\ l_s &= \dim\ker(A - I)^s = 4, \forall s > 3. \end{aligned}$$

Como $l_0 = 0$, tenemos que $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$, por lo que no hay cadenas de largo 1, pero hay 2 cadenas de largo 2. Cada cadena de largo 2 determina un bloque de 2×2, por lo que tenemos completamente determinada la matriz J

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para λ_2 tenemos:

$$\begin{aligned} (A - I)v_1 = 0 &\Rightarrow v_1 = (\alpha, \alpha, 0, \beta, \beta) \\ (A - I)v_2 = v_1 &\Rightarrow v_2 = (\beta + \gamma, \gamma, \alpha, \alpha + \delta, \delta). \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow v_1 = (0, 0, 0, 1, 1) \Rightarrow v_2 = (1 + \gamma, \gamma, 0, \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$.
Si $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 1, 0, 0, 0) \Rightarrow v_2 = (\gamma, \gamma, 1, 1 + \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$.

De esta forma

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Para el cálculo de e^{At} en el caso general veamos la siguiente propiedad:

Proposición 7.5. *Sea $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ diagonal por bloques de la forma*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix},$$

M_i bloque de M, entonces

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Recordemos que las matrices por bloques se pueden multiplicar como si los bloques fueran escalares

$$M^2 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, por inducción, $M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix}$, aplicando esto a la matriz exponencial:

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{M_1^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{M_2^k}{k!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{M_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

□

Calculemos ahora: $e^{J_i t} = e^{(\lambda_i I_m + N)t}$, donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

(m es la multiplicidad del valor propio λ_i).
Claramente $\lambda_i I_m$ y N conmutan, entonces

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i I_m t + Nt} = e^{\lambda_i I_m t} e^{Nt}.$$

Sabemos que $e^{\lambda_i I_m t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$, pero falta conocer propiedades sobre N; para esto veamos las potencias de N:

$$\begin{aligned}
N^0 &= I \\
N^1 &= N \\
N^2 &= N \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
N^{m-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
N^m &= 0_m.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, N es una matriz nilpotente de orden m, y tenemos que

$$\begin{aligned}
e^{Nt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k t^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{N^k}_{=0} \\
&= I + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En conclusión, e^{Nt} es una matriz triangular superior de la forma

$$[e^{Nt}]_{ij} = \begin{cases} \frac{t^k}{k!} & \text{si} \quad j - i = k \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad j - i < 0 \end{cases}.$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
e^{J_i t} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

De esta forma hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 7.6. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, y su descomposición en forma canónica de Jordan $A = PJP^{-1}$, entonces:*

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ejemplo 7.4. Consideremos el sistema:

$$X' = AX,$$

con condición inicial $X(0) = X_0$, donde la matriz A está dada en el ejemplo (7.3). Luego como ya habíamos calculado su descomposición canónica de Jordan , se tendrá en virtud de la proposición anterior que la solución es:

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0,$$

con P descrita en ejemplo (7.3).

□

Ejemplo 7.5 (Equilibrio Marino). Suponga que la población de ballenas b, plancton p y temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y $\lambda > 0$ es un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} &= \lambda T_n, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales b_0, p_0, T_0 constantes positivas.
Se quiere saber cómo evoluciona este sistema en el tiempo, dependiendo del parámetro λ. Para esto, escribamos el sistema anterior se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ p_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ p_n \\ T_n \end{pmatrix}, \quad \text{con condición inicial} \begin{pmatrix} b_0 \\ p_0 \\ T_0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos primero un caso más general de sistemas discretos:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0,$$

con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^d$, donde $A \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$, $B_n \in \mathbb{R}^d$, $n \geq 0$. Como X_0 es la condición inicial, iterando tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 + B_0 \\ X_2 &= AX_1 + B_1 = A(AX_0 + B_0) + B_1 = A^2X_0 + AB_0 + B_1 \\ X_3 &= AX_2 + B_2 = A^3X_0 + A^2B_0 + AB_1 + B_2 \\ &\vdots \\ X_n &= A^nX_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{n-j}B_{j-1}. \end{aligned}$$

Probemos por inducción que efectivamente la solución del sistema está dada por:

$$X_n = A^nX_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{n-j}B_{j-1}, \quad n \geq 1$$

Para $n = 1$, resulta

$$X_1 = AX_0 + B_0,$$

que es solución del sistema. Suponemos ahora que $X_n = A^nX_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{n-j}B_{j-1}$ satisface el sistema propuesto, entonces hay que probar que

$$X_{n+1} = A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1}$$

también lo satisface. En efecto,

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1} \\
&= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{n+1-j}B_{j-1} + A^{n+1-(n+1)}B_{(n+1)-1} \\
&= A^{n+1}X_0 + A\sum_{j=1}^{n} A^{n-j}B_{j-1} + I_{d\times d}B_n \\
&= A\left(A^nX_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{n-j}B_{j-1}\right) + B_n, \text{ usando la hipótesis de inducción} \\
&= AX_n + B_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, X_{n+1} satisface el sistema.
Estudiemos ahora la solución del sistema discreto homogéneo, para el caso en que A sea diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}, \text{ donde } \lambda_1, \ldots \lambda_d \text{ son los valores propios de } A.$$

Según lo anterior, la solución de este sistema será: $X_n = A^nX_0$, pero $A^n = PD^nP^{-1}$, entonces:

$$X_n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d^n \end{pmatrix}P^{-1}X_0.$$

De esta forma si queremos que nuestro problema tenga solución, es decir que exista $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$, debemos imponer que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^n$ exista $\forall k = 1, \ldots, d$, lo que equivale a pedir que $|\lambda_k| < 1$, $\forall k = 1, \ldots, d$.
Si volvemos al problema específico de las ballenas, estamos en el caso de un sistema homogéneo discreto, pero donde la matriz A no es diagonalizable (tiene la forma de un bloque de Jordan), sin embargo, sigue siendo válida la solución $X_n = A^nX_0$, entonces sólo resta calcular A^n. Para esto usaremos la siguiente propiedad:

$$AB = BA \Rightarrow (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k}, \forall n \geq 0,$$

es decir, si la matrices conmutan, se tiene la propiedad del Binomio de Newton, y la demostración de esto es idéntica a la del Binomio original (por inducción). En este caso podemos usar esta fórmula, pues claramente

$$\lambda I_d N = \lambda N = N\lambda = N\lambda I_d.$$

Luego:

$$A^n = (\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k I^k N^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k},$$

con N una matriz nilpotente de orden 3, pero $N^{n-k} = 0$ cuando $n-k \geq 3 \Rightarrow n-3 \geq k$, luego la suma sin los términos nulos queda:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=n-2}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-2} \lambda^{n-2} N^2 + \binom{n}{n-1} \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n\lambda^{n-1} N + \lambda^n. \end{aligned}$$

En el desarrollo sobre las formas de Jordan, habíamos calculado todas las potencias de una matriz nilpotente, resulta entonces:

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n\lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n\lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^n \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma vemos que se repite la solución que teníamos para el caso diagonalizable: independiente de la condiciones iniciales, nuestro modelo indica que cuando $n \to \infty$, si $|\lambda| > 1$, el sistema diverge, es decir las poblaciónes de ballenas y plancton se expanden indefinidamente, al igual que la temperatura, mientras que si $|\lambda| < 1$, las poblaciones se extinguen y la temperatura del mar desciende a 0. En el caso crítico $|\lambda| = 1$ se tiene que las poblaciones animales divergen, pero con temperatura constante del mar T_0. $\square$

CAPíTULO 5

Transformada de Laplace

1. Introducción

DEFINICIÓN 1.1. *Dada* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *se llama transformada de Laplace de* f *a la función*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{36}$$

que asocia a $s \in \mathbb{R}$ *el valor* $\mathcal{L}[f](s)$ *cuando la integral converge. Si la transformada de Laplace de una función existe para* $s > c$*, a la mínima cota "c" se le llama asíntota de la transformada.*

Veamos algunos ejemplos para funciones conocidas:

EJEMPLO 1.1. $f(t) = 1$, $\mathcal{L}[1](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} 1 dt$. Veamos para que valores de s la transformada existe:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[1](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\
&= \begin{cases} \left. \dfrac{-1}{s} e^{-st} \right|_0^{+\infty} & s \neq 0 \\ \left. t \right|_0^{+\infty} & s = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{s} & s > 0 \\ +\infty & s = 0 \\ -\infty & s < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{L}[1](s) = \dfrac{1}{s}$ existe si $s > 0$ (la asíntota de convergencia es $c = 0$).

