

MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2007-2

Profesor: Axel Osses Auxiliares: Nicolás Carreño, Jorge Lemus.

## Pauta Control 2

12 de Septiembre de 2007

**P1.-**

(i) Encuentre la solución general de la siguientes EDO

$$y''' - 2y'' - 8y' = e^{3x} \operatorname{sen} x + 1 + 5e^{-2x}$$

Primero se resuelve la ecuación homogénea. Para esto, se escribe la ecuación usando operadores:

$$(D^3 - 2D^2 - 8D)y = 0$$

El polinomio característico asociado es:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

Con raíces  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\lambda = -2$ . Por lo tanto la solución homogénea viene dada por:

$$y_H = c_1 + c_2 e^{4x} + c_3 e^{-2x}.$$

Para encontrar la forma de la ecuación particular usamos anuladores. Se tiene que:

$$\begin{aligned} A_1(D) &= D, \text{ Anula a la función } 1 \\ A_2(D) &= (D + 2), \text{ Anula a la función } 5e^{-2x} \\ A_1(D) &= ((D - 3)^2 + 1), \text{ Anula a la función } e^{3x} \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Así, aplicando los anuladores a la ecuación original obtenemos:

$$D^2((D - 3)^2 + 1)(D + 2)^2(D - 4)y = 0$$

De acá vemos que la forma de la solución general es:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x} \operatorname{sen} x + c_4 e^{3x} \cos x + c_5 e^{-2x} + c_6 x e^{-2x} + e^{4x}.$$

Reconociendo la solución de la homogénea, la solución particular es la siguiente:

$$y_p = c_2 x + c_3 e^{3x} \operatorname{sen} x + c_4 e^{3x} \cos x + c_6 x e^{-2x}.$$

Estas últimas constantes deberán ser determinadas reemplazando esta solución en la ecuación original.

(ii) Sabiendo que  $y_1(x) = x \ln x$  es una solución de la ecuación homogénea, encuentre la solución general de:

$$x^2 y'' - xy' + y = 4x \ln x, \quad x > 0$$

Usando la fórmula de Abel para encontrar la segunda solución de la ecuación homogénea, se obtiene:

$$W(x \ln x, y_2) = C e^{\int \frac{dx}{x}} = Cx$$

$$y_2' x \ln x - (\ln x + 1)y_2 = Cx$$

$$y_2' - \frac{(\ln x + 1)}{x \ln x} y_2 = \frac{C}{\ln x}$$

El factor integrante es

$$e^{\int -\frac{(\ln x + 1)}{x \ln x}} = \frac{1}{x \ln x}$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante se obtiene:

$$\left( \frac{y_2}{x \ln x} \right)' = \frac{C}{x(\ln x)^2}$$

$$\left( \frac{y_2}{x \ln x} \right) = \int \frac{C}{x(\ln x)^2} + D$$

$$\left( \frac{y_2}{x \ln x} \right) = \frac{-C}{\ln x} + D$$

$$y_2 = -Cx + Dx \ln x$$

Luego, la segunda solución homogénea es  $y_2(x) = x$ .

Para encontrar la solución particular se puede usar variación de parámetros o la fórmula de Green.

$$y_p = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, t)} Q(t) dt$$

Usando que  $W(y_1, y_2) = -x$ .

$$y_p = y_2(x) \int \frac{4(\ln t)^2}{-t} dt - y_1(x) \int \frac{4 \ln t}{-t} dt$$

$$y_p = -\frac{4}{3}(\ln x)^3 y_2(x) + 2(\ln x)^2 y_1(x)$$

(iii) Para  $\beta > 0$ , considere la siguiente ecuación diferencial:

$$2y'' + 3y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\beta.$$

Resuélvala y encuentre el menor valor de  $\beta$  tal que la solución no tenga un mínimo.

Resolvemos la ecuación usando polinomio característico:

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

Las raíces son:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Luego la solución de la homogénea es:

$$y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

Imponiendo las condiciones iniciales se obtiene  $c_1 = \frac{1+2\beta}{5}$ ,  $c_2 = \frac{4-2\beta}{5}$ .

$$y(x) = \frac{1+2\beta}{5}e^{-2x} + \frac{4-2\beta}{5}e^{\frac{1}{2}x}$$

Una condición de no existencia de un mínimos es pedir que la derivada no se anule en ningún punto, dado que la función es continua y diferenciable.

$$y'(x) = -2\frac{1+2\beta}{5}e^{-2x} + \frac{2-\beta}{5}e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

$$e^{\frac{5}{2}x} = 2\frac{1+2\beta}{2-\beta}$$

Para que esta ecuación no tenga solución en  $\mathbb{R}$ , y al ser  $\beta > 0$ , basta imponer que  $\beta \geq 2$ . Luego el menor valor de  $\beta$  para que no tenga mínimo es  $\beta = 2$ .