Ejemplo 1.2. $f(t) = e^{at}$ con $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt \\
&= \begin{cases} t & s = a \\ \dfrac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{+\infty} & s \neq a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{s-a} & s > a \\ +\infty & s = a \\ -\infty & s < a \end{cases}
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$ existe si $s > a$ (la asíntota de convergencia es $c = a$).

Ejemplo 1.3. $f(t) = \cos wt$, $\mathcal{L}[\cos wt](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos wt dt$ (recordemos que $\cos wt + i \operatorname{sen} wt = e^{iwt}$ y que $\Re(e^{iwt}) = \cos wt, \Im(e^{iwt}) = \operatorname{sen} wt$ son la parte real e imaginaria de e^{iwt} respectivamente) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos wt](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos wt dt \\
&= \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(-s+iw)t} dt\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{-s+iw} e^{(-s+iw)t} \Big|_0^{+\infty}\right) \\
&= e^{-st} \Re\left(\frac{\cos wt + i \operatorname{sen} wt}{-s+iw}\right) \Big|_0^{+\infty} \\
&= e^{-st} \Re\left(\frac{(\cos wt + i \operatorname{sen} wt)(-s-iw)}{s^2+w^2}\right) \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{s^2+w^2} e^{-st} (-s \cos wt + w \operatorname{sen} wt) \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{s}{s^2+w^2}, \forall s > 0
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{L}[\cos wt](s) = \dfrac{s}{s^2+w^2}$ existe si $s > 0$.

PROPIEDAD 1.1. *$\mathcal{L}$ es lineal, es decir, $\forall f, g$ funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ tales que $\mathcal{L}[f](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ existen y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que:*

- $\mathcal{L}[f+g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s)$.
- $\mathcal{L}[\lambda f](s) = \lambda \mathcal{L}[f](s)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\displaystyle\int$ es un operador lineal para las funciones integrables, se tiene la linealidad de $\mathcal{L}$. □

EJEMPLO 1.4. $f(t) = \cosh(t)$. Como $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cosh(t)](s) &= \mathcal{L}[\frac{e^t + e^{-t}}{2}](s) \\
&= \mathcal{L}[\frac{e^t}{2}](s) + \mathcal{L}[\frac{e^{-t}}{2}](2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^t](s) + \mathcal{L}[e^{-t}](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-1}\right) \\
&= \frac{s}{s^2-1}
\end{aligned}$$

como $\mathcal{L}[e^t](s)$ existe para $s > 1$ y $\mathcal{L}[e^{-t}](s)$ existe para $s > -1$, se tiene que $\mathcal{L}[\cosh(t)](s)$ existe para $s > 1$ (asíntota de convergencia $c = 1$).

2. El espacio $\mathcal{C}_\alpha$

DEFINICIÓN 2.1. *Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a \in \mathrm{Dom}(f)$ si los límites laterales $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existen (distintos de $-\infty$ o ∞) y son distintos.*

DEFINICIÓN 2.2. *Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0, +\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0, +\infty)$ tiene a lo más un número finito de discontinuidades de salto.*

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 2.1. La función $f(t) = (-1)^{[t]}$ o $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \wedge t < 1 \\ -1 & 1 \le t \wedge t < 2 \end{cases}$ con período 2, llamada onda cuadrada es continua por pedazos.

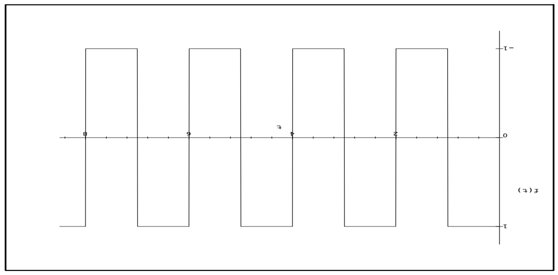

FIGURA 1. Gráfico de la onda cuadrada.

EJEMPLO 2.2. La función $f(t) = t - [t]$ o $f(t) = t, 0 \leq t < 1$ con período 1, llamada onda de dientes de sierra es continua por pedazos.

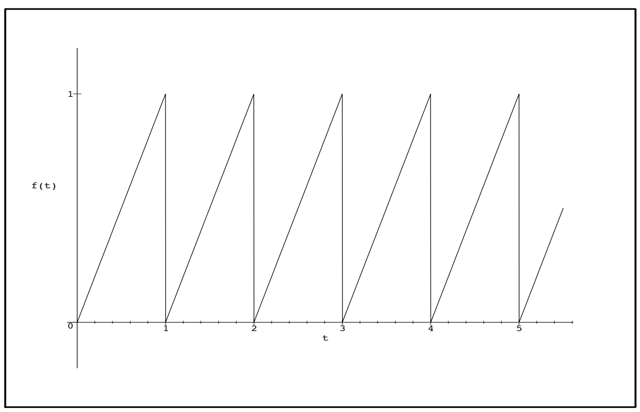

FIGURA 2. Gráfico de la onda de dientes de sierra.

EJEMPLO 2.3. La función $f(t) = \tan(t)$ no es continua por pedazos pues $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty$ y $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty$.

EJEMPLO 2.4. La función $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ no es continua por pedazos pues $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$ y $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{1}{t} = 0$.

DEFINICIÓN 2.3. *Una función* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es de orden exponencial si* $\exists \alpha, M \in \mathbb{R}_+, |f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}$. *Al valor* $\inf\{\alpha : \exists M \in \mathbb{R}_+, |f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}\}$ *se le llama* orden exponencial *de* f. *Gráficamente,* *el hecho de tener orden exponencial significa que la función, en valor absoluto, no puede crecer más rápido que $M\,e^{\alpha t}$.*

Definición 2.4. *El espacio $\mathcal{C}_\alpha$ se define como*

$$\mathcal{C}_\alpha = \{f : [0,+\infty) \to \mathbb{R} : \\ f \text{ es continua por pedazos en } [0,+\infty) \text{ y de orden exponencial } \alpha\}.$$

Propiedad 2.1. *$\mathcal{C}_\alpha$ es un subespacio vectorial de $\{f|\ f$ es función de $[0,+\infty)$ en $\mathbb{R}\}$*

Demostración. La demostración es fácil y queda propuesta al lector. □

Propiedad 2.2. *Si $f' \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces $f \in \mathcal{C}_\alpha$.*

Demostración. Propuesta. □

Propiedad 2.3. *Si $f \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $\mathcal{L}[f](s)$ (y converge absolutamente) y además*

$$|\mathcal{L}[f(t)](s)| \leq \frac{C}{s-\alpha}, \forall s > \alpha$$

de modo que $\lim\limits_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) = 0$.

Demostración. Recordemos que si la integral converge absolutamente, entonces converge. Con esto se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}[f(t)](s)| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)|dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st}|f(t)|dt \\
&\leq C\int_0^{\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt \\
&\leq C\int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt \\
&\leq C\frac{1}{-s+\alpha}e^{(-s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty} \\
&\leq \frac{C}{s-\alpha}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio Propuesto 2.1. Demostrar que $t^k, k \in \mathbb{N}$, tiene transformada de Laplace y que $\mathcal{L}[t^k](s) = \dfrac{k!}{s^{k+1}}, s > 0$.

3. Funciones especiales

3.1. Escalón de Heaviside. La funcíon escalón de Heaviside se define como

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

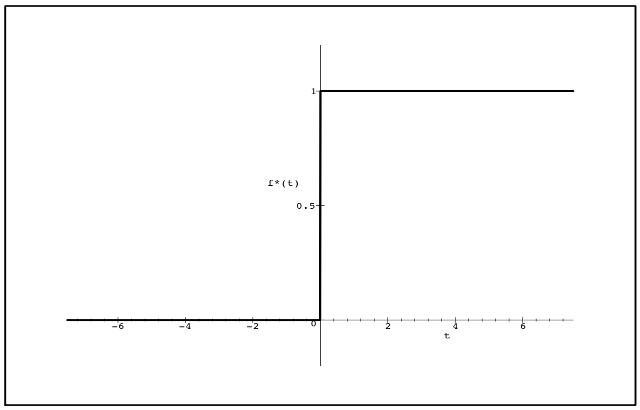

FIGURA 3. Escalón de Heaviside con $a = 0$.

Como $H_0(t)$ representa el escalón de Heaviside con $a = 0$, la representación de $H_a(t)$ con $a > 1$ es $H_0(t - a)$. La transformada de Laplace de H_a, con $a \geq 0$ es $\mathcal{L}[H_a(t)](s) = \dfrac{1}{s}e^{-as}$, para $s > 0$ (verificar) (para $a = 1$ se obtiene $\mathcal{L}[1](s)$).

3.2. Pulso entre a y b. Se define como $P_{ab}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b \end{cases}$, con $a < b$. Notar que $P_{ab}(t) = H_a(t) - H_b(t)$. Luego, su transformada de Laplace para $0 \leq a < b$ será $\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t) - H_b(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t)](s) - \mathcal{L}[H_b(t)](s)$ (por linealidad del operador) por lo tanto $\mathcal{L}[P_a b(t)](s) = \dfrac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$, para $s > 0$.

3.3. Delta de Dirac.

DEFINICIÓN 3.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, se define la función $f_n(t) = nP_{0\frac{1}{n}}(t)$, con $nP_{0\frac{1}{n}}(t) = n(H_0(t) - H_{\frac{1}{n}}(t))$, es decir,* $f_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n & 0 \leq t < \dfrac{1}{n} \\ 0 & t \leq \dfrac{1}{n} \end{cases}$.

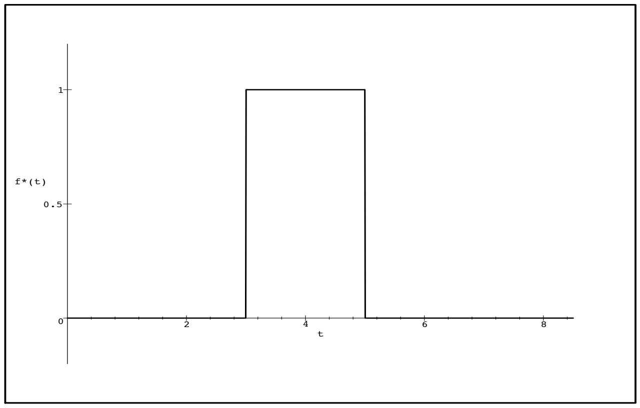

FIGURA 4. Pulso entre $a = 3$ y $b = 5$.

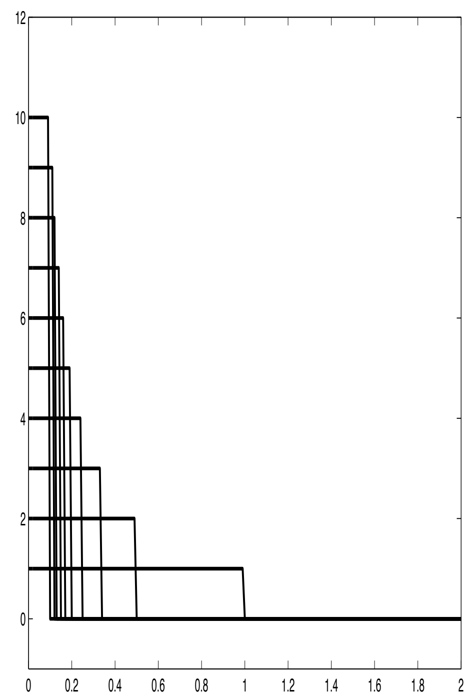

FIGURA 5. Distintas funciones f_n.

Las funciones f_n cumplen con las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 3.1. *Sea f una función continua en* 0.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)f(x)dx = f(0)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{-a} f_n(x)f(x)dx = 0$, *con* $a > 0$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{a}^{+\infty} f_n(x)f(x)dx = 0$, *con* $a > 0$.

Definición 3.2. *La Delta de Dirac* $\delta(t)$ *se define como el "límite"de las funciones* f_n *anteriores, esto es, un cierto operador cumpliendo la propiedad fundamental* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$ *para funciones* f *continuas en el origen. Extendiendo la definición, se tiene que, dado* $a \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt = f(a)$ *para* f *continua en* a.

De la propiedad fundamental de δ tomando $f(t) = 1$, se tiene

Proposición 3.1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$

Del mismo modo, tomando $f(t) = e^{-st}$ se obtiene

Proposición 3.2. $\mathcal{L}[\delta](s) = 1$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Observación: Esta última propiedad es coherente con el hecho que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}[f_n] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}[nP_{0,1/n}] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{s}(1 - e^{-s/n}) = 1.$$

Observación: Cabe destacar que las funciones f_n no son las únicas que dan origen a δ, pues basta con que cumplan las propiedades enunciadas. Algunos ejemplos de familias de funciones que dan origen a δ y cumplen con las propiedades son:

- $f_n(t) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2t^2}$.
- $f_n(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{\pi t}$.
- $f_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{n^2t^2 + 1}$.

Observación: En estricto rigor, la delta de Dirac no es una función, pues no está definida puntualmente como tal en $t = 0$, sino que se define a través de una propiedad integral[1].

Observación: Si se tienen dos funciones f y g, con g derivable en $\mathbb{R}$, tales que $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)g(t) = 0$, la integración por partes de $f\,g'$ puede servir para definir la "derivada" de $f'\,g$, aún si f no es derivable. En efecto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)g(t)dt = f(t)g(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g'(t)dt.$$

[1] En realidad es lo que se llama una función generalizada o distribución.

Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = 0$, se obtiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)g(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g'(t)dt$. Si tomamos $f = H_a$, el escalón de Heaviside en $a > 0$ y g derivable tal que $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_a'(t)g(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} H_a(t)g'(t)dt = -\int_a^{\infty} g'(t)dt = g(a).$$

Entonces, en cierto sentido

Proposición 3.3.

$$H_a'(t) = \delta(t-a), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

La distribución δ modela un impulso, golpe o chispazo, es decir, un gran estímulo aplicado en un brevisimo período de tiempo a un sistema. Si éste está modelado por una EDO de orden n, un lado derecho δ corresponde de hecho a un valor inicial para $y^{(n-1)}(0^+)$. Para ver esto basta verificar por transformada de Laplace que las dos EDO siguientes, donde $P(D)$ es un operador diferencial a coeficientes constantes de orden n, tienen exactamente la misma solución:

$$P(D)y = 0, \qquad y(0) = 0, \ldots,\ y^{(n-2)}(0) = 0,\ y^{(n-1)}(0) = 1 \tag{37}$$

$$P(D)y = \delta, \qquad y(0) = 0, \ldots,\ y^{(n-2)}(0) = 0,\ y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{38}$$

Es por ello que δ es llamada también *impulso unitario* o simplemente *impulso*. La solución correspondiente de la EDO anterior es llamada *respuesta al impulso* (ver función $H(t)$ más adelante).

4. Transformada de una derivada

Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$ derivable. Calculemos su transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt, s > \alpha \\
&= s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty} \\
&= s\mathcal{L}[f(t)](s) + \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - \lim_{t\to 0^+} e^{-st}f(t)
\end{aligned}$$

como f es de orden exponencial α, se tiene que $\lim_{t\to\infty} |e^{-st}f(t)| \le \lim_{t\to\infty} |e^{-st}e^{\alpha t}| = \lim_{t\to\infty} e^{-(s-\alpha)t} = 0$, pues $s > \alpha$. Llamando $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} e^{-st}f(t)$. Con esto se obtiene

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+), s > \alpha$$

Veamos ahora la transformada de Laplace de la segunda derivada de f:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f''(t)](s) &= s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0^+), s > \alpha \\
&= s(s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+)) - f'(0^+) \\
&= s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0^+) - f'(0^+)
\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso, se obtiene la fórmula para la transformada de la n-ésima derivada de f:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) =$$
$$s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+), s > \alpha$$

Ejemplo 4.1. Un cohete despega con velocidad inicial v_0 desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración $a > 0$ durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es g, encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa m y $t_2 - t_1$ es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con $t_2 > t_1$.