**P2.-** En la industria salmonera compiten tres firmas. El precio de las acciones para la empresa  $i$  es  $S_i$ . Diremos que el precio de  $S_i$  es alto si es mayor que un precio esperado  $p_i$ . Si el precio de  $S_i$  es alto, las expectativas positivas harán que  $S_i$  suba o, de lo contrario, que baje. Además, un precio alto en las acciones de las firmas competidoras harán que  $S_i$  caiga.

(i) De acuerdo al enunciado, plantee un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden indicando claramente el signo de los parámetros utilizados y escriba su sistema de ecuaciones en forma matricial.

$$S'_1 = \alpha_1(S_1 - p_1) + \beta_1(S_2 - p_2) + \gamma_1(S_3 - p_3), \quad \alpha_1 > 0, \beta_1 < 0, \gamma_1 < 0$$

$$S'_2 = \alpha_2(S_1 - p_1) + \beta_2(S_2 - p_2) + \gamma_2(S_3 - p_3), \quad \alpha_2 < 0, \beta_2 > 0, \gamma_2 < 0$$

$$S'_3 = \alpha_3(S_1 - p_1) + \beta_3(S_2 - p_2) + \gamma_3(S_3 - p_3), \quad \alpha_3 < 0, \beta_3 < 0, \gamma_3 > 0$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2 + \gamma_1 p_3 \\ \alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2 + \gamma_2 p_3 \\ \alpha_3 p_1 + \beta_3 p_2 + \gamma_3 p_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Suponiendo que  $S_3$  no tiene influencia sobre  $S_2$ , encuentre el polinomio característico de la EDO de orden 3 que se obtiene para  $S_1$  al reducir el sistema.

**Indicación:** Considere  $X_i = S_i - p_i$ .

Definiendo  $X_i = S_i - p_i$ ,  $X'_i = S'_i$ , tenemos:

$$X'_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3.$$

$$X'_2 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \gamma_2 X_3.$$

$$X'_3 = \alpha_3 X_1 + \beta_3 X_2 + \gamma_3 X_3.$$

Como 3 no afecta a 2 tenemos que  $\gamma_2 = 0$ . Usando la notación de operadores y reordenando queda:

$$(D - \alpha_1)X_1 = \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3.$$

$$(D - \beta_2)X_2 = \alpha_2 X_1.$$

$$(D - \gamma_3)X_3 = \alpha_3 X_1 + \beta_3 X_2.$$

Aplicando los operadores diferenciales para anular, usando la conmutatividad y despejando, se obtiene lo siguiente:

$$(D - \gamma_3)(D - \beta_2)(D - \alpha_1)X_1 = \beta_1\alpha_2(D - \gamma_3)X_1 + \gamma_1\alpha_3(D - \beta_2)X_1 + \gamma_1\beta_3\alpha_2X_1,$$

$$[(D - \gamma_3)(D - \beta_2)(D - \alpha_1) - \beta_1\alpha_2(D - \gamma_3) - \gamma_1\alpha_3(D - \beta_2) - \gamma_1\beta_3\alpha_2]X_1 = 0.$$

Finalmente, se debe escribir de esto el polinomio característico.

- (iii) Suponga además que la firma 1 es multinacional mientras que las firmas 2 y 3 son pequeños pescadores. Como consecuencia, el precio de las acciones de 2 y 3 no afectan a la firma 1. Explique cómo cambia el modelo en este caso y explique cómo la forma de la matriz del sistema permite resolver en etapas.

En este caso, el modelo queda:

$$\begin{aligned} S_1' &= \alpha_1(S_1 - p_1), \\ S_2' &= \alpha_2(S_1 - p_1) + \beta_2(S_2 - p_2), \\ S_3' &= \alpha_3(S_1 - p_1) + \beta_3(S_2 - p_2) + \gamma_3(S_3 - p_3). \end{aligned}$$

Podemos seguir trabajando con las variables  $X_i$  para evitar las constantes  $p_i$ . En este caso obtenemos:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

La matriz del sistema es triangular inferior, lo que permite ir resolviendo el sistema en etapas.