De la sumatoria de fuerzas obtenemos

$$m\frac{d^2}{dy^2}y(t) = -mg + ma(P_{t_1t_2}(t))$$

,donde $y(t)$ es la posición del cohete con respecto a la Tierra. Las condiciones iniciales del cohete son $y(0) = 0$ y $y'(0) = v_0$. Eliminando m a ambos lados y aplicando $\mathcal{L}$ se obtiene la ecuación

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = a\mathcal{L}[P_{t_1t_2}(t)](s) - g\mathcal{L}[1](s)$$

recordando las expresiones para $\mathcal{L}[y''(t)](s), \mathcal{L}[P_{t_1t_2}(t)](s)$ y $\mathcal{L}[1](s)$, la expresión queda

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) = \frac{a}{s}(e^{-t_1t} - e^{-t_2t}) - \frac{g}{s}$$

Los valores $y(0^+)$ y $y'(0^+)$ equivalen a las condiciones iniciales del problema, es decir, $y(0^+) = 0$ y $y'(0^+) = v_0$,

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3}e^{-t_1t} - \frac{a}{s^3}e^{-t_2t} - \frac{g}{s^3}$$

En este punto, se necesita comprender como opera un antitransformada, por lo cual, se continuara en el ejemplo (12.1).

5. Transformada de una integral

Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$ integrable. Sea $a \in \mathbb{R}$. Encontremos la transformada de la funcion $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(u)du$ $(F'(t) = f(t))$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F'(t)](s) &= \mathcal{L}[F(t)](s) - F(0^+), s > \alpha \\ &= s\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) - \int_a^{0^+}\end{aligned}$$

por lo tanto, la transformada de $F(t)$ es

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du, s > \alpha$$

Sea $\int_a^t \int_a^t f(u)du$ la expresión que representa $\int_a^t \left(\int_a^u f(v)dv \right) du$. La transformada de esta expresión es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\int_a^t \int_a^t f(u)du\right](s) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) - \frac{1}{s}\int_0^a \int_a^t f(u)du, s > \alpha \\
&= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du\right) - \frac{1}{s}\int_0^a \int_a^t f(u)du \\
&= \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s^2}\int_0^a f(u)du - \frac{1}{s}\int_0^a \int_a^t f(u)du
\end{aligned}$$

repitiendo el proceso, se obtiene la fórmula para la transformada de la n-ésima integral:

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{\text{n veces}} f(u)du\right](s) =$$

$$\frac{1}{s^n}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s^n}\int_0^a f(u)du - \dots - \frac{1}{s}\int_0^a \underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{n-1 \text{ veces}} f(u)du$$

6. Traslaciones

Una traslación en el dominio temporal t corresponde a un factor exponencial en el dominio de Laplace s, es decir, si $f \in \mathcal{C}_\alpha, a \in \mathbb{R}$ se tiene que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)f(t-a)dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \\
&\underbrace{=}_{\text{u=t-a}} \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du \\
&= e^{-sa}\mathcal{L}[f(t)](s)
\end{aligned}$$

De manera análoga, una traslación en el dominio de Laplace corresponde a un factor exponencial en el dominio temporal:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}e^{a}f(t)dt \\
&= \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)
\end{aligned}$$

7. Igualdad de transformadas

Si $f = g$ con $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$, se tiene que $f - g = 0$, por lo tanto $\mathcal{L}[(f - g)(t)](s) = \mathcal{L}[0](s)$, como $\mathcal{L}$ es un operador lineal, $\mathcal{L}[0](s) = 0$ y $\mathcal{L}[(f - g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) - \mathcal{L}[g(t)](s) = 0$, de lo que se deduce $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$. Son embargo, la proposición reciproca $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f = g$ no implica $f = g$. Para determinar cuando se tiene la implicancia se tiene el siguiente teorema (sin demostración):

Teorema 7.1 (Lerch). *Si $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$ y $\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s), \forall s > \alpha$ entonces $f(t) = g(t), \forall t \geq 0$ salvo en la unión de las discontinuidades de f y g.*

8. Convergencia Uniforme de $\mathcal{L}$

Sean $\Phi(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ y $\Phi_n(s) = \displaystyle\int_0^n e^{-st} f(t)dt$, con $s \in I = [\alpha_0, M], M > \alpha_0 > \alpha, f \in \mathcal{C}_\alpha$. Probemos que $\|\Phi - \Phi_n\|_\infty \to 0$. Sea $s \in I$:

$$\begin{aligned} |\Phi_n(s) - \Phi(s)| &= \left| \int_n^\infty e^{-st} f(t)dt \right| \\ &\leq \frac{C}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \bigg|_n^\infty \\ &\leq \frac{C}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)n} \end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(s) = \Phi(s)$, es decir, Φ_n converge puntualmente a Φ para todo $s \in I$.
Veamos la convergencia uniforme:

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[\alpha_0,M]} |\Phi_n(s) - \Phi(s)| &\leq \sup_{s>\alpha} \frac{C}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)n} \\ &= \frac{C}{\alpha_0 - \alpha} e^{-(\alpha_0-\alpha)n} \\ &\underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $\|\Phi - \Phi_n\|_\infty \to 0, \forall s \geq \alpha_0 > \alpha$.

9. Diferenciabilidad e integrabilidad de $\mathcal{L}$

9.1. Diferenciabilidad. Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$. El valor de la derivada con respecto a s de la transformada de Laplace de f se calcula de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
&\underbrace{=}_{\text{conv. unif.}} \int_0^\infty \frac{d}{ds}e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt \\
&= -\mathcal{L}[tf(t)](s)
\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso, la derivada n-ésima de la tranf. de Laplace de f se expresa como

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n\mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

9.2. Integrabilidad. Para el caso en que deseemos integrar la transf. de una función $f \in \mathcal{C}_\alpha$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u)du &= \int_0^s \left(\int_0^\infty e^{-ut}f(t)dt\right)du \\
&\underbrace{=}_{\text{conv. unif.}} \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-ut}f(t)du\right)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{-1}{t}e^{-ut}\Big|_0^s f(t)\right)dt \\
&= -\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt \\
&= -\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt
\end{aligned}$$

si en la formula de la derivada de la transformada, se toma $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$, se obtiene $\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = -\mathcal{L}[f(t)](s)$, por lo tanto $\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right](s) - \mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right](s) = -\displaystyle\int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)du$. Si $\dfrac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$ se tiene $\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right](s) = 0$, por lo cual

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)du$$

La única condición para que $\dfrac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$ con $f(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ es que $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ exista ($\neq \pm\infty$). Entonces, la formula que se obtiene es

$$\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u)du = -\int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)du + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$$

que equivale a integrar desde 0 a ∞, es decir,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$$

10. Convolución

DEFINICIÓN 10.1 (Producto de Convolución). *Sean f y g funciones en $\mathcal{C}_\alpha$. El producto de convolución entre f y g de define como* $(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$

PROPIEDADES 10.1. *Se tienen las siguienes propiedades:*

1. $*$ *es conmutativa en* $\mathcal{C}_\alpha$.
2. $*$ *es asociativa en* $\mathcal{C}_\alpha$.
3. $*$ *distribuye con respecto a* $+$ *en* $\mathcal{C}_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN. Propuesta. $\square$

TEOREMA 10.1. *Sean $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$. Entonces*

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$$

,es decir, la convolución actúa como la multiplicacion bajo transformadas de Laplace.

DEMOSTRACIÓN. Dadas f y g en $\mathcal{C}_\alpha$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(u)g(t-u)du\right)dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt \end{aligned}$$

como $0 < t < \infty$ y $0 < u < t$, podemos hacer un cambio en los límites de integración, ya que los conjuntos $\{(t,s) : 0 < t < \infty \wedge 0 < u < t\}$ y $\{(t,s) : u < t < \infty \wedge 0 < u < \infty\}$ son iguales, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dtdu \\ &\underbrace{=}_{w=t-u} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(w+u)} f(u)g(w)dwdu \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \int_0^\infty e^{-sw} g(w)dw \\ &= \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s) \end{aligned}$$

$\square$

Observación: Como consecuencia se obtiene que δ_0 es el neutro para $*$, es decir, para $f \in \mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{L}[f*\delta_0] = \mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[\delta_0]$ y como $\mathcal{L}[\delta_0] = 1$, $\mathcal{L}[f*\delta_0] = \mathcal{L}[f]$. Por el teorema de Lerch, $f * \delta_0 = f \Leftrightarrow \delta_0 * f = f$ (no riguroso).

11. Fracciones Parciales

Supongamos se tiene la expresion racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios a coeficientes reales tales que sus grados cumplen con $gr(p) < gr(q)$. Si se quiere obtener expresiones más simples a partir de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, se puede descomponer esa expresión en fracciones parciales, las que al ser sumadas dan como resultado la expresión original. Los casos más frecuentes de descomposición son los siguientes:

1. Si $q(x)$ tiene n raices reales distintas cada una de multiplicidad algebraica (m. a.) 1, es decir, $q(x) = (x-a_1)\dots(x-a_n)$, con $a_i \in \mathbb{R}$ y $\forall i \neq j, a_i \neq a_j$:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}$$
2. Si $q(x)$ tiene una raíz real de m. a. n, es decir, $q(x) = (x-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$
3. Si $q(x)$ tiene $m+1$ raices reales distintas, m con m. a. 1 y una con m. a. n, es decir, $q(x) = (x-a)^n(x-b_1)\dots(x-b_m)$, con $a, b_i \in \mathbb{R}$ y $\forall i \neq j, b_i \neq b_j \wedge b_i \neq a$:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1}{x-b_1} + \dots + \frac{B_m}{x-b_m}$$
4. Si $q(x)$ tiene 2 raices complejas distintas de m. a. 1, es decir, $q(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ o bien $q(x) = (x-z)(x-\overline{z})$, con $z, \overline{z} \in \mathbb{C}, \Im(z) \neq 0$ (parte imaginaria distinta de 0) soluciones de la ecuacion cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$
5. Si $q(x)$ tiene 2 raices complejas distintas de m. a. n, es decir, $q(x) = (ax^2+bx+c)^n$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ o bien $q(x) = (x-z)^n(x-\overline{z})^n$, con $z, \overline{z} \in \mathbb{C}, \Im(z) \neq 0$ soluciones de la ecuacion cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$
6. Cualquier combinación de estos casos.

Una vez descompuesta la expresión original, se deben encontrar los valores de los coeficinetes de la parte derecha. Existen varias formas de encontrarlos, veremos 2 métodos:

- Método 1: Multiplicar por $q(x)$ a ambos lados y evaluar raíz por raíz.
- Método 2: Desarrollar la suma de la parte derecha e igualar coeficientes.

Ejemplo 11.1. Se desea descomponer la expresión

$$\frac{1}{s^2((s-a)^2+b^2)}$$

sabiendo que las soluciones de $(s-a)^2+b^2=0$, z y su conjugado $\overline{z}$ estan en $\mathbb{C}$.
Realizando la descomposición utilizando una combinación de (2) y (4), se tiene que

$$\frac{1}{s^2((s-a)^2+b^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C+Ds}{(s-a)^2+b^2} \tag{39}$$

Utilizando el método 1, es decir, multiplicando por $s^2((s-a)^2+b^2)$ a ambos lados de (39), se obtiene

$$1 = As((s-a)^2+b^2) + B((s-a)^2+b^2) + (C+sD)s^2$$

Evaluando en z y $\overline{z}$, se obtienen las igualdades

$$1 = Cz^2 + z^3D$$
$$1 = C\overline{z}^2 + \overline{z}^3D$$

multiplicando la primera igualdad por $\overline{z}^2$ y la segunda por z^2, se tiene

$$\overline{z}^2 = Cz^2\cdot\overline{z}^2 + z\cdot z^2\cdot\overline{z}^2D$$
$$z^2 = C\overline{z}^2\cdot z^2 + \overline{z}\cdot\overline{z}^2\cdot z^2D$$

como $z\cdot\overline{z} = |z|^2$, se deduce que

$$\overline{z}^2 = C|z|^4 + z\cdot|z|^4D$$
$$z^2 = C|z|^4 + \overline{z}\cdot|z|^4D$$

multiplicando por -1 la primera igualdad y sumando, se obtiene D

$$D = \frac{(z-\overline{z})(z+\overline{z})}{-|z|^4(z-\overline{z})}$$
$$D = \frac{-2\Re(z)}{|z|^4}$$

recordando que $\Re(z) = z+\overline{z}$. El valor de C se obtiene reemplazando el D obtenido.
Evaluando en 0, se obtiene

$$1 = B(a^2+b^2)$$

con lo cual $B = \dfrac{1}{a^2+b^2}$. La constante A no se obtiene reemplazando la incognita por alguna raíz, por lo tanto, se utiliza el método 2 para determinarla.

Ahora, si utilizamos el método 2, es decir, desarrollar el lado derecho de (39), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2((s-a)^2+b^2)} &= \frac{As((s-a)^2+b^2)+B((s-a)^2+b^2)+(C+sD)s^2}{s^2((s-a)^2+b^2)} \\
1 &= A(s^3-2as^2+(a^2+b^2)s)+B(s^2-2as+a^2+b^2)+Cs^2+Ds^3 \\
1 &= s^3(A+D)+s^2(-2aA+B+C)+s(A(a^2+b^2)-2aB)+(Ba^2+Bb^2)
\end{aligned}$$

de esta igualdad, se deduce 4 ecuaciones, igualando los coeficientes de cada lado:

$$\begin{aligned}
0 &= A+D \\
0 &= -2aA+B+C \\
0 &= A(a^2+b^2)-2aB \\
1 &= Ba^2+Bb^2
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2a & 1 & 1 & 0 \\ (a^2+b^2) & -2a & 0 & 0 \\ 0 & (a^2+b^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de este sistema se obtienen los valores de A, B, C y D. □

Ejemplo 11.2. Ver Ejemplo 13.2 más adelante para la aplicación del método de fracciones parciales a un ejemplo concreto de intercambio de masas atmosféricas.

12. Antitransformadas

Se tiene la siguiente EDO a coeficientes constantes:

$$P(D)y(t) = \overline{Q}(t)$$

con $P(D)$ un operador diferencial de orden n normalizado ($a_n = 1$)y $\overline{Q}(t)$ es combinación lineal de funciones en $\mathcal{C}_\alpha$. Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos lados de la EDO, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j D^j y(t)\right](s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \\
\sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{L}\left[D^j y(t)\right](s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)
\end{aligned}$$

pero se sabe que $\mathcal{L}\left[D^j y(t)\right](s) = s^j\mathcal{L}[y(t)](s) - s^{j-1}y(0^+) - \cdots - y^{j-1}(0^+)$, lo cual es un polinomio de grado menor o igual a $j-1$ en la variable s, cuyos coeficientes dependen de las condiciones iniciales. Con esto la ecuación queda ($R(s)$ tiene grado a lo más $n-1$):

$$\begin{aligned}
\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j s^j\right)}_{P(s)} \mathcal{L}[y(t)](s) - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j (s^{j-1} y(0^+) + \cdots + y^{j-1}(0^+))}_{R(s)} &= \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \\
P(s)\mathcal{L}[y(t)](s) &= R(s) + \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \\
\mathcal{L}[y(t)](s) &= \frac{R(s)}{P(s)} + \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)}{P(s)}
\end{aligned}$$

Llamando $y_h(t)$ e $y_p(t)$ a la funciónes tales que $\mathcal{L}[y_h(t)](s) = \dfrac{R(s)}{P(s)}$ y $\mathcal{L}[y_p(t)] = \dfrac{\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)}{P(s)}$, se tiene que :

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \mathcal{L}[y_h(t)](s) + \mathcal{L}[y_p(t)](s)$$

Definición 12.1. *Una función f (en el dominio temporal) es antitransformada de una función ρ (en el dominio de Laplace) si se cumple que $\mathcal{L}[f(t)] = \rho(s)$. Se denota como $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\rho(s)](t)$.*

En el ejemplo inicial, se tendria que $y_h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{R(s)}{P(s)}\right](t)$ e $y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)}{P(s)}\right](t)$.