- (iv) Suponga que  $S_1(0) = 1$ ,  $S_2(0) = 100$ ,  $S_3(0) = 250$  y  $p_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . Encuentre la solución del sistema en función de los parámetros que definió. ¿Qué pasa con el precio de las acciones de los pequeños pescadores en el largo plazo?

Resolvemos en etapas. Como  $p_i = 0$  tenemos que  $X_i = S_i$ .

Para  $S_1$ :

$$S_1(t) = e^{\alpha_1 t}.$$

Para  $S_2$ :

$$S_2' - \beta_2 S_2 = \alpha_2 e^{\alpha_1 t}$$

$$S_2 = \left(100 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_2}\right) e^{\beta_2 t} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_2} e^{\alpha_1 t}.$$

Para  $S_3$ :

$$S_3' - \gamma_3 S_3 = \alpha_3 S_1 + \beta_3 S_2$$

$$S_3 = c_0 e^{\gamma_3 t} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \gamma_3} e^{\alpha_1 t} + \frac{\beta_3}{(\beta_2 - \gamma_3)} \left(100 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 - \beta_2)}\right) e^{\beta_2 t} + \frac{\alpha_2 \beta_3}{(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \gamma_3)} e^{\alpha_1 t},$$

donde

$$c_0 = 250 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \gamma_3} - \frac{\beta_3}{(\beta_2 - \gamma_3)} \left(100 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 - \beta_2)}\right) - \frac{\alpha_2 \beta_3}{(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \gamma_3)},$$

**P3.-**

- (a) Considere  $f_1, f_2, \dots, f_n$  funciones diferenciables y una matriz constante  $A$  de  $n \times n$ , con  $\det(A) \neq 0$ . Se definen las funciones  $u_1, u_2, \dots, u_n$  como:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcule  $W(u_1, \dots, u_n)$  en términos de  $W(f_1, \dots, f_n)$ .

Se tiene que la derivada  $n$ -ésima del vector de funciones  $u$  cumple:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^{(n)} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}^{(n)}.$$

Luego, si se escribe en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(n-1)} \\ u_2 & u_2' & \dots & u_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & u_n' & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 & f_1' & \dots & f_1^{(n-1)} \\ f_2 & f_2' & \dots & f_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n & f_n' & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

Como para dos matrices de  $n \times n$ ,  $\det(CD) = \det(C)\det(D)$  y  $\det(C^T) = \det(C)$ , se obtiene:

$$W(u_1, \dots, u_n) = \det(A)W(f_1, \dots, f_n).$$

- (ii) Utilice lo anterior para calcular  $W(u, v)$  con  $u = 3f_1 + f_2$ ,  $v = f_1 - f_2$ .

Simplemente calculamos el determinante de  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .  $\det(A) = -4$ . Luego:

$$W(u, v) = -4W(f, g)$$

- (b) Considere  $p, g_1, g_2 \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Considere las ecuaciones:

$$(p(x)u')' + g_1(x)u = 0, \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

$$(p(x)v')' + g_2(x)v = 0, \quad x \in [a, b] \tag{2}$$

Suponga que  $p(x) > 0$  para  $x \in [a, b]$  y que  $g_1(x) < g_2(x)$  para  $x \in [x_1, x_2] \subseteq [a, b]$ , con  $x_1$  y  $x_2$  ceros consecutivos de  $u$  solución de (1). Probar que existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que  $v(c) = 0$ , con  $v$  solución de (2).

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $u > 0$  en  $[x_1, x_2]$  y que  $u'(x_1) > 0, u'(x_2) < 0$ . Supongamos que  $\forall x \in (x_1, x_2), v(x) \neq 0$ . En este caso, sin perder generalidad se puede suponer que  $v > 0$  en  $(x_1, x_2)$ .

Multiplicando la primera ecuación por  $v$ , la segunda por  $u$ , integramos entre  $x_1$  y  $x_2$  y luego restamos. Se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} (p(x)u')'v - (p(x)v')'u + (g_1 - g_2)uv = 0.$$

Integrando por partes:

$$p(x_2)u'(x_2)v(x_2) - p(x_1)u'(x_1)v(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (g_1 - g_2)uv = 0$$

De acuerdo a las hipótesis sobre  $g_1$  y  $g_2$  y los supuestos sobre el signo de  $u$  y  $v$ , se tiene:

$$\underbrace{\underbrace{p(x_2)u'(x_2)}_{>0} \underbrace{v(x_2)}_{<0}}_{\leq 0} - \underbrace{\underbrace{p(x_1)u'(x_1)}_{>0} \underbrace{v(x_1)}_{>0}}_{\geq 0} > 0$$

Con lo que se llega a una contradicción.