Para encontrar $y_p(t)$, consideremos $H(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{P(s)}\right](t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[H(t)](s)\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[(H * \overline{Q})(t)](s)\right](t) \\
&= (H * \overline{Q})(t) \\
&= \int_0^t H(t-\theta)\overline{Q}(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Para encontrar $y_h(t)$ se utiliza la descomposición en fracciones parciales de la función racional $\dfrac{R(s)}{P(s)}$.

Se tendra que $y_h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{R(s)}{P(s)}\right]$, con $gr(P) = n$ y $gr(R) \leq n-1$, considerando al polinomio $P(s)$ de la forma

$$P(s) = (s-\lambda_1)^{m_1} \ldots (s-\lambda_l)^{m_l}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ raices de P y $m_1, \ldots, m_l$ son las multiplicidades algebaicas respectivas. Si alguna raíz cumple con $\Im(\lambda) \neq 0$ (parte imaginaria distinta de cero), entonces ella y su conjugado son raices del polinomio, y se tiene que $\lambda = \sigma + iw, \overline{\lambda} = \sigma - iw$ tales que $(s-\sigma-iw)(s-\sigma+iw) = (s-\sigma)^2+w^2$. Con esto, podemos escribir la descomposicion de P de la forma

$$P(s) = (s-\lambda_1)^{m_1}\dots(s-\lambda_k)^{m_k}((s-\sigma_{k+1})^2+w_{k+1})^{m_{k+1}}\dots((s-\sigma_l)^2+w_l)^{m_l}$$

donde las raices $\lambda_1, \dots \lambda_k$ cumplen con $\Im(\lambda) = 0$, y las raices $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_l$ cumplen con $\Im(\lambda) \neq 0$. Por lo tanto, la expresión para $\frac{1}{P(s)}$, utilizando una descomposición en fracciones parciales, sería de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P(s)} &= \frac{A_{1,1}}{s-\lambda_1} + \dots + \frac{A_{m_1,1}}{(s-\lambda_1)^{m_1}} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \frac{A_{1,k}}{s-\lambda_k} + \dots + \frac{A_{m_k,k}}{(s-\lambda_k)^{m_k}} \\
&\quad + \frac{B_{1,k+1} + sC_{1,k+1}}{(s-\sigma_{k+1})^2 + w_{k+1}} + \dots + \frac{B_{m_{k+1},k+1} + sC_{m_{k+1},k+1}}{((s-\sigma_{k+1})^2 + w_{k+1})^{m_{k+1}}} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \frac{B_{1,l} + sC_{1,l}}{(s-\sigma_l)^2 + w_l} + \dots + \frac{B_{m_l,l} + sC_{m_l,l}}{((s-\sigma_l)^2 + w_l)^{m_l}}
\end{aligned}$$

Considerando las siguientes transformadas de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[H(t)](s-\lambda) &= \frac{1}{s-\lambda} \\
\mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s-\lambda) &= \frac{1}{(s-\lambda)^k} \\
\mathcal{L}\left[\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)\right](s-\sigma) &= \frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2} \\
\mathcal{L}\left[\cos(wt)\right](s-\sigma) + \mathcal{L}\left[\frac{\sigma}{w}\operatorname{sen}(wt)\right](s-\sigma) &= \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2} + \frac{\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}
\end{aligned}$$

y recordando que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[H(t)](s-\lambda) &= \mathcal{L}[e^{\lambda t}H(t)](s) \\
\mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s-\lambda) &= \mathcal{L}\left[e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s) \\
\mathcal{L}\left[\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)\right](s-\sigma) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)\right](s) \\
\mathcal{L}\left[\cos(wt)\right](s-\sigma) + \mathcal{L}\left[\frac{\sigma}{w}\operatorname{sen}(wt)\right](s-\sigma) &= \mathcal{L}\left[e^{\sigma t}\cos(wt) + \frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)\right](s)
\end{aligned}$$

se obtienen las antitrasformadas

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda t}H(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right](t) \\
e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\lambda)^k}\right](t) \\
\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}\right](t) \\
e^{\sigma t}\cos(wt)+\frac{\sigma e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-\sigma)^2+w^2}\right](t)
\end{aligned}
$$

Con estas 4 identidades, la expresión (40) queda practicamente de la forma $\dfrac{1}{P(s)} = \mathcal{L}[f(t)](s)$, con lo que se tendria el resultado, sin embargo, aún falta encontrar las antitransformadas de los siguientes tipos:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right](t)$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}\right](t)$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^n}\right](t)$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+a^2)^n}\right](t)$

Veamos cada caso:

1. Basta considerar $\dfrac{d}{ds}\dfrac{1}{s^2+a^2} = \dfrac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right](t) &= \frac{-1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+a^2}\right] \\
&= \frac{-1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)]\right] \\
&= \frac{1}{2a}t\operatorname{sen}(at)
\end{aligned}
$$

2. Recordando que $\mathcal{L}\left[\int_0^t f\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right](t) &= \mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2a}t\operatorname{sen}(at)\right](s)\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{2a}t\operatorname{sen}(at)\right](s)\right](t) \\
&= \int_0^t \frac{1}{2a}t\operatorname{sen}(at) \\
&= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at) - t\cos(at)\right)
\end{aligned}$$

3. Por recurrencia se tiene que $\frac{d}{ds}\frac{1}{(s^2+a^2)^{n-1}} = \frac{(n-1)(s^2+a^2)^{n-2}2s}{(s^2+a^2)^{2n-2}} = \frac{-2s(n-1)}{(s^2+a^2)^n}$, y la antitransformada sera de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^n}\right](t) &= \frac{-1}{2(n-1)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^{n-1}}\right)\right](t) \\
&= \frac{1}{2(n-1)}t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^{n-1}}\right](t)
\end{aligned}$$

4. Queda propuesto al lector utilizando un método similar al del punto 2 anterior.

Ejemplo 12.1. Continuando el Ejemplo 4.1 del cohete, hay que encontrar las funciones que al ser transformadas por $\mathcal{L}$, equivalen a cada uno de los sumandos del miembro derecho de la ecuación

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3}e^{-t_1 t} - \frac{a}{s^3}e^{-t_2 t} - \frac{g}{s^3}$$

No es difícil darse cuenta de que $\mathcal{L}[v_0 t], \mathcal{L}[\frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1)], \mathcal{L}[\frac{-a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2)]$ y $\mathcal{L}[\frac{gt^2}{2}]$ equivalen a cada sumando respectivo. Reemplazando obtenemos

$$\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[v_0 t] + \mathcal{L}[\frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1)] + \mathcal{L}[\frac{-a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2)] + \mathcal{L}[\frac{gt^2}{2}]$$

$$\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[v_0 t + \frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1) - \frac{a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2) + \frac{gt^2}{2}]$$

por lo tanto, la ecuación de movimiento del cohete es

$$y(t) = v_0 t + \frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1) - \frac{a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2) + \frac{gt^2}{2}$$

Ejemplo 12.2. Resolver la EDO $y'' + 2y' + 2y = 0$.
Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos lados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y](s) &= \mathcal{L}[0](s) \\
\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] &= 0 \\
s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) + 2(s\mathcal{L}[y](s) - y(0^+)) + 2\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\
(s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) &= s + 3 \\
\mathcal{L}[y](s) &= \frac{s+3}{s^2 + 2s + 2}
\end{aligned}$$

Como las raices de $s^2 + 2s + 2 = 0$ son complejas, se escribe ese polinomio de la forma $(s+1)^2 + 1$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y](s) &= \frac{s+3}{(s+1)^2 + 1} \\
\mathcal{L}[y](s) &= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{2}{(s+1)^2 + 1}
\end{aligned}$$

Y como $\mathcal{L}\left[e^{-x}\cos x\right](s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$ y $\mathcal{L}\left[e^{-x}\operatorname{sen} x\right](s) = \dfrac{1}{(s+1)^2+1}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}\left[e^{-x}\cos x\right](s) + 2\mathcal{L}\left[e^{-x}\operatorname{sen} x\right](s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \\
\mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}\left[e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right](s) \\
y &= e^{-x}(\cos x + 2\operatorname{sen} x)
\end{aligned}$$

La transformada de Laplace también se puede utilizar para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Esto se ve en la próxima sección.

13. Método de Transformada de Laplace para Sistemas

Partamos por un ejemplo simple. Si al sistema formado por (25) y (26) del capítulo anterior lo consideramos definido para $t > 0$, le aplicamos transformada de Laplace, resulta:

$$\begin{aligned}
s\mathcal{L}x_1 - x_1^0 &= a_{11}\mathcal{L}x_1 + a_{12}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_1 \\
s\mathcal{L}x_2 - x_2^0 &= a_{21}\mathcal{L}x_1 + a_{22}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_2.
\end{aligned}$$

Así tenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
(s - a_{11})\mathcal{L}x_1 - a_{12}\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_1 + x_1^0 \quad /(s - a_{22}) \\
-a_{21}\mathcal{L}x_1 + (s - a_{22})Lx_2 &= \mathcal{L}b_2 + x_2^0 \quad /a_{12},
\end{aligned}$$

sumando la ecuaciones resulta:

$$(s-a_{11})(s-a_{22})\mathcal{L}x_1 - a_{12}a_{21}\mathcal{L}x_1 = (s-a_{22})\mathcal{L}b_1 + (s-a_{22})x_1^0 + a_{12}\mathcal{L}b_2 + a_{12}x_2^0.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
(s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathcal{L}x_1 &= \phi(s) \\
P(s)\mathcal{L}(x_1) &= \phi(s),
\end{aligned}$$

donde $\phi(s) = (s - a_{22})(\mathcal{L}_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}_2 + x_2^0)$ y $P(s) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

De esta forma la solución general del sistema será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}x_1 &= \frac{(s - a_{22})(\mathcal{L}b_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}b_2 + x_2^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
\mathcal{L}x_2 &= \frac{(s - a_{11})(\mathcal{L}b_2 + x_2^0) + a_{21}(\mathcal{L}b_1 + x_1^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 13.1 (continuación polución en dos estanques). Volviendo al ejemplo de los estanques del Capítulo anterior (Ejemplo 2.1), si reemplazamos los valores que teníamos en ese sistema, se obtiene:

$$\left(s^2 + b(1+\lambda)(\frac{1}{V} + \frac{1}{V})s + \frac{b^2(1+\lambda)}{V^2}\right)\mathcal{L}x_1 = \left(s + \frac{b(1+\lambda)}{V}\right)\left(\frac{b\sigma}{s} + x_1^0\right) + \frac{bx_2^0\lambda}{V}.$$

Resolvamos la ecuación cuadrática del lado izquierdo:

$$s = \frac{-b(1+\lambda)}{V} \pm \frac{b(1+\lambda)}{V}\underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{1+\lambda}}}_{\theta},$$

y como $\lambda \geq 0 \Longrightarrow 1 \geq \theta \geq 0$, y por tanto resulta:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{-b(1+\lambda)}{V}(1+\theta) \ < 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0 \\
s_2 &= \frac{-b(1+\lambda)}{V}(1-\theta) \ < 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Si introducimos los parámetros

$$\alpha = \frac{b(1+\lambda)}{V}, \ \beta = \frac{b\lambda}{V},$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}x_1 &= \frac{b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{s x_1^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} \\
\mathcal{L}x_2 &= \frac{\alpha(x_1^0 + x_2^0)}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{s x_2^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))}
\end{aligned}$$

Los tres sumandos de cada ecuación anterior tienen una antitransformada conocida:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \\
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right) &= \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \\
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right) &= \frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -(b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0)\frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} + x_1^0\frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} + \\
&\quad \alpha b\sigma\frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)} \\
x_2 &= -\alpha(x_1^0 + x_2^0)\frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} + x_2^0\frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} + \\
&\quad \alpha b\sigma\frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)}.
\end{aligned}$$

Luego

$$x_1 = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_1 t} + C_3,$$

donde C_1, C_2, C_3 son constantes dadas de la agrupación de términos semejantes en la expresión anterior, que por tanto dependen sólo de las condiciones iniciales y de la geometría del sistema. Para x_2 se obtiene análogamente:

$$x_2 = C_1' e^{s_1 t} + C_2' e^{s_1 t} + C_3',$$

con C_1', C_2', C_3' constantes. Es importante notar que estas soluciones son estables, es decir, que cuando $t \to \infty$ las soluciones convergen a una solución determinada, y puesto que $s_1, s_2 < 0$, entonces :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x_1(t) &= C_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V \\
\lim_{t\to\infty} x_2(t) &= C_3' = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V,
\end{aligned}$$

por lo que concluimos que después de un tiempo suficientemente largo, la cantidad de poluente en cada estanque será muy cercana a σV, independientemente del valor de λ, es decir, tenemos la misma solución que si $\lambda = 0$, que era como inicialmente estaba el sistema de estanques. En realidad la situación es más compleja, ya que graficando las soluciones para $\lambda > 0$ y $\lambda = 0$ se aprecia que la polución es menor en el caso $\lambda > 0$ para un intervalo de t considerable (aunque el límite es el mismo). Ver figura (6).

□

Veamos ahora el método de la Transformada de Laplace en caso de un sistema lineal general *a coeficientes constantes*:

$$\begin{aligned}
X' &= AX + B(t), \quad B, X \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\
X(0) &= X_0, \qquad\qquad X_0 \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Analizamos la i-ésima fila del sistema:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \qquad x_i(0) = x_i^0.$$

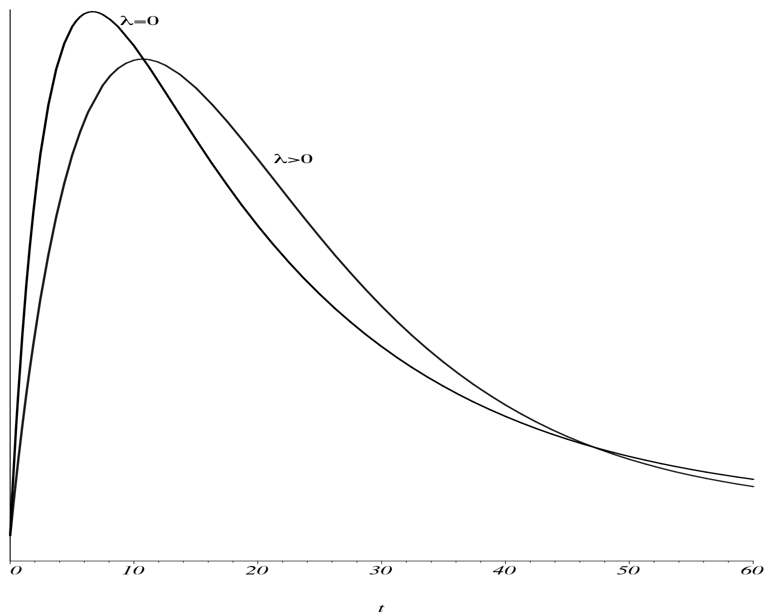

FIGURA 6. Comportamiento de la polución en estanque 2 del ejemplo 13.1

Aplicando Transformada de Laplace a cada ecuación:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{L}x_j + \mathcal{L}b_i, \qquad i = 1, ..., n \\ s\mathcal{L}x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{L}x_j &= \mathcal{L}b_i - x_i^0, \qquad i = 1, ..., n. \end{aligned}$$

O bien, matricialmente:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}X - A\mathcal{L}X &= \mathcal{L}B + X_0 \\ sI\mathcal{L}X - A\mathcal{L}X &= \mathcal{L}B + X_0, \end{aligned}$$

esto es:

$$(sI - A)\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(B) + X_0.$$

De esta forma, si $(sI - A) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible (en realidad basta tomar $s > \text{máx}\,\Re\sigma(A)$, donde $\Re\sigma(A)$ son la parte real de los valores propios de A), podemos despejar $\mathcal{L}(X)$ y obtener el

TEOREMA 13.1. *La solución del sistema lineal (23), donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene coeficientes constantes, está dada por*

$$\mathcal{L}(X) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B) + X_0), \quad s > \text{máx}\,\Re\sigma(A).$$

Ejemplo 13.2 (Masas atmosféricas). El siguiente es un modelo para la evolución de las masas atmosféricas en kilotoneladas [kton] de un contaminante en el hemisferio norte (c_1) y el hemisferio sur (c_2) de la Tierra (ver figura 13.2):

$$c_1' = f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1 \tag{40}$$

$$c_2' = f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2. \tag{41}$$

La constante $\alpha > 0$ representa inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante $\beta > 0$ (desconocida) el inverso del tiempo de vida química del contaminante en [1/año]. Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son constantes conocidas $f_1 = 30$ y $f_2 = 10$ en [kton/año]. Inicialmente $c_1^0 = 84$ y $c_2^0 = 60$ en [kton].

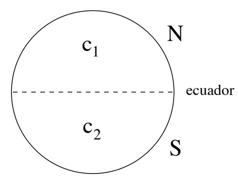

Figura 7. Masas atmosféricas del ejemplo 13.2

Introduzcamos la masa media entre los dos hemisferios como $\overline{c}(t) = \frac{1}{2}(c_1(t) + c_2(t))$ y la emisión media como $\overline{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Si derivamos la expresión de la masa media con respecto al tiempo obtenemos:

$$\overline{c}'(t) = \frac{1}{2}(c_1'(t) + c_2'(t)).$$

Luego, si sumamos las EDO que tenemos para c_1 y c_2, nos queda:

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' &= 2\overline{c}' = (f_1 + f_2) - \alpha(c_1 - c_2 + c_2 - c_1) - \beta(c_1 + c_2) \\ \overline{c}' &= \overline{f} - \beta\overline{c} \end{aligned}$$

que es una EDO para $\overline{c}$, con condición inicial dada por

$$\overline{c}(0) = \frac{1}{2}(c_1(0) + c_2(0)) = \frac{1}{2}(84 + 60)[kton] = 72[kton].$$

Un método sencillo para resolver la EDO anterior es considerar la ecuación homogénea asociada y la solución particular, $\overline{c}_{part} = cte = \overline{f}/\beta$.
La homogénea,

$$\overline{c}' + \beta\overline{c} = 0,$$

tiene asociado el polinomio característico $\lambda + \beta = 0$, de donde:

$$\overline{c}_{hom} = Ae^{-\beta t}, \qquad A \text{ constante a determinar.}$$

Luego, la solución final es:

$$\overline{c}(t) = Ae^{-\beta t} + \frac{\overline{f}}{\beta},$$

de aquí que $\overline{c}(0) = 72 = Ae^0 + \overline{f}/\beta = A + \overline{f}/\beta$.
Luego $A = 72 - \overline{f}/\beta$ y

$$\overline{c}(t) = 72e^{-\beta t} + \frac{\overline{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Si se estima que el límite de $\overline{c}(t)$ cuando $t \to +\infty$ es de 100 [kton], podemos encontrar una estimación para β^{-1}, esto es, para los años de vida del contaminante:

$$\lim_{t\to\infty} \overline{c}(t) = 100[kton] = \lim_{t\to\infty}[72e^{-\beta t} + \frac{\overline{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t})] = \frac{\overline{f}}{\beta},$$

pero $\overline{f} = 20$ [kton/año]. Luego,

$$\beta^{-1} = \frac{100[\text{kton}]}{20[\text{kton/año}]} = 5 \text{ [años]}.$$

Por lo tanto, los años de vida de cada contaminante son 5 años.
Para resolver el sistema dado por (40) y (41) podemos utilizar el método de la Transformada de Laplace a sistemas lineales. Si escribimos matricialmente el sistema de la forma $C' = AC + B$, con

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \alpha & -\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

entonces, usando el Teorema 13.1

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1}(\mathcal{L}B + X_0) \quad &= \quad \begin{pmatrix} s + \alpha + \beta & -\alpha \\ -\alpha & s + \alpha + \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{f_1}{s} + c_1^0 \\ \frac{f_2}{s} + c_2^0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} (f_1 + c_2^0\alpha + c_1^0\alpha + c_1^0\beta)\phi_1(s) + c_1^0\phi_2(s) + (f_1\alpha + f_1\beta + f_2\alpha)\phi_3(s) \\ \\ (f_2 + c_1^0\alpha + c_2^0\alpha + c_2^0\beta)\phi_1(s) + c_2^0\phi_2(s) + (f_2\alpha + f_2\beta + f_1\alpha)\phi_3(s) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde

$$\phi_1(s) = \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)},\ \phi_2(s) = \frac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)},\ \phi_3(s) = \frac{1}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}.$$

Para terminar, sólo falta encontrar las antitransformadas de cada componente del vector, lo que se reduce a encontrar las antitransformadas de ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3. Para esto usaremos una buena receta: si

$$\phi(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{s-c},$$

con a, b y c distintos, entonces

$$A = \lim_{s\to a}(s-a)\phi(s),\ B = \lim_{s\to b}(s-b)\phi(s),\ \text{y } C = \lim_{s\to c}(s-c)\phi(s).$$

Como $\phi_1(s) = \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \frac{A_1}{s+\beta} + \frac{B_1}{s+2\alpha+\beta}$, hallamos A_1:

$$\lim_{s\to-\beta} \phi_1(s)(s+\beta) = A_1 = \lim_{s\to-\beta} \frac{s+\beta}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \lim_{s\to-\beta} \frac{1}{s+2\alpha+\beta} = \frac{1}{2\alpha}.$$

De la misma manera, $B_1 = -\frac{1}{2\alpha}$, luego,

$$\phi_1(s) = \frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}.$$

Para ϕ_2,

$$\phi_2(s) = \tfrac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = s[\tfrac{A_2}{s+\beta} + \tfrac{B_2}{s+2\alpha+\beta}] = \tfrac{1}{2\alpha}[\tfrac{s}{s+\beta} - \tfrac{s}{s+2\alpha+\beta}].$$

Por último,

$$\phi_3(s) = \frac{A_3}{s} + \frac{B_3}{s+\beta} + \frac{C_3}{s+2\alpha+\beta},$$

y utilizando la receta,

$$\begin{aligned}
A_3 &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} \\
B_3 &= \lim_{s\to -\beta} \frac{s+\beta}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = -\frac{1}{2\alpha\beta} \\
C_3 &= \lim_{s\to -(2\alpha+\beta)} \frac{s+2\alpha+\beta}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora antitransformada a estas funciones, recordando que $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}] = e^{-at}$, y $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s+a}] = \delta(t) - ae^{-at}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[\phi_1(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}\right] = \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] - \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{-\beta t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-(2\alpha+\beta)t} \\
\mathcal{L}^{-1}[\phi_2(s)] &= \frac{1}{2\alpha}(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+\beta}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+2\alpha+\beta}\right]) = \frac{1}{2\alpha}(\delta(t) - \beta e^{-\beta t} - \delta(t) + (2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t}) \\
&= \frac{1}{2\alpha}((2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t} - \beta e^{-\beta t}) \\
\mathcal{L}^{-1}[\phi_3(s)] &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2\alpha\beta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} - \frac{1}{2\alpha\beta}e^{-\beta t} + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}e^{-(2\alpha+\beta)t}.
\end{aligned}$$

Finalmente, agrupando constantes, la cantidad de contaminante en cada hemisferio resulta:

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= p_1e^{-\beta t} + q_1e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_1 \\
c_2(t) &= p_2e^{-\beta t} + q_2e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_2,
\end{aligned}$$

donde $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$, son constantes dependientes sólo de $c_1^0, c_2^0, f_1, f_2, \alpha$ y β.
Es interesante notar que después de un tiempo suficientemente largo, se llega

a un equilibrio en las cantidades de contaminación, que para el hemisferio Norte es:

$$\lim_{t\to\infty} c_1 = r_1 = \frac{(\alpha+\beta)f_1 + \alpha f_2}{\beta(2\alpha+\beta)}$$

y para el hemisferio Sur es:

$$\lim_{t\to\infty} c_2 = r_2 = \frac{\alpha f_1 + (\alpha+\beta)f_2}{\beta(2\alpha+\beta)}.$$

$\square$